



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ & ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗΣ ΥΠΟΔΟΜΗΣ

## Διπλωματική Εργασία

Το Τύμημα της Αναρχίας στην κυκλοφορία σε αστικά οδικά δίκτυα: Η περίπτωση του οδικού δικτύου της Αθήνας



Καμπιτάκης Φ. Εμμανουήλ  
Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:  
Βλαχογιάννη Ι. Ελένη  
Αθήνα, Νοέμβριος 2015

**Το Τίμημα της Αναρχίας στην κυκλοφορία σε  
αστικά οδικά δίκτυα: Η περίπτωση του  
οδικού δικτύου της Αθήνας**



*Στους γονείς μου,  
στους φίλους μου  
και στη Γιολάντα*



## **Ευχαριστίες**

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την, επιβλέπουσα και Ελένη Βλαχογιάννη, Επίκουρη Καθηγήτρια της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών, για την ανάθεση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, για την υποστήριξη και την πολύτιμη καθοδήγησή της σε όλο το διάστημα της εκπόνησής της. Η διάθεση για συζήτηση, οποιουδήποτε προβληματισμού και απορίας και οι κατευθύνσεις που πήρα, συνέβαλλαν ουσιαστικά για την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Υποψήφιο Διδάκτορα, Ηλία Γκότση, τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας του Ο.Π.Α., Ιωάννη Μούρτο καθώς και τον Μεταδιδακτορικό Ερευνητή του Τμήματος Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α., Ιωάννη Γιώτη, για τον χρόνο, τη διάθεση, την κατανόηση και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους, σε όλο το διάστημα εκπόνησης της εργασίας, καθώς και για την άριστη συνεργασία τους.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω θερμές ευχαριστίες στους φίλους μου για την στήριξή τους και στους γονείς μου για την αμέριστη συμπαράστασή τους καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου.



# **Το Τίμημα της Αναρχίας στην κυκλοφορία σε αστικά οδικά δίκτυα: Η περίπτωση του οδικού δικτύου της Αθήνας**

**Εμμανουήλ Φ. Καμπιτάκης**

**Επιβλέπουσα: Ελένη Ι. Βλαχογιάννη**

## **Σύνοψη**

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ποσοτικοποίηση της εγωιστικής συμπεριφοράς, η διερεύνηση της εφαρμογής του «Τιμήματος της Αναρχίας» στην κυκλοφορία σε αστικά οδικά δίκτυα, καθώς και η διερεύνηση του Παράδοξου του Braess όσον αφορά στον εντοπισμό και στην συσχέτιση του με το Τίμημα της Αναρχίας. Στόχος είναι η ένταξή τους ως μετρικές στα συστήματα διαχείρισης κυκλοφορίας, καθοδήγησης και ενημέρωσης. Με χρήση λογισμικού προσομοίωσης, προτυποποιήθηκαν 2 δίκτυα στην περιοχή της Αττικής, για τα οποία υπολογίστηκε το Τίμημα της Αναρχίας για διάφορα επίπεδα ζήτησης και έγινε ο εντοπισμός των συνδέσμων που «πάσχουν» από το παράδοξο, χρησιμοποιώντας δύο συναρτήσεις κόστους. Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι το Τίμημα της Αναρχίας, όπως και το Παράδοξο του Braess, εξαρτώνται από την συνάρτηση κόστους και το επίπεδο ζήτησης. Καθορίστηκε, επίσης, η μορφή του διαγράμματος του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει της ζήτησης για τα δύο δίκτυα, χρησιμοποιώντας τις δύο συναρτήσεις κόστους. Επιπροσθέτως, ποσοτικοποιήθηκε η επιρροή του κλεισίματος ενός μόνο δρόμου (μίας λωρίδας) κάθε φορά, που «πάσχει» από το παράδοξο, στην μείωση του Τιμήματος της Αναρχίας.

**Λέξεις Κλειδιά:** τίμημα της αναρχίας, διαχείριση κυκλοφορίας, ισορροπία Nash, ισορροπία χρήστη, ισορροπία συστήματος, παράδοξο του Braess



# **The Price of Anarchy in urban road networks: The case of the city of Athens**

**Emmanouil F. Kampitakis**

**Supervisor: Eleni I. Vlahogianni**

## **Abstract**

The aim of this diploma thesis, is to investigate the applicability of Price of Anarchy in real urban road networks, as well as Braess's paradox and its influence on Price of Anarchy. The goal is to integrate these two concepts as metrics in urban traffic management strategies, for example, into route guidance strategies. Using simulation, two real sized road networks in Attiki were modeled, upon which the Price of Anarchy was estimated for different demand levels and the detection of "infected" links by the Paradox was performed. For both tasks, two cost functions were utilized. Findings indicate that, both the Price of Anarchy and the Braess's Paradox are highly dependent on the type of cost function as well as to the travel demand conditions. The shape of the diagram of the Price of Anarchy versus demand was determined for both road networks using both cost functions. Finally, the reduction to the value of Price of Anarchy by the closing (one-by-one) of detected Braess links, was estimated.

**Key Words:** Price of Anarchy, traffic management, Nash equilibrium, user equilibrium, system optimum, Braess's Paradox



# Περίληψη

Στην παρούσα έρευνα, γίνεται η διερεύνηση ενός μεγέθους που ονομάζεται Τίμημα της Αναρχίας (Price of Anarchy), μιας ιδέας της θεωρίας παιγνίων, που αξιολογεί την αποδοτικότητα ενός δικτύου η οποία φθίνει λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς των χρηστών του. Είναι, δηλαδή, μία ποσοτικοποίηση της εγωιστικής συμπεριφοράς. Με τον όρο αποδοτικότητα ορίζεται η απόκλιση της ισορροπίας ισορροπία Nash του δικτύου, από την βέλτιστη ισορροπία του δικτύου. Ο όρος εγωιστική συμπεριφορά είναι μία προτυποποίηση της ανθρώπινης συμπεριφοράς (ισορροπία χρήστη – 1<sup>η</sup> αρχή του Wardrop) σύμφωνα με την οποία κάθε χρήστης στο σύστημα προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το δικό του χρόνο μετακίνησης μέσα στο σύστημα. Να σημειωθεί ότι η ισορροπία χρήστη των μεταφορικών δικτύων είναι μία καθαρή ισορροπία Nash ενός μη συνεργατικού παιχνιδιού. Η βέλτιστη ισορροπία (ισορροπία του συστήματος – 2<sup>η</sup> αρχή του Wardrop) επιτυγχάνεται όταν ο μέσος όρος του χρόνου μετακίνησης (ή ο συνολικός ισοδύναμα) είναι ο ελάχιστος. Σε αντίθεση με την ισορροπία χρήστη που είναι ένα ακραίο σύστημα που αποτελείται από πολλούς μη συνεργατικούς παίκτες, η ισορροπία του συστήματος είναι ένα ακόμα ακραίο σύστημα, με ένα παίκτη που ελέγχει όλο το δίκτυο. Οι κυκλοφοριακές ροές που ικανοποιούν την 2<sup>η</sup> αρχή του Wardrop θεωρούνται γενικά ως βέλτιστες για το σύστημα (system optimum). Προφανώς, δεν πρόκειται για ένα ρεαλιστικό μοντέλο όσον αφορά την συμπεριφορά, όμως μπορεί να είναι πολύ χρήσιμο για τους μηχανικούς, που θέλουν να οργανώσουν και να διαχειριστούν την κυκλοφορία με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιούνται οι χρόνοι μετακίνησης και να προκύπτει μία κοινωνικά βέλτιστη ισορροπία.

Επιπροσθέτως, διερευνήθηκε το παράδοξο του Braess το οποίο περιγράφει ότι η αύξηση της ικανότητας του δικτύου μπορεί να οδηγήσει σε χειροτέρευση του χρόνου μετακίνησης των χρηστών. Στο παράδοξο φαίνεται ότι η πρόσθεση μίας ακμής μηδενικού κόστους (π.χ. ένας δρόμος πολύ μικρού μήκους και εξαιρετικά μεγάλου πλάτους) καταλήγοντας σε ένα τελικό δίκτυο, από ένα αρχικό που δεν περιείχε την ακμή που προστέθηκε, οδηγεί σε συνολικό χρόνο μετακίνησης

μεγαλύτερο, και επομένως σε χειροτέρευση των κυκλοφοριακών συνθηκών συνολικά. Έστω ότι ένα πραγματικό δίκτυο αντιστοιχεί στο τελικό δίκτυο του παράδοξου του Braess, και ότι το δίκτυο που προκύπτει από την αφαίρεση μίας ακμής (ενός οποιοδήποτε δρόμου) αντιστοιχεί στο αρχικό δίκτυο του παράδοξου. Εάν ο συνολικός χρόνος μετακίνησης του αρχικού δικτύου (πραγματικό δίκτυο στο οποίο έχει αφαιρεθεί μία ακμή) είναι μικρότερος του τελικού δικτύου (πραγματικό δίκτυο), τότε το παράδοξο ισχύει και προφανώς η αφαίρεση της ακμής οδηγεί σε καλυτέρευση των κυκλοφοριακών συνθηκών. Ένα ενδιαφέρον στοιχείο, είναι η συσχέτιση του παράδοξου του Braess με το Τίμημα της Αναρχίας. Αφού η αφαίρεση μίας ακμής οδηγεί σε μείωση του συνολικού χρόνου μετακίνησης των χρηστών στο δίκτυο, προφανώς οδηγεί και σε μείωση του Τιμήματος της Αναρχίας. Δηλαδή, ο εντοπισμός του Παράδοξου του Braess θα μπορούσε να αποτελέσει στρατηγική η οποία θα πλησιάζει το δίκτυο στο βέλτιστο.

Για την εφαρμογή των παραπάνω εννοιών σε πραγματικά δίκτυα, προτυποποιήθηκαν δύο δίκτυα στην περιοχή της Αττικής, με την χρήση ειδικού λογισμικού προσομοίωσης. Και τα δύο δίκτυα είναι ρυθμισμένα και βαθμονομημένα στις κυκλοφοριακές συνθήκες του Μαΐου του 2015.

Συγκεκριμένα:

1. Δημιουργήθηκε ένα σενάριο που ονομάστηκε Σενάριο Ισορροπίας Nash (Nash Equilibrium Scenario) και υπολογίστηκε ο συνολικός χρόνος μετακίνησης των χρηστών που βρίσκονται σε ισορροπία χρήστη, χρησιμοποιώντας δύο συναρτήσεις κόστους.
2. Δημιουργήθηκε ακόμα ένα σενάριο που ονομάστηκε Σενάριο Βέλτιστης Ισορροπίας (System Optimum Scenario) και υπολογίστηκαν οι βέλτιστες ροές, οι φόρτοι εκείνοι δηλαδή που βρίσκονται σε ισορροπία Nash, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες συναρτήσεις οριακού κόστους.
3. Χρησιμοποιώντας τους φόρτους που προέκυψαν από το Σενάριο Βέλτιστης Ισορροπίας, και αντικαθιστώντας τους στις συναρτήσεις του Σεναρίου Ισορροπίας Nash υπολογίστηκε ο συνολικός βέλτιστος χρόνος μετακίνησης των χρηστών του δικτύου.

4. Ο λόγος του συνολικού χρόνου μετακίνησης των χρηστών που βρίσκονται σε ισορροπία Nash προς τον συνολικό βέλτιστο χρόνο μετακίνησης των χρηστών είναι το Τίμημα της Αναρχίας.

Η παραπάνω διαδικασία πραγματοποιήθηκε για τα δύο δίκτυα, για διάφορα επίπεδα ζήτησης (ως ποσοστά της ζήτησης ώρας αιχμής), για δύο συναρτήσεις κόστους, που χρησιμοποιούνται εκτενώς στην βιβλιογραφία. Το Τίμημα της Αναρχίας, όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα, έχει μεγάλη εξάρτηση από την συνάρτηση που επιλέγεται και από το επίπεδο ζήτησης στο δίκτυο.

Όσον αφορά στο παράδοξο του Braess, διερευνήθηκε μόνο για τον μικρό δακτύλιο των Αθηνών. Για το επίπεδο ζήτησης που αντιστοιχεί στο μέγιστο Τίμημα της Αναρχίας και για την ζήτηση ώρας αιχμής ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία:

1. Υπολογίστηκε ο συνολικός χρόνος μετακίνησης των χρηστών για τον δακτύλιο (χωρίς καμία παρέμβαση-τελικό δίκτυο).
2. Κλείνοντας έναν σύνδεσμο την φορά σε κάθε σενάριο (ελέγχθηκαν σύνδεσμοι οι οποίοι έχουν χωρητικότητα που αντιστοιχεί σε μία λωρίδα), υπολογίστηκε ο νέος συνολικός χρόνος μετακίνησης των χρηστών, του δικτύου εκείνου που προκύπτει από την αφαίρεση του συνδέσμου.
3. Τέλος, υπολογίστηκε η επιρροή που έχει το παράδοξο στο Τίμημα της Αναρχίας.

Να σημειωθεί ότι χρησιμοποιήθηκαν οι δύο συναρτήσεις κόστους που χρησιμοποιήθηκαν και για τον υπολογισμό του Τιμήματος της Αναρχίας. Εάν ο συνολικός χρόνος που προκύπτει από την αφαίρεση ενός συνδέσμου είναι μικρότερος τότε ο σύνδεσμος «πάσχει» από το Παράδοξο. Όπως το Τίμημα της Αναρχίας, έτσι και το Παράδοξο του Braess, φαίνεται να έχει μεγάλη εξάρτηση από την συνάρτηση και από το επίπεδο ζήτησης στο δίκτυο. Τέλος, υπολογίστηκε η επιρροή που έχει το Παράδοξο στο Τίμημα της Αναρχίας.



# Πίνακας περιεχομένων

<b>Σύνοψη</b> .....	7
<b>Abstract</b> .....	9
<b>Περίληψη</b> .....	11
<b>Ευρετήριο διαγραμμάτων</b> .....	17
<b>Ευρετήριο εικόνων</b> .....	18
<b>Ευρετήριο πινάκων</b> .....	20
<b>1. Εισαγωγή</b> .....	23
1.1 Εγωιστική επιλογή διαδρομής .....	23
1.2 Το τίμημα της αναρχίας.....	23
1.2.1 Ορισμός του Τιμήματος της Αναρχίας .....	23
1.2.2 Σύντομος μαθηματικός ορισμός .....	24
1.2.3 Το δίλημμα των φυλακισμένων .....	25
1.3 Δύο ενδεικτικά παραδείγματα.....	26
1.3.1 Το παράδειγμα του Pigou.....	26
1.3.2 Το παράδοξο του Braess.....	27
1.4 Σκοπός διπλωματικής εργασίας.....	29
1.5 Διάρθρωση διπλωματικής εργασίας.....	30
<b>2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση</b> .....	31
2.1 Συστήματα Καθοδήγησης και Ενημέρωσης.....	31
2.2 Συστήματα Διαχείρισης Αστικής Κυκλοφορίας.....	32
2.3 Εφαρμογές στο Τίμημα της Αναρχίας .....	33
2.4 Εφαρμογές στο Παράδοξο του Braess .....	35
<b>3. Θεωρητικό και μαθηματικό υπόβαθρο</b> .....	39
3.1 Καταμερισμός στο δίκτυο .....	39
3.2 Αρχές καταμερισμού στο δίκτυο.....	39
3.2.1 Η αρχή της Ισορροπίας Χρήστη .....	40
3.2.2 Η αρχή της Ισορροπίας του Συστήματος.....	43
3.3 Μαθηματική διατύπωση του καταμερισμού στο δίκτυο .....	44
3.3.1 Καταμερισμός στο δίκτυο με την αρχή της Ισορροπίας του Χρήστη.....	44

3.3.2 Καταμερισμός στο δίκτυο με τη αρχή της Ισορροπίας του Συστήματος .....	47
3.4 Ο αλγόριθμος Frank-Wolfe .....	48
3.5 Αλγορίθμική Θεωρία Παιγνίων και το Τίμημα της Αναρχίας .....	52
3.5.1 Περιγραφή του μοντέλου.....	52
3.5.2 Ροές σε ισορροπία Nash.....	55
3.5.3 Το Τίμημα της Αναρχίας .....	57
3.5.4 Χαρακτηρισμός των βέλτιστων ροών.....	58
3.5.5 Διάφορα ενδιαφέροντα παραδείγματα.....	63
3.6 Συναρτήσεις κόστους και μακροσκοπική προσομοίωση.....	68
3.6.1 Μαθηματική μορφή .....	69
3.6.2 Προϋποθέσεις για μια «καλή» συνάρτηση κόστους .....	69
3.6.3 Η συνάρτηση κόστους Bureau of Public Roads.....	70
3.6.4 Η συνάρτηση κόστους Conical .....	78
3.6.5 Συναρτήσεις οριακού κόστους.....	84
3.7 Μονάδες Επιβατικών Οχημάτων .....	88
<b>4. Μεθοδολογία .....</b>	<b>89</b>
4.1 Το κυκλοφοριακό δίκτυο του νομού Αττικής στο πρόγραμμα AIMSUN .....	89
4.2 Περιοχές μελέτης .....	91
4.2.1 Μικρός δακτύλιος Αθηνών.....	91
4.2.2 «Ευρύτερο Δίκτυο» .....	102
4.3 Διαδικασία υπολογισμού του Τιμήματος της Αναρχίας .....	103
4.3.1 Σενάριο Ισορροπίας Nash.....	103
4.3.2 Σενάριο Βέλτιστης Ισορροπίας.....	106
4.3.3 Υπολογισμός του Τιμήματος της Αναρχίας.....	108
4.4 Πρόβλημα εντοπισμού του Παράδοξου του Braess .....	110
4.4.1 Διαδικασία εντοπισμού μεμονωμένων συνδέσμων Braess .....	110
<b>5. Αποτελέσματα .....</b>	<b>113</b>
5.1 Το Τίμημα της Αναρχίας .....	113
5.1.1 Αποτελέσματα για τον Δακτύλιο.....	113
5.1.2 Αποτελέσματα για το «Ευρύτερο Δίκτυο».....	121
5.2 Σύνδεσμοι που «ευθύνονται» για το Τίμημα της Αναρχίας .....	130
5.2.1 Συνάρτηση BPR.....	130
5.2.2 Συνάρτηση Conical .....	131
5.2 Το παράδοξο του Braess .....	132

5.2.1 Συνάρτηση BPR για επίπεδο ζήτησης 77,5% (μέγιστο Τίμημα) .....	132
5.2.2 Συνάρτηση Conical για επίπεδο ζήτησης 65% (μέγιστο Τίμημα).....	134
5.2.3 Συνάρτηση BPR για επίπεδο ζήτησης 100% (Ζήτηση αιχμής) .....	135
5.2.4 Συνάρτηση Conical για επίπεδο ζήτησης 100% (Ζήτηση αιχμής) .....	137
<b>6. Συμπεράσματα .....</b>	<b>139</b>
6.1 Εισαγωγή .....	139
6.2 Μεθοδολογία και βασικά συμπεράσματα.....	139
6.3 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.....	141
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>145</b>
<b>Παράρτημα .....</b>	<b>149</b>

## Ευρετήριο διαγραμμάτων

<b>Διάγραμμα 1:</b> Συνάρτηση BPR για μικρούς λόγους v/c και $\alpha=0,15$ .....	74
<b>Διάγραμμα 2:</b> Συνάρτηση BPR για μικρούς λόγους v/c και $\alpha=0,2$ .....	74
<b>Διάγραμμα 3:</b> Συνάρτηση BPR για μικρούς λόγους v/c και $\alpha=0,25$ .....	75
<b>Διάγραμμα 4:</b> Συνάρτηση BPR για μικρούς λόγους v/c και $\alpha=1$ .....	75
<b>Διάγραμμα 5:</b> Συνάρτηση BPR για μεγάλους λόγους v/c και $\alpha=0,15$ .....	76
<b>Διάγραμμα 6:</b> Συνάρτηση BPR για μεγάλους λόγους v/c και $\alpha=0,2$ .....	76
<b>Διάγραμμα 7:</b> Συνάρτηση BPR για μεγάλους λόγους v/c και $\alpha=0,25$ .....	77
<b>Διάγραμμα 8:</b> Συνάρτηση BPR για μεγάλους λόγους v/c και $\alpha=1$ .....	77
<b>Διάγραμμα 9:</b> Conical συναρτήσεις για μικρούς λόγους v/c .....	80
<b>Διάγραμμα 10:</b> Conical συναρτήσεις για μεγάλους λόγους v/c .....	81
<b>Διάγραμμα 11:</b> Συντελεστής καλής προσαρμογής $R^2$ μεταξύ των φόρτων του Assignment και των φόρτων των φωρατών για κάθε επανάληψη .....	96
<b>Διάγραμμα 12:</b> Γραμμική παλινδρόμηση.....	97
<b>Διάγραμμα 13:</b> Σύνθεση κυκλοφορίας μικρού δακτυλίου (Πηγή: ΟΑΣΑ) .....	101
<b>Διάγραμμα 14:</b> Σύνθεση κυκλοφορίας ευρύτερου δικτύου (Πηγή: ΟΑΣΑ) .....	103
<b>Διάγραμμα 15:</b> Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει των Μ.Ε.Α.-Δακτύλιος... ..	114
<b>Διάγραμμα 16:</b> Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Demand Level)-Δακτύλιος.....	114
<b>Διάγραμμα 17:</b> Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Ζήτηση $\leq$ 100%)-Δακτύλιος.....	116

<b>Διάγραμμα 18:</b> Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Ζήτηση $\geq$ 100%)-Δακτύλιος.....	116
<b>Διάγραμμα 19:</b> Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Συγκεντρωτικό)-Δακτύλιος .....	117
<b>Διάγραμμα 20:</b> Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του ποσοστού των συμφορημένων συνδέσμων-Δακτύλιος.....	119
<b>Διάγραμμα 21:</b> Συνολικό κόστος συναρτήσει των Μ.Ε.Α. - Δακτύλιος.....	120
<b>Διάγραμμα 22:</b> Συνολικό κόστος συναρτήσει των συμφορημένων συνδέσμων – Δακτύλιος .....	121
<b>Διάγραμμα 23:</b> Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει των Μ.Ε.Α. – «Ευρύτερο Δίκτυο».....	122
<b>Διάγραμμα 24:</b> Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης – «Ευρύτερο Δίκτυο» .....	123
<b>Διάγραμμα 25:</b> Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Ζήτηση $<=$ 100%)-Ευρύτερο δίκτυο .....	124
<b>Διάγραμμα 26:</b> Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Ζήτηση $\geq$ 100%)-«Ευρύτερο Δίκτυο».....	125
<b>Διάγραμμα 27:</b> Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Συγκεντρωτικό)- «Ευρύτερο Δίκτυο».....	125
<b>Διάγραμμα 28:</b> Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του ποσοστού των συμφορημένων συνδέσμων – «Ευρύτερο δίκτυο» .....	127
<b>Διάγραμμα 29:</b> Συνολικό κόστος συναρτήσει των Μ.Ε.Α. – «Ευρύτερο δίκτυο» .....	129
<b>Διάγραμμα 30:</b> Συνολικό κόστος συναρτήσει των συμφορημένων συνδέσμων – «Ευρύτερο Δίκτυο» .....	129

## Ευρετήριο εικόνων

<b>Εικόνα 1:</b> Pigou's Example .....	26
<b>Εικόνα 2:</b> Αρχικό δίκτυο-Braess's Paradox .....	28
<b>Εικόνα 3:</b> Τελικό δίκτυο-Braess's Paradox.....	28
<b>Εικόνα 4:</b> Τιμές για το Τίμημα της Αναρχίας [8].....	33
<b>Εικόνα 5:</b> Braess's Paradox ( (α) Βοστώνη, (β) Λονδίνο, (γ) Νέα Υόρκη) [8] .....	34
<b>Εικόνα 6:</b> Σημείο ισορροπίας προσφοράς-ζήτησης (Πηγή:AIMSUN).....	41
<b>Εικόνα 7:</b> Σημείο ισορροπίας σε ένα κυκλοφοριακό δίκτυο (Πηγή:AIMSUN) .....	41
<b>Εικόνα 8:</b> Δίκτυο 2 διαδρομών .....	42

<b>Εικόνα 9:</b> Γραφική επίλυση στο πρόβλημα ισορροπίας χρήστη (Πηγή:AIMSUN) .....	42
<b>Εικόνα 10:</b> Πρόβλημα 2 ακμών με σταθερή συνάρτηση χρόνου μετακίνησης.....	46
<b>Εικόνα 11:</b> Pigou's Example-Συναρτήσεις κόστους.....	63
<b>Εικόνα 12:</b> Pigou's Example-Συναρτήσεις οριακού κόστους .....	63
<b>Εικόνα 13:</b> Braess's Paradox-Συναρτήσεις κόστους.....	65
<b>Εικόνα 14:</b> Braess's Paradox-Συναρτήσεις οριακού κόστους.....	65
<b>Εικόνα 15:</b> Nonlinear Pigou's Example-Συναρτήσεις κόστους .....	66
<b>Εικόνα 16:</b> Nonlinear Pigou's Example-Συναρτήσεις οριακού κόστους.....	66
<b>Εικόνα 17:</b> Unfairness of Optimal Flows-Συναρτήσεις κόστους .....	67
<b>Εικόνα 18:</b> Unfairness of Optimal Flows-Συναρτήσεις οριακού κόστους .....	67
<b>Εικόνα 19:</b> Υπερβολικές κωνικές τομές [23] .....	79
<b>Εικόνα 20:</b> Νομός Αττικής (Πηγή: Google Maps) .....	89
<b>Εικόνα 21:</b> Μοντελοποιημένο οδικό δίκτυο νομού Αττικής (Πηγή: AIMSUN) .....	90
<b>Εικόνα 22:</b> Μορφή πίνακα προέλευσης-προορισμού (Πήγη: AIMSUN).....	90
<b>Εικόνα 23:</b> Μικρός Δακτύλιος Αθηνών (Πηγή: Stigmap).....	92
<b>Εικόνα 24:</b> Το σήμα του μικρού δακτυλίου (Πηγή: Google) .....	92
<b>Εικόνα 25:</b> Ο μικρός δακτύλιος στο περιβάλλον του AIMSUN (Πηγή: AIMSUN).....	93
<b>Εικόνα 26:</b> Σχέση μεταξύ της διαδικασίας adjustment και assignment (Πηγή: AIMSUN)....	94
<b>Εικόνα 27:</b> Παράθυρο στο περιβάλλον του AIMSUN-Επιλογή βασικών παραμέτρων για το Macro Adjustment Scenario (Πηγή: AIMSUN) .....	95
<b>Εικόνα 28:</b> Παράθυρο στο περιβάλλον του AIMSUN-Επιλογή βασικών παραμέτρων για το Macro Adjustment Experiment (Πηγή: AIMSUN).....	96
<b>Εικόνα 29:</b> Σύγκριση μεταξύ των φόρτων του Assignment και των φόρτων των φωρατών ανά φωρατή μετά το πέρας της διαδικασίας .....	97
<b>Εικόνα 30:</b> Παράθυρο στο περιβάλλον του AIMSUN-Επιλογή κυκλοφοριακής ζήτησης .....	98
<b>Εικόνα 31:</b> Παράθυρο στο περιβάλλον του AIMSUN-Επιλογή βασικών παραμέτρων για το Macro Assignment Experiment (Πηγή: AIMSUN).....	99
<b>Εικόνα 32:</b> Μικρός δακτυλίου (Πηγή: AIMSUN).....	100
<b>Εικόνα 33:</b> Το «Ευρύτερο δίκτυο» στο περιβάλλον του AIMSUN (Πηγή: AIMSUN) .....	102
<b>Εικόνα 34:</b> Συνάρτηση BPR σε γλώσσα προγραμματισμού Python (Πηγή: AIMSUN) .....	105
<b>Εικόνα 35:</b> Συνάρτηση Conical σε γλώσσα προγραμματισμού Python (Πηγή: AIMSUN)...	106
<b>Εικόνα 36:</b> Συνάρτηση οριακού κόστους της συνάρτησης BPR σε γλώσσα προγραμματισμού Python (Πηγή: AIMSUN).....	107
<b>Εικόνα 37:</b> Συνάρτηση οριακού κόστους της συνάρτησης Conical σε γλώσσα προγραμματισμού Python (Πηγή: AIMSUN).....	107
<b>Εικόνα 38:</b> Παρατηρήσεις στα αποτελέσματα του Τιμήματος της Αναρχίας - Δακτύλιος .	115
<b>Εικόνα 39:</b> Παρατηρήσεις στα αποτελέσματα του Τιμήματος της Αναρχίας - «Ευρύτερο Δίκτυο» .....	123
<b>Εικόνα 40:</b> Σύνδεσμοι που ευθύνονται για το Τίμημα της Αναρχίας - Συνάρτηση BPR.....	131
<b>Εικόνα 41:</b> Σύνδεσμοι που ευθύνονται για το Τίμημα της Αναρχίας - Συνάρτηση Conical	132
<b>Εικόνα 42:</b> Δρόμοι που «πάσχουν» από το Παράδοξο του Braess - Συνάρτηση BPR (77,5%) .....	134

<b>Εικόνα 43:</b> Δρόμοι που «πάσχουν» από το Παράδοξο του Braess - Συνάρτηση Conical (65%)	135
<b>Εικόνα 44:</b> Δρόμοι που «πάσχουν» από το Παράδοξο του Braess - Συνάρτηση BPR (100%)	137
<b>Εικόνα 45:</b> Δρόμοι που «πάσχουν» από το παράδοξο του Braess - Συνάρτηση Conical (100%)	138
<b>Εικόνα 46:</b> Μορφή διαγράμματος του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του Επιπέδου Ζήτησης	140
<b>Εικόνα 47:</b> Συνδυασμός διαχείρισης δακτυλίου και συστήματος καθοδήγησης	142

## Ευρετήριο πινάκων

<b>Πίνακας 1:</b> Πίνακας κόστους-Δίλλημα των φυλακισμένων	25
<b>Πίνακας 2:</b> Μονάδες επιβατικών Αυτοκινήτων ανά κατηγορία οχήματος	101
<b>Πίνακας 3:</b> Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας - Δακτύλιος	113
<b>Πίνακας 4:</b> Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης-Δακτύλιος	115
<b>Πίνακας 5:</b> Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του ποσοστού των συμφορημένων συνδέσμων - Δακτύλιος	119
<b>Πίνακας 6:</b> Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας - Ευρύτερο Δίκτυο	122
<b>Πίνακας 7:</b> Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης-«Ευρύτερο Δίκτυο»	124
<b>Πίνακας 8:</b> Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του ποσοστού των συμφορημένων συνδέσμων - «Ευρύτερο Δίκτυο»	128
<b>Πίνακας 9:</b> Σύνδεσμοι που πάσχουν από το παράδοξο του Braess-Συνάρτηση BPR (77,5%)	133
<b>Πίνακας 10:</b> Σύνδεσμοι που πάσχουν από το παράδοξο του Braess - Συνάρτηση Conical (65%)	134
<b>Πίνακας 11:</b> Σύνδεσμοι που «πάσχουν» από το Παράδοξο του Braess - Συνάρτηση BPR (100%)	136
<b>Πίνακας 12:</b> Σύνδεσμοι που «πάσχουν» από το Παράδοξο του Braess - Συνάρτηση Conical (100%)	138
<b>Πίνακας 13:</b> Σύνδεσμοι που «ευθύνονται» για το Price of Anarchy στον Δακτύλιο με Nash flow > Optimum flow (Κατηγορία 1) – Συνάρτηση BPR	149

<b>Πίνακας 14:</b> Σύνδεσμοι που «ευθύνονται» για το Τίμημα της Αναρχίας στον Δακτύλιο με Nash flow < Optimum flow (Κατηγορία 2) – Συνάρτηση BPR .....	152
<b>Πίνακας 15:</b> Σύνδεσμοι που «ευθύνονται» για το Τίμημα της Αναρχίας στον Δακτύλιο με Nash flow > Optimum flow (Κατηγορία 1) – Συνάρτηση Conical.....	156
<b>Πίνακας 16:</b> Σύνδεσμοι που «ευθύνονται» για το Τίμημα της Αναρχίας στον Δακτύλιο με Nash flow < Optimum flow (Κατηγορία 2) – Συνάρτηση Conical.....	157



# 1. Εισαγωγή

## 1.1 Εγωιστική επιλογή διαδρομής

Ποια διαδρομή θα επέλεγε κάποιος για να πάει στην δουλειά του αύριο; Οι περισσότεροι θα προτιμούσαν την διαδρομή εκείνη που θα τους εξασφάλιζε να ξυπνήσουν το αργότερο δυνατό, πράγμα που σημαίνει ότι θα επέλεγαν την συντομότερη δυνατή διαδρομή. Όπως είναι γνωστό, ο χρόνος που χρειάζεται για να διανύσει κάποιος μία δεδομένη διαδρομή εξαρτάται κυρίως από την κυκλοφοριακή συμφόρηση, δηλαδή από τον αριθμό των οδηγών που επιλέγουν διαδρομές που αλληλοκαλύπτονται. Όταν λοιπόν οι άνθρωποι επιλέγουν την διαδρομή που θα ακολουθήσουν για να πάνε από το σπίτι στην δουλειά, πόσοι αναλογίζονται την επιπλέον συμφόρηση που προκαλούν; Μάλλον κανείς. Με μεγάλη πιθανότητα η επιλογή της διαδρομής είναι εγωιστική (Selfish Routing), με σκοπό να φτάσουν το γρηγορότερο δυνατό στον προορισμό τους, χωρίς να υπολογίζουν τις συνέπειες αυτής της επιλογής στους υπόλοιπους. Φυσικό επακόλουθο είναι να αναμένεται η ίδια εγωκεντρική τάση σχεδόν από όλους. Τι θα γινόταν όμως αν όλοι επέλεγαν συνεργατικά και οργανωμένα διαδρομές; Είναι δυνατόν, να περιορίσεις την αλληλοκάλυψη που υπάρχει μεταξύ των διαδρομών, μειώνοντας έτσι τον χρόνο ταξιδίου; Εάν ναι, πόσο; [1]

## 1.2 Το τίμημα της αναρχίας

### 1.2.1 Ορισμός του Τιμήματος της Αναρχίας

Το Τίμημα της Αναρχίας (Price of Anarchy-PoA) είναι μία ιδέα της θεωρίας παιγνίων που αξιολογεί την αποδοτικότητα ενός δικτύου η οποία φθίνει λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς των χρηστών του [2]. Έστω ένα κυκλοφοριακό δίκτυο μιας πόλης και έστω χρήστες που θέλουν να πάνε από μία προέλευση σε ένα προορισμό. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να ορίζεται ως αποδοτικότητα ο μέσος χρόνος μετακίνησης που χρειάζεται ένας χρήστης για να φτάσει στον προορισμό του.

Στην βέλτιστη λύση, ένας κεντρικός διαχειριστής μπορεί να πει στον κάθε χρήστη ποια διαδρομή να ακολουθήσει με σκοπό να ελαχιστοποιήσει τον μέσο χρόνο μετακίνησης. Στην ‘αναρχική’ εκδοχή, κάθε χρήστης επιλέγει εκείνος την διαδρομή που θα ακολουθήσει. Το Τίμημα της Αναρχίας μετράει τον λόγο των μέσων χρόνων μετακίνησης στις 2 περιπτώσεις.

Συνήθως ένα σύστημα μοντελοποιείται σαν ένα παιχνίδι. Διαφορετικές εκδοχές ισορροπίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιηθεί η εγωιστική συμπεριφορά των χρηστών, από τις οποίες η πιο γνωστή είναι η ισορροπία Nash. Στα μοντέλα μακροσκοπικής προσομοίωσης, χρησιμοποιείται η ισορροπία του Wardrop που ισοδυναμεί με την ισορροπία Nash.

Μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητό ότι μη συνεργατικοί χρήστες οι οποίοι ακολουθούν τις δικές τους προσωπικές βέλτιστες στρατηγικές δεν σημαίνει ότι κατ’ ανάγκη οδηγούνται σε αυτό που ονομάζεται κοινωνικά βέλτιστο, την πλέον προνομιακή κατάσταση για την κοινωνία στο σύνολο της. Αντιθέτως, οι στρατηγικές που προκύπτουν από την ισορροπία Nash αποκλίνουν τις περισσότερες φορές από το βέλτιστο. Αυτός είναι ο λόγος που η κοινωνία πληρώνει το Τίμημα της Αναρχίας (Price of Anarchy).

Ο όρος Price of Anarchy χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά από τους Koutsoupias και Papadimitriou [1], οι οποίοι χαρακτηριστικά αναφέρουν ότι σε ένα σύστημα (π.χ. ένα μεταφορικό σύστημα) όπου μη συνεργατικοί χρήστες χρησιμοποιούν μια κοινή πηγή, προτείνεται το Τίμημα της Αναρχίας, για την μέτρηση της μη αποδοτικότητας της ισορροπίας. Η ιδέα, βέβαια, της μη αποδοτικότητας μιας ισορροπίας είναι παλαιότερη. [3]

### 1.2.2 Σύντομος μαθηματικός ορισμός

Έστω ένα παιχνίδι  $G = (N, S, u)$ , ορισμένο από ένα σύνολο παικτών αριθμού  $N$ , και ένα σύνολο στρατηγικών  $S_i$  καθώς και ένα σύνολο χρησιμοτήτων για κάθε παίκτη  $u_i : S \rightarrow R$  ( όπου  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  το οποίο λέγεται και σύνολο αποτελεσμάτων ) .

Μπορεί να οριστεί μία μετρική αποδοτικότητας για κάθε αποτέλεσμα το οποίο το ονομάζουμε συνάρτηση ευημερίας  $W : S \rightarrow R$ . Φυσικοί υποψήφιοι είναι το άθροισμα των χρησιμότητων των παικτών (αντικειμενική συνάρτηση ωφέλειας)  $W(s) = \min_{i \in N} u_i(s)$ , η ελάχιστη χρησιμότητα  $W(s) = \sum_{i \in N} u_i(s)$  ή οποιαδήποτε συνάρτηση έχει νόημα να αναλυθεί για το εκάστοτε παιχνίδι και είναι επιθυμητό να ελαχιστοποιηθεί. Μπορεί να οριστεί ένα υποσύνολο  $E \subseteq S$  το οποίο είναι το σύνολο των στρατηγικών ισορροπίας (π.χ. το σύνολο των ισορροπιών Nash).

Το Τίμημα της Αναρχίας ορίζεται ως ο λόγος μεταξύ της χειρότερης ισορροπίας και της βέλτιστης λύσης:

$$PoA = \frac{\max_{s \in S} W(s)}{\min_{s \in E} W(s)} \quad (1.1)$$

### 1.2.3 Το δίλημμα των φυλακισμένων

Έστω ένα παιχνίδι 2x2, το δίλημμα των φυλακισμένων (Prisoner's dilemma), που δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα κόστους (Πίνακας 1):

Πίνακας 1: Πίνακας κόστους-Δίλλημα των φυλακισμένων

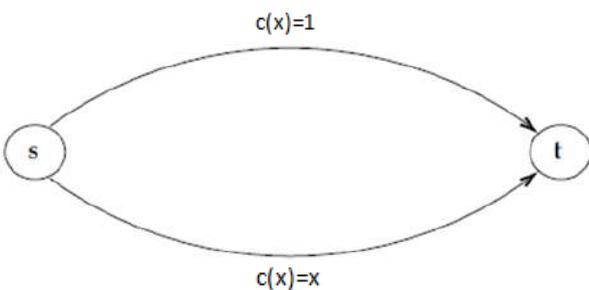
	Cooperate	Defect
Cooperate	1, 1	7, 0
Defect	0, 7	5, 5

και η συνάρτηση κόστους είναι  $C(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2)$ . Το ελάχιστο κόστος επιτυγχάνεται όταν και οι 2 παίκτες διαλέγουν να συνεργαστούν, με αποτέλεσμα το κόστος να είναι  $1 + 1 = 2$ , παρόλα αυτά η μόνη ισορροπία Nash στο παιχνίδι εμφανίζεται μόνο όταν και οι 2 παίκτες αποστατούν, με αποτέλεσμα το κόστος σε αυτήν την περίπτωση να είναι  $5+5=10$ , έτσι το Τίμημα της Αναρχίας αυτού του παιχνιδιού είναι  $10/2=5$ . [4]

## 1.3 Δύο ενδεικτικά παραδείγματα

### 1.3.1 Το παράδειγμα του Pigou

Έστω ένα προάστιο  $s$  και πλησίον του ένα σταθμό τρένου  $t$ , οι οποίοι συνδέονται με 2 μη παρεμβαλλόμενους αυτοκινητόδρομους, και ένας σταθερός αριθμός οδηγών οι οποίοι επιθυμούν να κινηθούν από το  $s$  στο  $t$ . Ο πρώτος δρόμος είναι μικρός σε μήκος αλλά αρκετά στενός, και ο χρόνος που χρειάζεται για να διανυθεί αυξάνεται έντονα καθώς αυξάνεται ο αριθμός των οδηγών που τον χρησιμοποιούν. Ο δεύτερος δρόμος είναι αρκετά πλατύς ώστε να μπορεί να εξυπηρετεί όλη την κυκλοφορία χωρίς να δημιουργείται συμφόρηση, είναι όμως μεγάλου μήκους. Όλοι οι οδηγοί που θα χρησιμοποιήσουν τον δεύτερο δρόμο χρειάζονται 1 ώρα για να τον διανύσουν πηγαίνοντας από το  $s$  στο  $t$ , ανεξαρτήτως του αριθμού των οδηγών που χρησιμοποιούν τον δρόμο. Στον πρώτο δρόμο, ο χρόνος που χρειάζεται για να διανυθεί είναι ίσος, σε ώρες, με το ποσοστό του συνολικού φόρτου που τον χρησιμοποιεί.[1]



Εικόνα 1: Pigou's Example

Η Εικόνα 1 δείχνει το δίκτυο που περιγράφηκε πιο πάνω. Οι συναρτήσεις  $c(\cdot)$  ονομάζονται συναρτήσεις κόστους (cost functions), και σε αυτό το παράδειγμα περιγράφουν τον χρόνο μετακίνησης των οδηγών συναρτήσει της κυκλοφορίας που χρησιμοποιεί τον δρόμο. Η πάνω ακμή στην εικόνα 1 αναπαριστά τον μακρύ και πλατύ δρόμο, ενώ η κάτω ακμή αναπαριστά τον μικρού μήκους και στενό δρόμο. [1]

Υποθέτοντας ότι όλοι οι οδηγοί θέλουν να ελαχιστοποιήσουν τον χρόνο μετακίνησης τους από το  $s$  στο  $t$ , είναι λογικό όλη η κυκλοφορία να ακολουθήσει την κάτω ακμή, δηλαδή τον μικρού μήκους και στενό δρόμο, δημιουργώντας έτσι

συμφόρηση, τέτοια ώστε να χρειάζεται 1 ώρα για να φτάσουν στο σημείο  $t$  όλοι οι οδηγοί. Πράγματι κάθε οδηγός αναμένεται να έχει την ακόλουθη λογική: η κάτω ακμή δεν θα είναι ποτέ «χειρότερη» από την πάνω, ακόμα και αν είναι πλήρως κορεσμένη, και θα είναι καλύτερη ακόμα και αν ένας μόνο οδηγός επιλέξει λανθασμένα την πάνω ακμή. [1]

Τώρα ας υποτεθεί ότι κάποιος διαχειριστής θα μπορούσε να επιλέξει ποιος οδηγός θα πάει που. Μπορεί αυτή η κεντρική διαχείριση να βελτιώσει τα αποτελέσματα της εγωιστικής συμπεριφοράς; Έστω λοιπόν, ότι ο υποθετικός διαχειριστής τοποθετεί την μισή κυκλοφορία στην πάνω ακμή και την άλλη μισή στην κάτω ακμή. Οι οδηγοί που τοποθετήθηκαν στην πάνω ακμή θα υποστούν 1 ώρα, χρόνο μετακίνησης, που σημαίνει ότι δεν θα υποστούν κάτι χειρότερο από την ισορροπία Nash.[1]

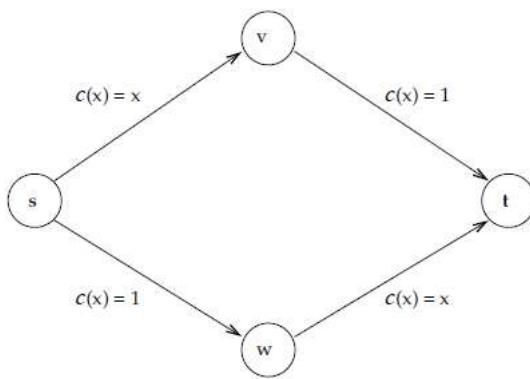
Οι οδηγοί όμως που τοποθετήθηκαν στην κάτω ακμή, λόγω της καλύτερης κυκλοφοριακής κατάστασης που θα αντιμετωπίσουν (μισή από ότι προηγουμένως) χρειάζονται τώρα μόνο 30 λεπτά για να φτάσουν στον προορισμό τους. Η κατάσταση έχει βελτιωθεί για τους μισούς οδηγούς, ενώ για τους άλλους μισούς είναι η ίδια. Επιπροσθέτως, παρατηρείται μία σημαντική μείωση του μέσου χρόνου μετακίνησης από τα 60 στα 45 λεπτά.[1]

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από το παράδειγμα του Pigou (Pigou's example) είναι το εξής:

**Η εγωιστική συμπεριφορά δεν είναι απαραίτητο ότι θα καταλήξει στο βέλτιστο κοινωνικό αποτέλεσμα.[1]**

### 1.3.2 Το παράδοξο του Braess

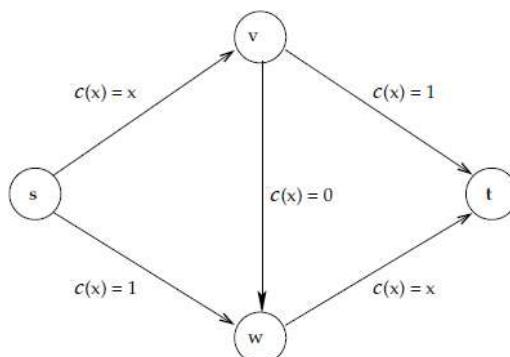
Έστω ένα «προάστιο»  $s$  και ένα σταθμό τρένου  $t$ , ένας σταθερός αριθμός οδηγών που θέλει να πάει από το σημείο  $s$  στο  $t$  τα οποία συνδέονται με 2 διαδρομές που δεν παρεμβάλλονται μεταξύ τους, και καθεμία από αυτές περιλαμβάνει έναν μικρού μήκους και στενό δρόμο, καθώς και ένα μεγάλου μήκους και πλατύ δρόμο όπως φαίνεται στην εικόνα 2. [1]



Εικόνα 2: Αρχικό δίκτυο-Braess's Paradox

Ο συνολικός χρόνος διαδρομής για τις 2 ακμές της και των δύο διαδρομών είναι  $1 + x$ , όπου  $x$  είναι το ποσοστό της κυκλοφορίας που χρησιμοποιεί την διαδρομή. Οι 2 διαδρομές είναι λοιπόν πανομοιότυπες και έτσι η κυκλοφορία θα μοιραστεί εξ ίσου. Σε αυτή την περίπτωση όλοι οι οδηγοί θα φτάσουν στον προορισμό τους 90 λεπτά μετά την αναχώρησή τους.[1]

Στην προσπάθεια μείωσης αυτών των καθυστερήσεων, κατασκευάζεται ένας δρόμος εξαιρετικά μικρού μήκους και εξαιρετικά μεγάλου πλάτους που θα συνδέει τους κόμβους  $v$  και  $w$ . Το νέο δίκτυο φαίνεται στην εικόνα 3, με τον νέο δρόμο να αναπαριστάται από την ακμή  $(v, w)$  και το κόστος του δρόμου να είναι  $C(x) = 0$ , δηλαδή ανεξάρτητο της κυκλοφορίας. Πως θα αντιδρούσαν οι οδηγοί σε αυτή την περίπτωση;



Εικόνα 3: Τελικό δίκτυο-Braess's Paradox

Προφανώς οι οδηγοί δεν θα ακολουθήσουν τις ίδιες διαδρομές στο καινούριο δίκτυο. Ο χρόνος μετακίνησης στην νέα διαδρομή που μπορούν να ακολουθήσουν οι οδηγοί,  $s \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow t$  δεν είναι ποτέ χειρότερος από τον αντίστοιχο των 2 αρχικών διαδρομών ( $s \rightarrow v \rightarrow t$  ή  $s \rightarrow w \rightarrow t$ ). Έτσι είναι εύλογο όλοι οι οδηγοί να επιλέξουν την καινούρια διαδρομή. Ως αποτέλεσμα όμως της κυκλοφοριακής συμφόρησης στις ακμές ( $s, v$ ) και ( $w, t$ ) ο νέος χρόνος διαδρομής από το  $s$  στο  $t$  για όλους τους οδηγούς θα είναι πλέον 2 ώρες. Το παράδοξο του Braess δείχνει ότι ακόμα και αν προστεθεί ένας νέος δρόμος μηδενικού κόστους μπορεί να οδηγήσει σε χειροτέρευση των κυκλοφοριακών συνθηκών συνολικά.[1]

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από το παράδοξο του Braess (Braess's paradox) είναι το εξής:

**Σε ότι έχει να κάνει με την εγωιστική επιλογή διαδρομών (selfish routing), κάποιες κατασκευαστικές βελτιώσεις στο δίκτυο μπορούν να οδηγήσουν σε μείωση της αποτελεσματικότητας του δικτύου.[1]**

## 1.4 Σκοπός διπλωματικής εργασίας

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ποσοτικοποίηση του φαινομένου της εγωιστικής επιλογής διαδρομής (selfish routing) μέσω του υπολογισμού του Τιμήματος της Αναρχίας (Price of Anarchy) σε αστικά οδικά δίκτυα και συγκεκριμένα στο οδικό δίκτυο της Αθήνας. Το Τίμημα της Αναρχίας είναι ένα μέγεθος που μετράει την αναποτελεσματικότητα της ισορροπίας ενός δικτύου συγκρίνοντας το συνολικό κόστος (ή μέσο) που προκύπτει από την ισορροπία Nash (εγωιστική επιλογή διαδρομής), με το ελάχιστο συνολικό κόστος (ή μέσο) του δικτύου, το οποίο προκύπτει από την συνεργασία των χρηστών υπό την καθοδήγηση μιας «κεντρικής διαχείρισης». Επιπροσθέτως, θα γίνει μια εισαγωγική διερεύνηση του παράδοξου του Braess, της εφαρμογής του σε πραγματικά οδικά δίκτυα και της χρήσης του ως στρατηγική μείωσης του Τιμήματος της Αναρχίας.

## 1.5 Διάρθρωση διπλωματικής εργασίας

Η διπλωματική εργασία χωρίζεται στα παρακάτω κεφάλαια:

- Στο **πρώτο (1<sup>ο</sup>) κεφάλαιο**, παρουσιάζεται η έννοια του Τιμήματος της Αναρχίας (ορισμός και μαθηματικός ορισμός) και δίνονται 2 ενδεικτικά παραδείγματα που τονίζουν την σημαντικότητά του, στα κυκλοφοριακά δίκτυα.
- Στο **δεύτερο (2<sup>ο</sup>) κεφάλαιο**, γίνεται μία σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση, γενικά στις μεθόδους και στρατηγικές διαχείρισης σε αστικά οδικά δίκτυα, στην μέχρι τώρα προσέγγιση της επιστημονικής κοινότητας όσον αφορά το Τίμημα της Αναρχίας καθώς και το παράδοξο του Braess και παρουσιάζεται η νέα προσέγγιση.
- Στο **τρίτο (3<sup>ο</sup>) κεφάλαιο**, παρουσιάζεται εκτενώς το μαθηματικό και το θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτήθηκε για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας και που κρίνεται απαραίτητο για την κατανόηση της μεθοδολογικής προσέγγισης.
- Στο **τέταρτο (4<sup>ο</sup>) κεφάλαιο**, παρουσιάζεται η μεθοδολογική προσέγγιση της ερευνάς και περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε.
- Στο **πέμπτο (5<sup>ο</sup>) κεφάλαιο**, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, οι γραφικές παραστάσεις καθώς και ο σχολιασμός των παραπάνω.
- **Τέλος, στο έκτο (6<sup>ο</sup>) κεφάλαιο**, παρουσιάζονται τα βασικότερα συμπεράσματα της έρευνας, όπως αυτά προκύπτουν από τα αποτελέσματά της και παρατίθενται διάφορες προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

## 2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Η κυκλοφοριακή συμφόρηση είναι ένα ολοένα αυξανόμενο πρόβλημα στις περισσότερες αστικές περιοχές στον κόσμο και εμφανίζεται όταν πολλά οχήματα προσπαθούν να χρησιμοποιήσουν μία κοινή μεταφορική υποδομή με περιορισμένη ικανότητα. Τα τελευταία χρόνια, το πρόβλημα έχει συχνά αντιμετωπιστεί από την σκοπιά της διαχείρισης της ήδη υπάρχουσας ικανότητας του δικτύου σε αντίθεση με την παραδοσιακή ιδέα της αύξησης της ικανότητας του δικτύου με την πρόσθεση νέων υποδομών. [5]

Η βέλτιστη διαχείριση και ο έλεγχος της κυκλοφορίας σε αστικά οδικά δίκτυα είναι μία σημαντική υπόθεση για τις αρχές μιας πόλης, καθώς αναζητούν αποδοτικές, ασφαλείς και βιώσιμες μεταφορές. Γι' αυτόν τον λόγο, έχουν εισαχθεί τα συστήματα Διαχείρισης και Ελέγχου Αστικής Κυκλοφορίας (Urban Traffic Management and Control-UTMC) σε πολλές πόλεις σε όλο τον κόσμο ώστε να παρέχονται τα απαραίτητα εργαλεία για την αποδοτική και αποτελεσματική διαχείριση του δικτύου. Ουσιαστικά, τα συστήματα UTMC σχεδιάστηκαν ως ανοικτά συστήματα που ενσωματώνονται και χτίζονται πάνω σε υφιστάμενες λειτουργίες, π.χ. του υπάρχοντος συστήματος σηματοδότησης και άλλων συστημάτων διαχείρισης τις κυκλοφορίας. [6]

### 2.1 Συστήματα Καθοδήγησης και Ενημέρωσης

Η πρόοδος στην επεξεργασία δεδομένων, στην τεχνολογία επικοινωνιών και αισθητήρων έχει επιτρέψει την παροχή πληροφοριών στους χρήστες του δικτύου όσον αφορά την κατάστασή του. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα συστήματα που αποσκοπούν στην βελτίωση των αποφάσεων επιλογής διαδρομής, είτε με την παροχή στοιχείων σχετικά με τις υφιστάμενες συνθήκες του δικτύου είτε με την σύσταση συγκεκριμένων διαδρομών προς ένα προορισμό. Αυτά ονομάζονται Συστήματα Καθοδήγησης και Ενημέρωσης (Route Guidance and Information Systems-RGIS).[5]

Πολλές φορές οι χρήστες ενός δικτύου κυκλοφορίας έχουν άγνοια όσον αφορά τις επιλογές που έχουν και τις διαδρομές που μπορούν να ακολουθήσουν. Υπάρχουν ενδείξεις ότι ακόμα και χρήστες που θεωρείται ότι γνωρίζουν την περιοχή στην οποία κινούνται, έχουν και πάλι περιορισμένη γνώση των επιλογών τους. Σε μία έρευνα του Jeffery [7], αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι με καλύτερη παροχή πληροφοριών όσον αφορά την επιλογή διαδρομής και τις κυκλοφοριακές συνθήκες που επικρατούν στο δίκτυο, ακόμα και οδηγοί με συγκεκριμένες συνήθειες (habitual drivers) σε μια περιοχή μπορούν να μειώσουν τον μέσο όρο της απόστασης που διανύουν καθώς και τον μέσο χρόνο μετακίνησης, περίπου κατά 7%. Σε δίκτυα κυκλοφορίας και ιδιαίτερα σε εκείνα που βρίσκονται σε συνθήκες συμφόρησης, η βέλτιστη ροή σε επίπεδο συστήματος δεν είναι απαραίτητα ίση με εκείνη που προκύπτει όταν κάθε οδηγός διαλέγει ανεξάρτητα την διαδρομή που προτιμά. Η ροή που ελαχιστοποιεί το συνολικό χρόνο μετακίνησης όλων των οχημάτων στο δίκτυο, διαφέρει από εκείνη που προκύπτει όταν κάθε οδηγός προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τον δικό του χρόνου μετακίνησης. Πολλές φορές έχει προταθεί ότι ο διαχειριστής του δικτύου θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει την καθοδήγηση (route guidance) ως εργαλείο για να αναγκάσει το δίκτυο προς μία βέλτιστη κατανομή ροής.[5]

## 2.2 Συστήματα Διαχείρισης Αστικής Κυκλοφορίας

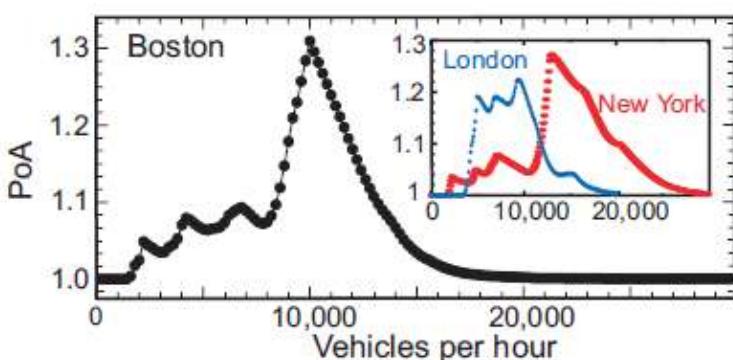
Η Διαχείριση Αστικής Κυκλοφορίας (Urban Traffic Control-UTC) αναφέρεται στον έλεγχο και διαχείριση της κυκλοφορίας σε αστικές περιοχές χρησιμοποιώντας συντονισμένη φωτεινή σηματοδότηση. Τέτοια συστήματα χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή ενός μεγάλου αριθμού στρατηγικών που σχετίζονται με την αποτελεσματικότητα της κυκλοφορίας, την βελτίωση της ασφάλειας, την μείωση της ατμοσφαιρικής μόλυνσης, την προτεραιότητα σε συγκεκριμένη ομάδα χρηστών, τον έλεγχο πρόσβασης σε αστικά κέντρα καθώς και με την μείωση των επιπτώσεων από μη φυσιολογικά συμβάντα, όπως ατυχήματα ή το κλείσιμο δρόμων. Τα συστήματα UTC χρησιμοποιούν ιστορική ή πραγματικού χρόνου γνώση για τις συνθήκες του δικτύου με σκοπό να καθοριστεί η κατάλληλη στρατηγική ελέγχου για τις εκάστοτε συνθήκες.[5]

## 2.3 Εφαρμογές στο Τίμημα της Αναρχίας

Το Τίμημα της Αναρχίας είναι πολύ γνωστή έννοια ιδιαίτερα στον κλάδο της αλγορίθμικής θεωρίας παιγνίων και έχει γίνει εκτενής μελέτη όσον αφορά στην μαθηματική εμβάθυνση και κατανόηση του φαινομένου. Παρόλα αυτά έχει χρησιμοποιηθεί και μελετηθεί ελάχιστα η εφαρμοσιμότητα και η σημαντικότητα του σε πραγματικά αστικά οδικά δίκτυα και η ένταξή του ως μετρικής στα πιο πάνω συστήματα Διαχείρισης και Ελέγχου Αστικής Κυκλοφορίας.

Οι Hyejin Youn et al [8], μελέτησαν το Τίμημα της Αναρχίας σε αποκεντρωμένα κυκλοφοριακά δίκτυα και συγκεκριμένα 3 πόλεων, αυτών της Βοστώνης, του Λονδίνου και της Νέας Υόρκης. Για το δίκτυο της Βοστώνης μοντελοποιήθηκαν 246 δρόμοι (οι πιο βασικοί δρόμοι) και 88 κόμβοι. Για το δίκτυο του Λονδίνου μοντελοποιήθηκαν 217 δρόμοι (οι πιο βασικοί) και 82 κόμβοι. Και τέλος για το δίκτυο της Νέας Υόρκης μοντελοποιήθηκαν 319 δρόμοι (οι πιο βασικοί) και 125 κόμβοι. Και στα 3 δίκτυα χρησιμοποιήθηκε εργαλείο προσομοίωσης καθώς και μόνο ένα ζευγάρι προέλευσης-προορισμού.

Οι χρόνοι μετακίνησης θεωρήθηκε ότι ακολουθούν την συνάρτηση BPR (Bureau of Public Roads) ευρέως γνωστή στην βιβλιογραφία. Τα μεγέθη  $d_{ij}$  και τα χαρακτηριστικά των δρόμων (λωρίδες κ. λ. π.) συλλέχθηκαν από το πρόγραμμα Google Maps. Για διάφορες φορτίσεις του δικτύου (κυκλοφοριακή ζήτηση) υπολογίστηκαν οι φορτίσεις των δρόμων (traffic assignment) και για κάθε επίπεδο φόρτισης υπολογίστηκε το Τίμημα της Αναρχίας (Price of Anarchy) για κάθε μία από τις 3 πόλεις.

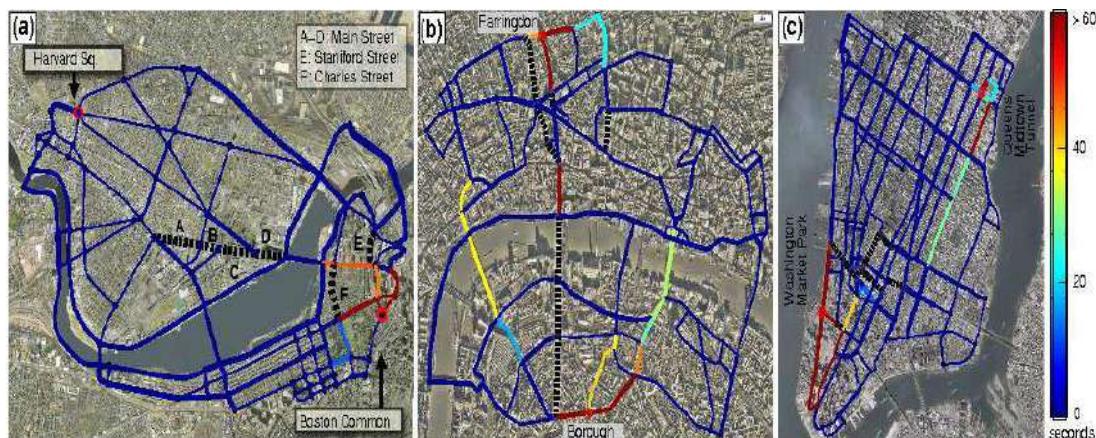


Εικόνα 4: Τιμές για το Τίμημα της Αναρχίας [8]

Στην Εικόνα 4, στην πόλη της Βοστώνης, το μέγιστο Τίμημα της Αναρχίας είναι 1,3 για ζήτηση 10000 αυτοκινήτων την ώρα , δηλαδή οι οδηγοί σπαταλούν το 30% του χρόνου μετακίνησης τους λόγω της εγωιστικής και μη συνεργατικής συμπεριφοράς. Στην πόλη του Λονδίνου, το μέγιστο ΤτΑ είναι 1,24 για ζήτηση 10000 αυτοκινήτων την ώρα , δηλαδή οι οδηγοί σπαταλούν το 24% του χρόνου μετακίνησης τους. Ενώ στην πόλη της Νέας Υόρκης, το μέγιστο ΤτΑ είναι 1,28 για ζήτηση 12500 αυτοκινήτων την ώρα, δηλαδή οι οδηγοί σπαταλούν το 28% του χρόνου μετακίνησης τους.. Επιπροσθέτως, μελετήθηκε το παράδοξο του Braess (Braess's paradox) και για τις 3 πόλεις και βρέθηκε ότι το κλείσιμο κάποιων δρόμων βελτιώνει την κυκλοφορία μειώνοντας τον συνολικό χρόνο μετακίνησης των οδηγών, παρά την μείωση της συνολικής ικανότητας του δικτύου λόγω της αφαίρεσης ενός δρόμου που θα αναμενόταν αυξημένη συμφόρηση στο δίκτυο.

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι η εξής: και για τις 3 πόλεις για τις συνθήκες που εμφανίζεται το μέγιστο Τίμημα της Αναρχίας, συγκρίθηκε το κόστος της ισορροπίας Nash του αρχικού δικτύου με εκείνο της ισορροπίας Nash των δικτύων στα οποία κάθε φορά ένας δρόμος ήταν κλειστός στην κυκλοφορία.

Στην Βοστώνη βρέθηκαν 6 δρόμοι οι οποίοι όταν κλείσουν μειώνεται το συνολικό κόστος, δηλαδή ο χρόνος μετακίνησης όλων των οδηγών που βρίσκονται σε ισορροπία Nash, στο Λονδίνο 7 ενώ στην Νέα Υόρκη 12. Στην εικόνα 5 φαίνονται τα αποτελέσματα της έρευνας.



Εικόνα 5: Braess's Paradox ( (α) Βοστώνη, (β) Λονδίνο, (γ) Νέα Υόρκη) [8]

Το χρώμα κάθε δρόμου υποδηλώνει τον πρόσθετο χρόνο που χρειάζεται να φτάσει ο οδηγός στον προορισμό του στην ισορροπία Nash του δικτύου εκείνου στο οποίο είναι κλειστός ο συγκεκριμένος δρόμος (μπλε: καμία αλλαγή, κόκκινο: περισσότερο από 60 δευτερόλεπτα). Η μαύρες διακεκομμένες γραμμές υποδηλώνουν τους δρόμους τον οποίων το κλείσιμο μειώνει τον χρόνο ταξιδίου.

## 2.4 Εφαρμογές στο Παράδοξο του Braess

Σε αντίθεση με το Price of Anarchy, το παράδοξο του Braess έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών όσον αφορά οδικά δίκτυα, εντούτοις όχι πραγματικά. Ο Roughgarden [1][9][10] έχει αποδείξει ότι ο υπολογισμός του προβλήματος του Braess είναι αλγορίθμικά δύσκολος, και ότι ο σχεδιασμός ενός μεγάλου γενικά δικτύου το οποίο να μην εμφανίζει το παράδοξο του Braess είναι ένα NP-hard πρόβλημα (που δεν λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο). Παρόλα αυτά, κάποιες έρευνες έχουν αντιμετωπίσει το παράδοξο του Braess κάνοντας κάποιες απλοποιήσεις. Οι Yang και Bell [11] το εισήγαγαν ως ένα συνεχές πρόβλημα βελτιστοποίησης. Επινόησαν την έννοια του «αποθεματικού χωρητικότητας του δικτύου» για την αποφυγή του παράδοξου στο σχεδιασμό των δικτύων. Εμπνευσμένοι από τον Braess, για παράδειγμα, οι Korilis, Lazar και Orda [12] καθόρισαν κάποια κριτήρια για την αποφυγή του παράδοξου κατά την διαδικασία προσθήκης καινούριων συνδέσμων, υποθέτοντας ότι όλοι οι σύνδεσμοι είναι κορεσμένοι. Οι Hagstrom και Abrams [13] και οι Abrams και Hagstrom [14] παρουσίασαν μία κυκλοφοριακή ροή η οποία δεν προέκυπτε από ισορροπία. Συγκρινόμενη με την αντίστοιχη που προέκυπτε από την ισορροπία χρήστη, κάποιοι χρήστες είχαν βελτιωμένο χρόνο μετακίνησης ενώ κανένας χρήστης δε είχε χειρότερο.

Οι Yin και Ieda [15] κατασκεύασαν μία εκδοχή του παράδοξου του Braess. Έδειξαν ότι η ύπαρξη του φαινομένου εξαρτάται από την ζήτηση. Πρότειναν μία μέθοδο προγραμματισμού σε δύο επίπεδα στην οποία η εκδοχή του παράδοξου μπορεί να αποφευχθεί. Ωστόσο τα προβλήματα, χρησιμοποιώντας αυτή την μέθοδο που προτείνουν είναι δυσεπίλυτα.

Επιπροσθέτως, η κυκλοφοριακή ροή είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ της προσφοράς του δικτύου και της κυκλοφοριακής ζήτησης τα οποία και τα δύο επηρεάζουν το παράδοξο του Braess: 1) Οποιαδήποτε αλλαγή στη κατάσταση του δικτύου μπορεί να οδηγήσει (ή να ελευθερώσει από) το παράδοξο του Braess (Aashtiani και Poorzahedy [16]). 2) Οποιαδήποτε αλλαγή στην ζήτηση μπορεί να ελευθερώσει το δίκτυο από το παράδοξο που έχει ήδη παρατηρηθεί ή να το οξύνει (Pas και Principio [17]). Ενδιαφέρον είναι ότι υπό κάποιες προϋποθέσεις το παράδοξο σταματάει να εμφανίζεται όσο αυξάνεται η ζήτηση (Fisk [18], Nagurney [19], Nagurney, Parkes, και Daniele [20], Pas και Principio [17]). Ο Nagurney [19] απέδειξε αυτό το φαινόμενο παίρνοντας μια φόρμουλα που υπολόγιζε την αύξηση στην ζήτηση η οποία εξασφάλιζε ότι η ενσωμάτωση ενός καινούριου συνδέσμου στο δίκτυο δεν αύξανε περαιτέρω το κόστος μετακίνησης. Αυτή η προσέγγιση βασίστηκε στην υπόθεση ότι οι συναρτήσεις κόστους είναι γραμμικές. Η εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου περιορίζεται από το μέγεθος του δικτύου γιατί περιλαμβάνει τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα όπου οι πίνακες συμβολίζουν το μέγεθος του δικτύου, που αποτελεί γενικά μία δύσκολη και απαιτητική διαδικασία. Οι Lin και Lo [21] ερεύνησαν το παράδοξο του Braess στο πλαίσιο ουρών χρονικά εξαρτώμενων για δυναμικό καταμερισμό στο δίκτυο (Dynamic Traffic Assignment-DTA) και έδειξαν ότι οι ουρές σε διαφορετικά στάδια έχουν διαφορετικές επιρροές στην «επίδοση» του δικτύου.

Στις μεταφορές, έχει διερευνηθεί η πιθανότητα το παράδοξο να ισχύει σε δυναμικές ροές κυκλοφορίες με ουρές. Οι Arnott, De Palma και Lindsey [22] έδειξαν ότι η επιλογή συμπεριφοράς στον χρόνο άφιξης των χρηστών μπορεί επίσης να προκαλέσει το παράδοξο. Ο Daganzo [23] επίσης έχει διερευνήσει το παράδοξο από εννοιολογική σκοπιά ως ένα «υπερευαίσθητο» πρόβλημα το οποίο προκύπτει από τον συνδυασμό φαινόμενων υπερχείλισης ουρών και η συμπεριφορά των χρηστών στην επιλογή διαδρομής. Πιο συγκεκριμένα, οι Akamatsu και Heydecker [24] έχουν διερευνήσει το πρόβλημα εντοπισμού του παράδοξου του Braess στα πλαίσια δυναμικού καταμερισμού της κυκλοφορίας (DTA) για κορεσμένα δίκτυα (δηλαδή σε συνθήκες συμφόρησης). Καθόρισαν τις απαραίτητες και ικανές συνθήκες για την εμφάνιση του παράδοξου. Παρουσίασαν, επίσης, μία μέθοδο εντοπισμού

συνδέσμων των οποίων η αύξηση ή η μείωση της ικανότητας μπορεί να βελτιώσει ή να χειροτερέψει το συνολικό κόστος μετακίνησης. Το κύριο μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι εστιάζει σε κάθε σύνδεσμο ξεχωριστά και όχι σε συνδυασμό αυτών.

Σε διαφορετικό πλαίσιο, ο Park [25] μελέτησε το πρόβλημα εντοπισμού του παράδοξου για «σταθερά δυναμικά» δίκτυα. Πρόκειται για ένα διαφορετικό μοντέλο το οποίο περιγράφει και παρέχει μία σταθερή κατάσταση συμφόρησης, και διαφέρει από τα συμβατικά μοντέλα ισορροπίας χρήστη, και η διαφορά αυτή έγκειται στον ορισμό της συνάρτησης κόστους. Ο Park [25] εισήγαγε μια εφαρμογή που βασίζεται στην εύρεση διαδρομών για των εντοπισμό του παράδοξου του Braess. Η εφαρμογή αυτή είναι τετραγωνική και μη κυρτή, έτσι ο διαθέσιμος αλγόριθμος επίλυσης δίνει μία τοπικά βέλτιστη λύση. Επιπροσθέτως, λόγω του ότι βασίζεται στον εντοπισμό διαδρομών και όχι μεμονωμένων συνδέσμων, αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα η χρήση του σε δίκτυα μεγάλου μεγέθους καθώς απαιτεί πολύ μεγάλο υπολογιστικό χρόνο. Ο Park εφάρμοσε την εν λόγω μεθοδολογία σε δίκτυο με ένα ζεύγος προέλευσης προορισμού, σε δίκτυο με 6 κόμβους και 9 συνδέσμους.

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω υπάρχει έλλειψη κάποια από τις πιο πάνω μεθόδους σε μεγάλα (όσον αφορά τον αριθμό των συνδέσμων) πραγματικά αστικά οδικά δίκτυα.

Σε πραγματικά δίκτυα οι Saeed Asadi Bagloee et al [26], ανέπτυξαν μία ευριστική μέθοδο βασισμένη σε ένα γενετικό αλγόριθμο για να εντοπίσουν το παράδοξο του Braess. Πρώτα βρήκαν τους μεμονωμένους συνδέσμους του Braess, κλείνοντάς τους ένα έναν και έπειτα χρησιμοποίησαν έναν αλγόριθμο συρραφής για την εύρεση του συνδυασμού των συνδέσμων Braess των οποίων το κλείσιμο μειώνει τον συνολικό χρόνο. Αυτή η μεθοδολογία εφαρμόστηκε στο δίκτυο αναφοράς των Hagstrom-Abrams και σε ένα υποδίκτυο της πόλης Γουίνιπεγκ στον Καναδά.

Από την παραπάνω βιβλιογραφική ανασκόπηση φαίνεται ότι ελάχιστα έχουν γίνει όσον αφορά στο Τίμημα της Αναρχίας σε πραγματικά αστικά οδικά δίκτυα, και ενώ το παράδοξο του Braess φαίνεται να έχει μελετηθεί εκτενώς (θεωρητικά κυρίως),

παρόλα αυτά κάποιες έρευνες είναι αντικρουόμενες στα αποτελέσματα τους. Επιπροσθέτως, η βιβλιογραφία υποδεικνύει ότι το πρόβλημα εντοπισμού του παράδοξου σε συμβατικά δίκτυα ισορροπίας χρήστη ( $1^{\text{η}}$  αρχή του Wardrop) με σταθερή και εξωγενή ζήτηση είναι πολύ ασταθές. Σε επίπεδο πραγματικού δικτύου, το πρόβλημα γίνεται ακόμα πιο σύνθετο. Επίσης δεν υπάρχει στην βιβλιογραφία, συσχέτιση του παράδοξου του Braess με το Τίμημα της Αναρχίας.

# 3. Θεωρητικό και μαθηματικό υπόβαθρο

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζεται το θεωρητικό και μαθηματικό υπόβαθρο που χρειάζεται για την κατανόηση των εννοιών και της μεθοδολογίας που περιγράφεται στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο.

## 3.1 Καταμερισμός στο δίκτυο

Ο καταμερισμός στο δίκτυο (traffic assignment) αφορά την επιλογή των διαδρομών εκείνων που συνδέουν τα ζεύγη προέλευσης-προορισμού σε ένα δίκτυο μεταφορών. Αποτελεί το τέταρτο βήμα του συμβατικού μοντέλου πρόβλεψης της μεταφορικής ζήτησης. Η πρόβλεψη μεταφορικής ζήτησης είναι η διαδικασία εκτίμησης του αριθμού των οχημάτων ή των ανθρώπων που θα χρησιμοποιούν στο μέλλον ή που χρησιμοποιούν ήδη μία συγκεκριμένη υποδομή του μεταφορικού δικτύου και αποτελείται από 4 στάδια-βήματα (four-step model ή urban transportation planning (UTP) ).

## 3.2 Αρχές καταμερισμού στο δίκτυο

Ένα ζήτημα της προτυποποίησης του προβλήματος είναι το επίπεδο λεπτομέρειας που επιζητείται - μακροσκοπική (macrosimulation) έναντι μικροσκοπικής (microsimulation) προσέγγισης. Επίσης γίνεται διάκριση μεταξύ στατικών και δυναμικών μοντέλων, δηλαδή γίνεται χρήση μοντέλων τα οποία είτε είναι χρονικά εξαρτώμενα μοντέλα, π.χ. ο δυναμικός καταμερισμός στο δίκτυο (dynamic traffic assignment, DTA), είτε μοντέλα όπου οι κύριες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες του χρόνου, π.χ. ο στατικός καταμερισμός στο δίκτυο (static traffic assignment, STA). [27] Για τις ανάγκες της διπλωματικής εργασίας θα ασχοληθούμε με μακροσκοπική θεώρηση και με στατικό καταμερισμό στο δίκτυο.

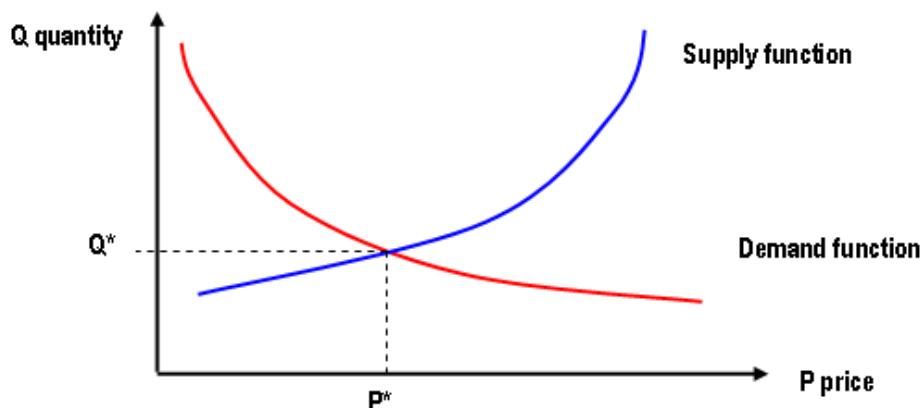
### 3.2.1 Η αρχή της Ισορροπίας Χρήστη

Ο καταμερισμός της κυκλοφορίας στο δίκτυο διέπεται από κάποιους κανόνες, τις γνωστές αρχές ισορροπίας του Wardrop (1952) [28]. **Η 1<sup>η</sup> αρχή του Wardrop που αφορά την Ισορροπία Χρήστη (User Equilibrium, UE)** δηλώνει ότι: «*Οι χρόνοι μετακίνησης σε όλες τις διαδρομές που χρησιμοποιούνται είναι ίσοι, και μικρότεροι από εκείνες που δεν χρησιμοποιούνται ακόμα και αν μόνο ένας χρήστης τις χρησιμοποιούσε*» όπως περιγράφεται από το μοντέλο Beckman. [29] Ο Devayan [30], έδειξε ότι η Ισορροπία Χρήστη των μεταφορικών δικτύων είναι μία καθαρή ισορροπία Nash ενός μη συνεργατικού παιχνιδιού. Η ισορροπία αυτή βασίζεται στην ιδέα ότι κάθε χρήστης στο σύστημα προσπαθεί να βελτιστοποιήσει το δικό του χρόνο μετακίνησης μέσα στο σύστημα. Δε γίνεται βελτιστοποίηση στο σύνολο των χρηστών. Δεν υπάρχει κάποιος διαχειριστής του δικτύου που να λαμβάνει αποφάσεις για όλους τους ταξιδιώτες σχετικά με το πώς να κατανείμουν τους εαυτούς τους στο δίκτυο ούτως ώστε το δίκτυο να συμπεριφέρεται βέλτιστα. Κάθε οδηγός προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τον χρόνο μετακίνησής του χωρίς να τον απασχολούν οι υπόλοιποι οδηγοί. Η Ισορροπία Χρήστη λέγεται ότι επιτυγχάνεται, όταν όλες οι διαδρομές που χρησιμοποιούνται, μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους προέλευσης-προορισμού, απαιτούν τον ίδιο χρόνο για να διανυθούν. Οι διαδρομές που τυχόν δεν χρησιμοποιούνται θα έχουν μεγαλύτερο χρόνο μετακίνησης. [27]

Η ιδέα της Ισορροπίας του Χρήστη δανείστηκε από την θεωρία των τέλεια ανταγωνιστικών αγορών μοντελοποιημένη στα πλαίσια 2 αλληλεπιδρώντων ομάδων: των παραγωγών και των καταναλωτών. Η συμπεριφορά των παραγωγών περιγράφεται από μια συνάρτηση προσφοράς, ενώ η συμπεριφορά των καταναλωτών περιγράφεται από μια συνάρτηση ζήτησης. Η συνάρτηση προσφοράς εκφράζει το πλήθος των αγαθών που προσφέρει ο παραγωγός συναρτήσει της τιμής του προϊόντος. Όσο η τιμή αυξάνεται, η αύξηση της παραγωγής είναι συμφέρουσα, και έτσι η ποσότητα αυξάνεται.

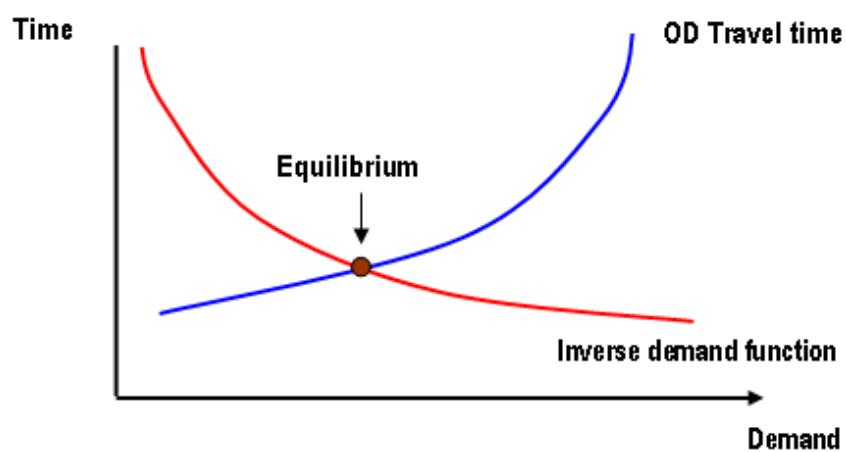
Η συνάρτηση ζήτησης περιγράφει την συμπεριφορά των καταναλωτών συσχετίζοντας την ποσότητα του προϊόντος που ζητείται με την τιμή του. Όσο αυξάνεται η τιμή, η ζήτηση του προϊόντος μειώνεται όπως φαίνεται στην εικόνα 6.

Το σημείο τομής των 2 συναρτήσεων ( $P^*, Q^*$ ) είναι το σημείο όπου η τιμή παραμένει σταθερή, και είναι γνωστό ως σημείο ισορροπίας.



Εικόνα 6: Σημείο ισορροπίας προσφοράς-ζήτησης (Πηγή:AIMSUN)

Στα μεταφορικά συστήματα η κυκλοφοριακή ζήτηση περιγράφεται από μία συνάρτηση ζήτησης (Volume Delay Function-VDF) η οποία συσχετίζει τον αριθμό των μετακινήσεων με το κόστος τους (π.χ. χρόνος μετακίνησης), και η προσφορά περιγράφεται στα πλαίσια μιας συνάρτησης επίδοσης (π.χ. χρόνος μετακίνησης μεταξύ προέλευσης-προορισμού), όπως φαίνεται στην εικόνα 7.



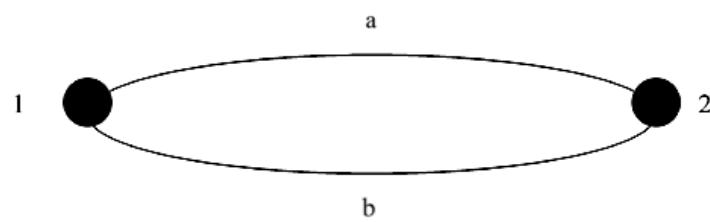
Εικόνα 7: Σημείο ισορροπίας σε ένα κυκλοφοριακό δίκτυο (Πηγή:AIMSUN)

Οι Eash, Janson and Boyce (1979) [31], έδωσαν ένα απλό παράδειγμα που απεικονίζει την λύση σε αυτό το μη γραμμικό πρόβλημα. Υπάρχουν 2 ακμές από τον κόμβο 1 στον κόμβο 2, και υπάρχει μία συνάρτηση κόστους για κάθε ακμή (βλέπε εικόνα 8 πιο κάτω).

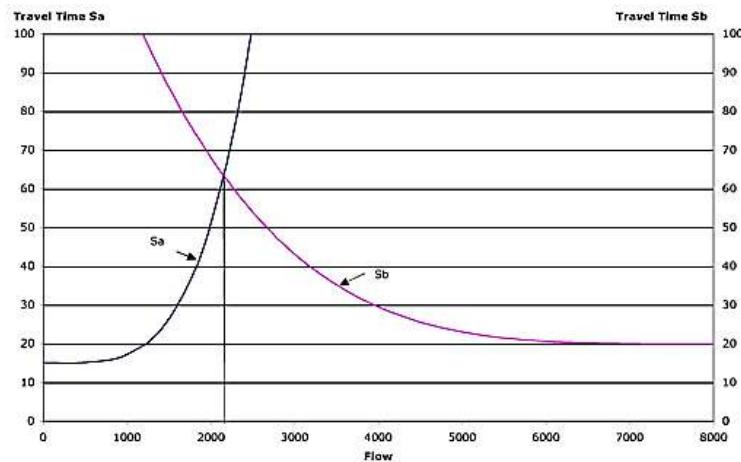
$$S_a = 15(1 + 0.15(\frac{u_a}{1000})^4)$$

$$S_b = 20(1 + 0.15(\frac{u_b}{3000})^4)$$

$$u_a + u_b = 8000$$



Εικόνα 8: Δίκτυο 2 διαδρομών



Εικόνα 9: Γραφική επίλυση στο πρόβλημα ισορροπίας χρήστη (Πηγή:AIMSUN)

Επιτυγχάνεται Ισορροπία Χρήστη όπως φαίνεται στην εικόνα 9 όταν υπάρχουν 2.152 οχήματα στην ακμή 1 και 5.847 οχήματα στην ακμή 2. Και στις 2 διαδρομές ο χρόνος μετακίνησης είναι ο ίδιος: 63 μονάδες περίπου.

### 3.2.2 Η αρχή της Ισορροπίας του Συστήματος

Θα γίνει η διάκριση μεταξύ των προσεγγίσεων της Ισορροπίας του Συστήματος και της Ισορροπίας του Χρήστη. Αντί ο καθένας να λειτουργεί συμφεροντολογικά και εγωιστικά, τι θα γινόταν εάν υπήρχε οργάνωση στις ροές του δικτύου με σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους του δικτύου (System Optimum, SO);

Έστω ότι η συνάρτηση συνολικού κόστους για την λειτουργία ενός δικτύου είναι το άθροισμα του κόστους της κίνησης σε κάθε σύνδεση πολλαπλασιαζόμενο επί την ροή σε κάθε σύνδεσμο. Αυτές οι ροές σύνδεσης μπορούν να προκύψουν από διάφορες ροές προέλευσης-προορισμού. Ισορροπία του συστήματος είναι η προσέγγιση κατά την οποία γίνεται οργάνωση των ροών ώστε το συνολικό κόστος στο δίκτυο να είναι βέλτιστο, αντί ανεξάρτητα ο κάθε χρήστης να «βελτιστοποιεί» τη δική του διαδρομή στο δίκτυο.

**Η 2<sup>η</sup> αρχή του Wardrop δηλώνει ότι: «Όταν βρισκόμαστε σε ισορροπία συστήματος ο μέσος όρος του χρόνου μετακίνησης είναι ελάχιστος».** Αυτό υποδηλώνει ότι κάθε χρήστης του δικτύου συμπεριφέρεται συνεργατικά και επιλέγει την διαδρομή που θα ακολουθήσει με τέτοιο τρόπο ώστε να διασφαλίσει την πιο αποδοτική χρήση του συστήματος. Ο Friesz [32], έχει επίσης δείξει ότι σε αντίθεση με την Ισορροπία Χρήστη που είναι ένα ακραίο σύστημα που αποτελείται από πολλούς μη συνεργατικούς παίκτες, η Ισορροπία του Συστήματος είναι ένα ακόμα ακραίο σύστημα, με ένα παίκτη («Κεντρική Διαχείριση») που ελέγχει όλο το δίκτυο. Οι κυκλοφοριακές ροές που ικανοποιούν την 2<sup>η</sup> αρχή του Wardrop θεωρούνται γενικά ως βέλτιστες για το σύστημα (system optimal). [8] [33] Αυτές τις βέλτιστες ροές έχουν μελετήσει σε έρευνες τους οι Dafermos and Nagurney (1984) [34], Dafermos and Sparrow (1969) [35], Fisk (1979) [36], Murchland (1970) [37], Sheffi (1984) [38], Steinberg and Zangwill (1983) [39], Stewart (1980) [40].

### 3.3 Μαθηματική διατύπωση του καταμερισμού στο δίκτυο

#### 3.3.1 Καταμερισμός στο δίκτυο με την αρχή της Ισορροπίας του Χρήστη

Ο καταμερισμός στο δίκτυο με την αρχή της Ισορροπίας του χρήστη βασίζεται στην 1<sup>η</sup> αρχή του Wardrop, η οποία υποδηλώνει εντέλει ότι: «**κανένας οδηγός δεν μπορεί να μειώσει μονομερώς το χρόνο μετακίνησής του, επιλέγοντας άλλη διαδρομή.**» Οι συνθήκες της αρχής της Ισορροπίας του Χρήστη (User Equilibrium, UE) μπορούν να διατυπωθούν για ένα δεδομένο ζεύγος προέλευσης-προορισμού όπως ακολούθως:

$$f_k(c_k - u) = 0 : \forall k \quad (3.1)$$

$$c_k - u \geq 0 : \forall k \quad (3.2)$$

όπου  $f_k$  είναι η ροή πάνω στην διαδρομή  $k$ ,  $c_k$  είναι το κόστος μετακίνησης της διαδρομής  $k$ , και  $u$  είναι το ελάχιστο κόστος.

Η ισότητα 2 μπορεί να είναι:

1. Αν  $c_k - u = 0$ , από την ισότητα (1) ισχύει ότι  $f_k \geq 0$ . Αυτό σημαίνει όλες οι χρησιμοποιημένες διαδρομές έχουν το ίδιο κόστος.
2. Αν  $c_k - u \geq 0$ , τότε από την ισότητα (3.1) ισχύει ότι  $f_k = 0$

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι διαδρομές που δεν χρησιμοποιούνται έχουν μεγαλύτερο χρόνο μετακίνησης από το ελάχιστο κόστος διαδρομής.

Οι παραδοχές του καταμερισμού στο δίκτυο βάσει της αρχής της Ισορροπίας του Χρήστη είναι οι εξής:

1. Ο χρήστης έχει πλήρη γνώση του δικτύου και του κόστους των διαδρομών
2. Ο χρόνος μετακίνησης σε ένα δεδομένο σύνδεσμο είναι συνάρτηση του όγκου της κυκλοφορίας σε αυτό τον σύνδεσμο μόνο.
3. Οι συναρτήσεις χρόνου μετακίνησης είναι θετικές και αύξουσες.

Η επίλυση στις πιο πάνω συνθήκες ισορροπίας δίνεται από την επίλυση ενός ισοδύναμου προβλήματος μη-γραμμικής μαθηματικής βελτιστοποίησης,

$$\text{Ελαχιστοποίησε } Z = \sum_{\alpha} \int_0^{x_{\alpha}} t_{\alpha}(x_{\alpha}) dx \quad (3.3)$$

$$\text{όπου } \sum_k f_k^{rs} = q_{rs} : \forall r, s$$

$$x_{\alpha} = \sum_r \sum_a \sum_k \delta_{a,k}^{ra} f_k^{ra} : \forall \alpha$$

$$f_k^{rs} \geq 0 : \forall k, r, s$$

$$x_{\alpha} \geq 0 : \forall \alpha \in A$$

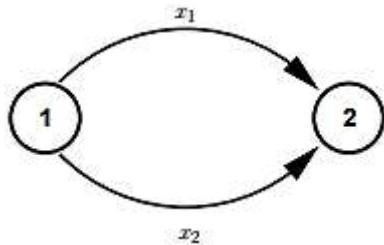
Όπου  $k$  είναι η διαδρομή,  $x_{\alpha}$  οι ροές ισορροπίας στον σύνδεσμο  $\alpha$ ,  $t_{\alpha}$  ο χρόνος μετακίνησης στον σύνδεσμο  $\alpha$ ,  $f_k^{rs}$  η ροή στην διαδρομή  $k$  που συνδέει το ζεύγος προέλευσης-προορισμού  $r - s$ ,  $q_{rs}$  είναι το ποσοστό μετακίνησης μεταξύ του  $r$  και του  $s$ , και  $\delta_{a,k}^{rs}$  είναι ένας περιορισμός εξ ορισμού και διατυπώνεται ως εξής:

$$\delta_{a,k}^{rs} = \begin{cases} 1 & \text{αν ο σύνδεσμος ανήκει στην διαδρομή} \\ 0 & \text{σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση} \end{cases},$$

Οι παραπάνω ισότητες είναι απλές εξισώσεις διατήρησης της ροής καθώς και περιορισμοί μη αρνητικότητας, αντιστοίχως. Εκφράζουν την αρχή ισορροπίας του χρήστη. Οι διαδρομές που συνδέουν ένα ζεύγος προέλευσης-προορισμού μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες: αυτές που μεταφέρουν την ροή και αυτές που δεν την μεταφέρουν, στις οποίες ο χρόνος μετακίνησης είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με τον ελάχιστο χρόνο μετακίνησης από την προέλευση στον προορισμό. Εάν τα μονοπάτια ροής ικανοποιούν αυτές τις εξισώσεις, κανείς οδηγός δεν μπορεί να μειώσει τον χρόνο μετακίνησης του αλλάζοντας μονομερώς διαδρομή, διότι οι υπόλοιπες διαδρομές έχουν είτε ίσο είτε μεγαλύτερο χρόνο. Έτσι τα κριτήρια για την ισορροπία του Χρήστη ικανοποιούνται για κάθε ζεύγος προέλευσης-προορισμού. Το πρόβλημα ισορροπίας είναι κυρτό, αφού οι συναρτήσεις χρόνου μετακίνησης στους συνδέσμους είναι γνησίως αύξουσες, και ο χρόνος μετακίνησης σε ένα συγκεκριμένο σύνδεσμο είναι ανεξάρτητος της ροής των άλλων συνδέσμων του δικτύου.

## Παράδειγμα

Έστω το πρόβλημα όπου ο χρόνος μετακίνησης δεν είναι συνάρτηση της κυκλοφοριακής ροής (όπως προαναφέρθηκε) αλλά είναι ανεξάρτητος και σταθερός όπως φαίνεται στην εικόνα 10.



Εικόνα 10: Πρόβλημα 2 ακμών με σταθερή συνάρτηση χρόνου μετακίνησης

$$t_1 = 10 + 3x_1$$

$$t_2 = 15 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 = 12$$

## Επίλυση

Αντικαθιστώντας τον χρόνο στην ισότητα έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \min Z(x) &= \int_0^{x_1} 10 + 3x_1 \, dx_1 + \int_0^{x_2} 15 + 2x_2 \, dx_2 = \\ &= 10x_1 + \frac{3x_1^2}{2} + 15x_2 + \frac{2x_2^2}{2} \end{aligned}$$

Βάζοντας όπου  $x_2 = 12 - x_1$  στην πιο πάνω διατύπωση θα μας δώσει μία άλλη χωρίς περιορισμούς:

$$\min Z(x) = 10x_1 + \frac{3x_1^2}{2} + 15(12 - x_1) + \frac{2(12 - x_1)^2}{2}$$

Παραγωγίζοντας την πιο πάνω ισότητα ως προς  $x_1$ , εξισώνοντας με το 0, και λύνοντας ακολούθως ως προς  $x_1$  και μετά ως προς  $x_2$ , οδηγεί στην επίλυση  $x_1 = 5.8$  και  $x_2 = 6.2$ .

### 3.3.2 Καταμερισμός στο δίκτυο με την αρχή της Ισορροπίας του Συστήματος

Ο καταμερισμός στο δίκτυο με την αρχή της Ισορροπίας του Συστήματος (System Optimum Assignment-SO) βασίζεται στην 2<sup>η</sup> αρχή του Wardrop κατά την οποία οι οδηγοί συνεργάζονται μεταξύ τους με σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου μετακίνησης του συστήματος. Ο καταμερισμός μπορεί να κατανοηθεί σαν ένα μοντέλο στο οποίο η συμφόρηση ελαχιστοποιείται όταν όλοι οι οδηγοί επιλέγουν τις διαδρομές που τους προτείνει ένας κεντρικός διαχειριστής. Η παραπάνω προσέγγιση δεν αποτελεί ένα ρεαλιστικό μοντέλο όσον αφορά την συμπεριφορά, όμως μπορεί να είναι πολύ χρήσιμο για τους μηχανικούς, που θέλουν να οργανώσουν και να διαχειριστούν την κυκλοφορία με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιούνται οι χρόνοι μετακίνησης και έτσι να επιτευχθεί μια κοινωνικά βέλτιστη ισορροπία.

$$\text{Ελαχιστοποίησε την } Z = \sum_a x_a t_a(x_a) \quad (3.4)$$

$$\text{όπου} \quad \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}: \forall r, s$$

$$x_a = \sum_r \sum_a \sum_k \delta_{a,k}^{ra} f_k^{ra} : \forall a$$

$$f_k^{rs} \geq 0 : \forall k, r, s$$

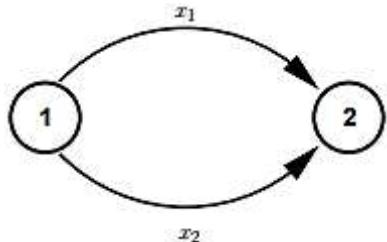
$$x_a \geq 0 : \forall a \in A$$

Όπου  $k$  είναι η διαδρομή,  $x_a$  οι ροές ισορροπίας στον σύνδεσμο  $a$ ,  $t_a$  ο χρόνος μετακίνησης στον σύνδεσμο  $a$ ,  $f_k^{rs}$  η ροή στην διαδρομή  $k$  που συνδέει το ζεύγος προέλευσης-προορισμού  $r - s$ ,  $q_{rs}$  είναι το ποσοστό μετακίνησης μεταξύ του  $r$  και του  $s$ .

#### Παράδειγμα

Για να δειχθεί πως λειτουργεί ο καταμερισμός, παρατίθεται το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω το δίκτυο του σχήματος το οποίο αποτελείται από δύο κόμβους

και δύο συνδέσμους. Έστω ότι ο χρόνος μετακίνησης δεν είναι συνάρτηση της κυκλοφοριακής ροής, αλλά είναι ανεξάρτητος και σταθερός όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



$$t_1 = 10 + 3x_1$$

$$t_2 = 15 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 = 12$$

Αντικαθιστώντας τον χρόνο στην ισότητα προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned} \min Z(x) &= x_1(10 + 3x_1) + x_2(15 + 2x_2) = \\ &= 10x_1 + 3x_1^2 + 15x_2 + 2x_2^2 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας πάλι όπου  $x_2$  το  $x_1 - 12$  προκύπτει ότι,

$$\min Z(x) = 10x_1 + 3x_1^2 + 15(12 - x_1) + 2(12 - x_1)^2$$

Παραγωγίζοντας την πιο πάνω ισότητα και εξισώνοντάς την με 0, και λύνοντας ως προς  $x_1$  και μετά ως προς  $x_2$  οδηγεί στην επίλυση  $x_1 = 5.3$ ,  $x_2 = 6.7$  και  $Z(x) = 327.55$ . [41]

### 3.4 Ο αλγόριθμος Frank-Wolfe

Η επίλυση ενός προβλήματος με 2 ακμές είναι εύκολο να επιλυθεί γραφικά ή ακόμα και αναλυτικά. Ένα πρόβλημα όμως με 3 ακμές και πάνω δεν μπορεί να επιλυθεί τόσο εύκολα, και τα περισσότερα δίκτυα μεταφορών αποτελούνται από ένα μεγάλο αριθμό ακμών και κόμβων. Η επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι αρκετά δύσκολη

και έτσι απαιτείται η χρήση αλγόριθμου για να επιτευχθεί ο καταμερισμός της κυκλοφορίας στο δίκτυο.

O Dafermos (1968) [42] χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τον αλγόριθμο Frank-Wolfe (Frank-Wolfe algorithm) [43] (1956, Florian 1976) [44], ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του προβλήματος του καταμερισμού της κυκλοφορίας στο δίκτυο.

**Η ιδέα του αλγορίθμου:**

Έστω το πρόβλημα (1):

$$\text{ελαχιστοποίησε την } f(x) \quad (3.5)$$

$$\text{όπου το } x \in S$$

όπου το  $S \subset R^n$  και είναι πολύεδρο και όπου  $f: R^n \rightarrow R$  είναι μία συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση. (Θεωρείται ότι το  $S$  είναι φραγμένο, χάριν απλότητας)

**Ο αλγόριθμος Frank-Wolfe (Frank-Wolfe algorithm) λειτουργεί ως ακολούθως:**

**1. Επιλέγεται μία αρχική λύση,  $x_0 \in S$ , και  $K := 0$**

Εδώ επιλέγεται συνήθως μία αυθαίρετη βασική εφικτή λύση, δηλαδή, κάποιο ακραίο σημείο (ακραίο σημείο ενός κυρτού συνόλου  $S$  σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο είναι ένα σημείο του  $S$  το οποίο δεν βρίσκεται σε κανένα ανοικτό τμήμα της γραμμής που ενώνει 2 σημεία του  $S$ ).

**2. Ορίζεται μία κατεύθυνση αναζήτησης,  $p_k$ .**

Στον αλγόριθμο Frank-Wolfe μπορεί να καθοριστεί το  $p_k$  μέσω της επίλυσης μίας προσέγγισης του προβλήματος (1), που λαμβάνεται με την αντικατάσταση της συνάρτησης  $f$  από την επέκταση Taylor πρώτης-τάξης γύρω από το  $x_k$ , δηλαδή κοντά στο  $x_k$ . Ως εκ τούτου, να λυθεί το πρόβλημα:

Ελαχιστοποίησε την  $z_k(y) := f(x_k) + \nabla f(x_k)^T (y - x_k)$  (3.6),

όπου  $y \in S$

Το παραπάνω είναι ένα πρόβλημα LP (δηλαδή είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού), και δίνει ένα ακραίο σημείο,  $y_k$ , σαν μια βέλτιστη λύση. Η κατεύθυνση αναζήτησης είναι  $p_k := y_0 - x_0$ , το οποίο είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης από το δυνατό σημείο  $x_k$  προς το ακραίο σημείο. Το  $p_k$  είναι όντως μία δυνατή κατεύθυνση, αφού και το  $x_k$  και το  $y_k$  ανήκουν στο  $S$  και το  $S$  είναι κυρτό.

### 3. Ορίζεται ένα μήκος βήματος $\alpha_k$ , τέτοιο ώστε

$$f(x_k + \alpha_k p_k) < f(x_k) \quad (3.7)$$

Εδώ πρέπει να περιοριστεί το μήκος βήματος ώστε να είναι το μέγιστο 1, διότι για  $\alpha > 1$  η επίλυση γίνεται μη δυνατή, και ως εκ τούτου η γραμμική αναζήτηση έχει την μορφή:

ελαχιστοποίησε την  $f(x_k + \alpha_k p_k)$ , όπου  $\alpha \in [0,1]$

### 4. Νέο σημείο επανάληψης:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

### 5. Εάν ικανοποιείται κάποιο κριτήριο παύσης της επαναληπτικής διαδικασίας τότε ο αλγόριθμος σταματάει, και το $x_{k+1}$ είναι μια προσέγγιση του $x_*$ . Άλλιώς, $k := k + 1$ , και πήγαινε στο 1.

Αυτό που μένει είναι:

- (α) Να δειχθεί γιατί η κατεύθυνση αναζήτησης  $p_k$  είναι καθοδική, ώστε να είναι εξασφαλισμένη η δυνατότητα ικανοποίησης της (4).
- (β) Να βρεθεί ένα καλό κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου.

Λέμε ότι το  $x \in S$  είναι σταθερό αν  $\nabla f(x_k)^T (y - x_k) > 0$  για όλα τα  $y \in X$ . Αυτή είναι μία απαραίτητη συνθήκη για να είναι το  $x$  τοπικό ελάχιστο.

Διαφορετικά, δηλαδή αν το  $x \in S$ , είναι τοπικό ελάχιστο για το οποίο ισχύει  $\nabla f(x_k)^T (y - x_k) < 0$  για κάποια  $y \in S$ . Όμως  $p := y - x$  είναι μία δυνατή κατεύθυνση, έτσι έχουμε ότι τι  $p$  είναι μία δυνατή καθοδική κατεύθυνση.

Μπορεί τώρα να σημειωθεί ότι:

$$z_k(y_k) \leq z_k(x_k) = 0$$

(Η πιο πάνω ανισότητα αντικρούεται από το γεγονός ότι το  $y_k$  είναι λύση του προβλήματος  $LP$ , αλλά αυτό μπορεί να μην είναι αληθές για το  $x_k$ ).

Αν  $z_k(y_k) = 0$  αυτό σημαίνει ότι

$$\nabla f(x_k)^T (y - x_k) \geq 0, \quad \forall y \in S,$$

που σημαίνει ότι το  $x_k$  είναι σταθερό σημείο. Αν αυτό είναι αληθές τότε τερματίζεται ο αλγόριθμος έχοντας εξασφαλίσει ένα σταθερό σημείο. Να σημειωθεί ότι αν η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή, τότε το  $x_k$  είναι ολικό ελάχιστο.

Αν, από τη άλλη, ισχύει  $z_k(y_k) < 0$ , τότε αυτό σημαίνει ότι  $\nabla f(x_k)^T (y - x_k) < 0$ , δηλαδή, το διάνυσμα  $p_k := y_k - x_k$  προς την  $LP$  επίλυση ακολουθεί μία καθοδική κατεύθυνση.

Ένα πιο πολύτιμο κριτήριο τερματισμού, δίνεται στην πράξη, από τα άνω και κάτω όρια για την βέλτιστη αντικειμενική τιμή. Αυτό ισχύει για κυρτά προβλήματα μόνο. Έτσι ότι ακολουθεί θα ισχύει μόνο εάν η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή, και όχι σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση. Η βάση για τα επιχειρήματα που ακολουθούν είναι η γνωστή ιδιότητα ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $S$  αν και μόνο αν

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x), \quad \forall x, y \in S$$

Και από το παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
z_k(y_k) &= f(x_k) + \nabla f(x_k)^T (y_k - x_k) \\
&\leq f(x_k) + \nabla f(x_k)^T (x_* - x_k) \\
&\leq f(x_*)
\end{aligned}$$

Όπου η ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της βέλτιστης λύσης στο πρόβλημα  $LP$ , η πρώτη ανισότητα από το γεγονός ότι το  $y_k$  επιλύει το  $LP$  πρόβλημα αλλά όχι απαραίτητα το  $x_*$ , και η δεύτερη ανισότητα από την κυρτότητα της συνάρτησης  $f$ . Έτσι, σε κάθε επανάληψη  $k$ ,

$$z_k(y_k) \leq f(x_*) \leq f(x_k)$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει όταν το  $x_k$  είναι μια εφικτή λύση. Στον αλγόριθμο Frank-Wolfe η τιμή της  $f$  μειώνεται μετά από κάθε επανάληψη, που σημαίνει ότι η ακολουθία  $\{f(x_k)\}$  μειώνεται αυστηρά μονοτονικά προς την  $f(x_*)$ , ενώ η ακολουθία  $\{z_k(y_k)\}$  προσεγγίζει την  $f(x_*)$ , από κάτω, αλλά όχι μονοτονικά απαραιτήτως. Γι αυτό τον λόγο πάντα έχουμε ένα διάστημα,  $[z_k(y_k), f(x_k)]$ , το οποίο περιλαμβάνει την βέλτιστη αντικειμενική τιμή. Μέσω αυτής της γνώσης, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κριτήριο τερματισμού του τύπου: Έστω  $\varepsilon > 0$  μία πρώτη τιμή η οποία επιλέγεται από ένα σχετικά αποδεκτό αντικειμενικό σφάλμα. Τότε «αν  $(f(x_k) - z_k(y_k))/|z_k(y_k)| \leq \varepsilon$ , τότε σταμάτα».

### 3.5 Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων και το Τίμημα της Αναρχίας

#### 3.5.1 Περιγραφή του μοντέλου

Η μοντελοποίηση ενός δικτύου κυκλοφορίας γίνεται χρησιμοποιώντας την θεωρία γραφημάτων. Το δίκτυο αναπαρίσταται με ένα κατευθυνόμενο γράφο  $G = (V, E)$ , που αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο κορυφών  $V$  καθώς και από ένα πεπερασμένο σύνολο (κατευθυνόμενων) ακμών  $E$ . Μία ακμή είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος διακριτών κορυφών, που κατευθύνεται από την πρώτη κορυφή, την λεγόμενη ουρά, στην δεύτερη κορυφή, την κεφαλή. Κάποιες φορές θα αναφέρονται οι κορυφές ως κόμβοι και οι ακμές ως σύνδεσμοι.[1]

Αρκετές κορυφές  $s_1, \dots, s_k$  θεωρούνται κορυφές-πηγές από τις οποίες προέρχεται η κυκλοφορία. Όλη η κυκλοφορία που ξεκινάει από την κορυφή-πηγή  $s_i$  προτίθεται να «ταξιδέψει» προς την αντίστοιχη κορυφή-προορισμού ή κορυφή-καταβόθρα. Πολύ συχνά ένα ζεύγος προέλευσης-προορισμού  $(s_i, t_i)$  αναφέρεται ως αγαθό  $i$ . Δύο αγαθά μπορούν να μοιραστούν κοινές κορυφές, αλλά δεν υπάρχει βλάβη της γενικότητας εάν υποτεθεί ότι δύο αγαθά δεν μπορούν να μοιραστούν και την ίδια πηγή και τον ίδιο προορισμό. Δίκτυο θα ονομάζεται ένας γράφος, ο οποίος θα αποτελείται από ένα ή περισσότερα ζεύγη προέλευσης-προορισμού. Ένα δίκτυο θα λέγεται ότι είναι «μονο-άγαθο» εάν έχει μόνο ένα ζεύγος προέλευσης-προορισμού, ενώ σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση θα λέγεται «πολυ-άγαθο». Το γράμμα  $G$  θα υποδηλώνει είτε ένα γράφο είτε κάποιο δίκτυο.[1]

«Μονοπάτι» είναι μία διαδρομή από την μία κορυφή στην άλλη, η οποία όμως δεν είναι κυκλική. Ονομάζεται περίπατος μία ακολουθία από ακμές στην οποία η ουρά κάθε ακμής μετά την πρώτη, ταυτίζεται με την κεφαλή της προηγούμενης. Ένας περίπατος είναι κλειστός όταν ξεκινάει και τελειώνει στην ίδια κορυφή. Ένας κλειστός περίπατος είναι κυκλικός εάν καμία κορυφή δεν ανήκει σε πάνω από δύο ακμές. Τότε ένα μονοπάτι είναι περίπατος που δεν περιλαμβάνει κάποιο κύκλο.

Ένα  $u - v$  μονοπάτι, είναι ένα μονοπάτι που ξεκινάει από την κορυφή  $u$  και τερματίζει στην κορυφή  $v$ . Για ένα δίκτυο  $G$ , το σύνολο  $P_i$  είναι το σύνολο των  $s_i - t_i$  μονοπατιών και ορίζεται  $P = \cup_i P_i$ . Για να αποφευχθούν κοινοτοπίες θα υποτεθεί ότι πάντα  $P_i \neq \emptyset$  για κάθε  $i$ . Μία ροή είναι ένα μη αρνητικό πραγματικό διάνυσμα (στο  $R$ ), με δείκτη  $P$ . Ορίζεται ως ροή  $f$ , το σύνολο των διαδρομών που επιλέγεται από ένα μεγάλο αριθμό χρηστών, και με το  $f_p$  να μετράει την ποσότητα των χρηστών που χρησιμοποιούν το μονοπάτι  $P$ . **Να σημειωθεί ότι κάθε χρήστης θεωρείται ότι ελέγχει ένα αμελητέο κλάσμα της συνολικής κυκλοφορίας.** [1]

Μία ροή  $f$ , επιφέρει μία ροή στις ακμές  $\{f_e\}_{e \in E}$ , όπου  $f_e = \sum_{P \in P: e \in p} f_p$  είναι η ποσότητα της ροής πάνω στα χρησιμοποιούμενα μονοπάτια στα οποία ανήκει η ακμή  $e$ . Αν μία ροή  $f$  επιφέρει την ροή  $\{f_e\}_{e \in E}$  σε ακμές, θα λέγεται κάποιες φορές ότι η ροή  $f$  είναι ένα μονοπάτι αποσύνθεσης της  $\{f_e\}_{e \in E}$ .

Μία ροή μπορεί να επιφέρει μία μοναδική ροή πάνω στις ακμές, όμως η ροή πάνω στις ακμές μπορεί να είναι αποτέλεσμα πολλών μονοπατιών αποσύνθεσης.[1]

Θα συσχετίζεται ένας πεπερασμένος και θετικός δείκτης κυκλοφορίας  $r_i$  με κάθε ζεύγος  $\{s_i, t_i\}$ , δηλαδή την ποσότητα της κυκλοφορίας που χρειάζεται να ταξιδέψει από την προέλευση  $s_i$  στον προορισμό  $t_i$ . Σε σχέση με ένα δίκτυο και ένα σύνολο  $r$  δεικτών κυκλοφορίας, μία ροή  $f$  θα λέγεται ότι είναι δυνατή αν για όλα τα  $i$ ,

$$\sum_{P \in P_i} f_p = r_i$$

Τα δίκτυα ενδιαφέροντος θα είναι δίκτυα στα οποία κάθε ακμή  $e \in E$  έχει ένα κόστος το οποίο εξαρτάται από την ποσότητα της κυκλοφορίας στην ακμή. Η συνάρτηση κόστους μίας ακμής  $e$  συμβολίζεται με  $c_e(\cdot)$ . Για κάθε ακμή  $e \in E$ , η συνάρτηση κόστους θα είναι μη αρνητική, συνεχής και αύξουσα. Ένα «στιγμιότυπο» θα ονομάζεται ένας τριπλούς της μορφής  $(G, r, c)$ , όπου  $G$  είναι ένα δίκτυο, και  $r$  και  $c$  είναι τα διανύσματα των δεικτών κυκλοφορίας και των συναρτήσεων κόστους, αντίστοιχα. [1]

Το κόστος σε ένα μονοπάτι  $P$  σε σχέση με μία ροή  $f$  ορίζεται ως το σύνολο του κόστους στις ακμές που ανήκουν στο μονοπάτι, και συμβολίζεται με:

$$c_P(f) = \sum_{e \in P} c_e(f_e) \quad (3.8)$$

Ορίζεται το κόστος  $C(f)$  μίας ροής  $f$  σε ένα στιγμιότυπο  $(G, r, c)$  ως το άθροισμα όλων των κοστών που προκύπτουν από την κυκλοφορία:

$$C(f) = \sum_{P \in P} c_P(f) f_P \quad (3.9)$$

Αθροίζοντας τις ακμές σε ένα μονοπάτι  $P$  και αλλάζοντας την σειρά του αθροίσματος, μπορεί να γραφτεί ξανά το δεξιό μέλος της ισότητας (2) προκύπτει:

$$\sum_{P \in P} c_P(f) f_P = \sum_{P \in P} \left( \sum_{e \in P} c_e(f_e) \right) f_P = \sum_{e \in E} \left( \sum_{P \in P: e \in P} f_P \right) c_e(f_e) = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e$$

Έτσι χρησιμοποιείται ένας εναλλακτικός ορισμός του κόστους μιας ροής  $f$  σε ένα στιγμιότυπο  $(G, r, c)$ :

$$C(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e \quad (3.10)$$

Το κόστος μιας ροής διαφέρει από το συνολικό κόστος της κυκλοφορίας κατά ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα που ισούται με το άθροισμα  $\sum_i r_i$  όλων των δεικτών κυκλοφορίας. Συνήθως θα χρησιμοποιείται το (συνολικό) κόστος διότι είναι πιο βολικό μέγεθος όταν αυξάνονται ή μειώνονται οι δείκτες κυκλοφορίας σε ένα δίκτυο. [1]

Μία εφικτή ροή  $f$  για ένα στιγμιότυπο  $(G, r, c)$  θα είναι βέλτιστη εάν ελαχιστοποιεί την  $C(f)$  στο σύνολο των εφικτών ροών. Μία τέτοια ροή πρέπει να υπάρχει, καθώς ο χώρος των εφικτών ροών είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του Ευκλείδιου χώρου και το κόστος  $C(\cdot)$  είναι συνεχής συνάρτηση. [1]

### 3.5.2 Ροές σε ισορροπία Nash

Στην ενότητα αυτή διατυπώνεται η έννοια της ισορροπίας στην αλγορίθμική θεωρία παιγνίων. Διαισθητικά, μία ροή δεν θα βρίσκεται σε ισορροπία αν κάποιο κομμάτι της κυκλοφορίας μπορεί να μειώσει το κόστος του αλλάζοντας μονοπάτι, ενώ διαφορετικά θα βρίσκεται σε ισορροπία. Στο παράδειγμα του Pigou (βλέπε εισαγωγή), εάν η κυκλοφορία μοιραστεί μισή σε κάθε ένα από τα 2 μονοπάτια τότε η ροή αυτή δεν βρίσκεται σε ισορροπία, καθώς εάν ένα μικρό ποσοστό της κυκλοφορίας αλλάξει μονοπάτι και μετακινηθεί από το πάνω στο κάτω τότε το κόστος για αυτό το μικρό ποσοστό θα μειωθεί, ενώ εάν όλη η κυκλοφορία επιλέξει το κάτω μονοπάτι κανένα ποσοστό της κυκλοφορίας δεν μπορεί να επωφεληθεί με το να αλλάξει μονοπάτι και να μεταφερθεί στο πάνω, και έτσι η ροή αυτή λέμε ότι βρίσκεται σε ισορροπία. [1]

Ειδικά, μία ροή βρίσκεται σε ισορροπία αν και μόνο αν όταν κάποιο κομμάτι της κυκλοφορίας αλλάζει μονοπάτια, το κόστος που επιφέρει το συγκεκριμένο κομμάτι μπορεί μόνο να αυξηθεί.

Αφού έχει γίνει η υπόθεση ότι όλοι οι χρήστες του δικτύου ελέγχουν ένα αμελητέα μικρό ποσοστό της συνολικής κυκλοφορίας, το ποσοστό της κυκλοφορίας που μπορεί να αλλάξει μονοπάτι μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρό. [1]

**Ορισμός 3.1** Μία εφικτή ροή  $f$  για ένα στιγμιότυπο  $(G, r, c)$  βρίσκεται σε ισορροπία Nash ή είναι ροή Nash, εάν για όλα τα αγαθά  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $s_i - t_i$  τα μονοπάτια  $P_1, P_2 \in P_i$  με  $f_{P_1} > 0$ , και τις ποσότητες  $\delta \in (0, f_{P_1}]$  της κυκλοφορίας στο  $P_1$  ισχύει:

$$c_{P_1}(f) \leq c_{P_2}(\tilde{f})$$

όπου η ροή  $\tilde{f}$  λαμβάνεται από την  $f$  μετακινώντας  $\delta$  μονάδες ροής από το μονοπάτι  $P_1$  στο μονοπάτι  $P_2$ :

$$\tilde{f}_P = \begin{cases} f_P - \delta & \text{if } P = P_1 \\ f_P + \delta & \text{if } P = P_2 \\ f_P & \text{if } P \notin \{P_1, P_2\} \end{cases}$$

Όταν το  $\delta$  τείνει στο 0, η συνέχεια και η μονοτονία των συναρτήσεων κόστους που έχουμε υποθέσει για τις ακμές δίνουν τον ακόλουθο χρήσιμο χαρακτηρισμό της ροής που βρίσκεται σε ισορροπία Nash. [1]

**Πρόταση 3.2** Μία εφικτή ροή  $f$  για το στιγμιότυπο  $(G, r, c)$ , βρίσκεται σε ισορροπία Nash αν και μόνο αν για κάθε  $i \in \{1, \dots, k\}$  και  $P_1, P_2 \in P_i$  με  $f_{P_1} > 0$

$$c_{P_1}(f) \leq c_{P_2}(f) \quad (3.11)$$

Εν συντομία, ο ορισμός 3.2 δηλώνει ότι σε μία ροή Nash, όλη η ροή «ταξιδεύει» σε μονοπάτια ελάχιστου κόστους. Και πιο συγκεκριμένα, σε μια ροή Nash όλα τα μονοπάτια ροής  $s_i - t_i$  ροής  $f$  έχουν ίσο κόστος μεταξύ τους. [1]

**Πόρισμα 3.3** Αν μία ροή βρίσκεται σε ισορροπία Nash για το  $(G, r, c)$ , τότε για κάθε αγαθό  $i$ , όλα τα μονοπάτια  $s_i - t_i$  ροής  $f$  έχουν κοινό κόστος  $c_i(f)$ .

Τότε χρησιμοποιείται την ισότητα (3.9) για να εκφραστεί το κόστος  $C(f)$  μιας ροής Nash σε μια ιδιαίτερα βολική μορφή. [1]

**Πρόταση 3.4** Εάν η  $f$  είναι μία ροή που βρίσκεται σε ισορροπία Nash για το στιγμιότυπο  $(G, r, c)$ . Και αν όλα τα μονοπάτια  $s_i - t_i$  ροής  $f$  έχουν κοινό κόστος  $c_i(f)$ .

Τότε,

$$C(f) = \sum_{i=1}^k c_i(f) r_i$$

**Πρόταση 3.5** Για κάθε στιγμιότυπο  $(G, r, c)$  υφίσταται μία ροή Nash

Ενώ για ένα στιγμιότυπο μπορούν να υφίστανται περισσότερες από μία ροές Nash, η επόμενη πρόταση δηλώνει ότι όλες οι ροές Nash για το ίδιο στιγμιότυπο έχουν το ίδιο κόστος. Αφού αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το κόστος των ροών, οι ροές Nash είναι κατ' ουσία μοναδικές και έτσι μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμες. [1]

**Πρόταση 3.6** Αν η  $f$  και η  $\tilde{f}$  είναι ροές Nash για ένα στιγμιότυπο  $(G, r, c)$ , τότε  $C(f) = C(\tilde{f})$

### 3.5.3 Το Τίμημα της Αναρχίας

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, το Τίμημα της Αναρχίας (Price of Anarchy) είναι ο λόγος μεταξύ του κόστος μιας ροής που βρίσκεται σε ισορροπία Nash και της βέλτιστης ροής.[1]

#### Ορισμός 3.7

**(a)** Έστω  $(G, r, c)$  ένα στιγμιότυπο για το οποίο υφίσταται μία βέλτιστη ροή  $f$  και μία ροή  $f$  που βρίσκεται σε ισορροπία Nash. Το τίμημα της αναρχίας του  $(G, r, c)$  συμβολίζεται με  $\rho(G, r, c)$  ορίζεται ως ο λόγος,

$$\rho(G, r, c) = \frac{C(f)}{C(f^*)}$$

**(β)** Αν  $I$  είναι ένα σύνολο από στιγμιότυπα, τότε το Τίμημα της Αναρχίας του  $I$  είναι

$$\rho(I) = \sup_{(G, r, c) \in I} \rho(G, r, c)$$

Αφού όλες οι ροές Nash ενός στιγμιότυπου έχουν το ίδιο κόστος (πρόταση 3.6), ο λόγος  $\rho(G, r, c)$  του ορισμού 3.7(a) ορίζεται υπό την προϋπόθεση ότι  $C(f^*) > 0$ . Αν  $f^*$  είναι μία ροή με μηδενικό κόστος, τότε  $c_P(f^*) = 0$  όποτε  $f_P^* > 0$ , και έτσι εύκολα εξάγεται ότι και η ροή  $f^*$  βρίσκεται επίσης σε ισορροπία Nash. Σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται το  $\rho(G, r, c)$  να είναι 1. Το Τίμημα της Αναρχίας μπορεί να οριστεί πολύ πιο γενικά. Η ιδέα αυτή έχει νόημα για κάθε εφαρμογή που διαθέτει μία αντικειμενική συνάρτηση και έχει νόημα η ιδέα της ισορροπίας. [1]

### 3.5.4 Χαρακτηρισμός των βέλτιστων ροών

Στην ενότητα αυτή θα διερευνηθούν οι ιδιότητες των βέλτιστων ροών, εκείνων δηλαδή που έχουν το ελάχιστο δυνατό κόστος. Θα υποτεθεί χάριν απλότητας ότι οι συναρτήσεις κόστους είναι συνεχής και διαφορίσιμες. Από τον δεύτερο ορισμό (σχέση (3.10)) του κόστους μιας ροής, μπορεί να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα της εύρεσης μίας βέλτιστης και εφικτής ροής για το στιγμιότυπο  $(G, r, c)$  ως το ακόλουθο μη γραμμικό πρόγραμμα:

$$\min \sum_{e \in E} h_e(f_e)$$

Όπου

$$(NLP) \quad \sum_{P \in P_i} f_P = r_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$f_e = \sum_{P \in P: e \in P} f_P \quad \forall e \in E$$

$$f_P \geq 0 \quad \forall P \in P$$

με  $h_e(f_e) = c_e(f_e)f_e$ . Στην πιο πάνω διατύπωση, εντοπίστηκε μία ροή εφικτή για το  $(G, r, c)$  σε ένα σημείο στον  $(|P| + |E|)$ -διάστατο Ευκλείδιο χώρο. Αφού λοιπόν οι ροές και τα σημεία αυτά έχουν μία φυσική μονοσήμαντη αντιστοιχία, δεν χρειάζεται να γίνει κάποιος διαχωρισμός των δύο εννοιών. Ακολουθώντας τη βασική ορολογία του μαθηματικού προγραμματισμού, θα ονομάσουμε την συνάρτηση  $\sum_{e \in E} h_e(f_e)$ , αντικειμενική συνάρτηση του  $(NLP)$ . Ομοίως, θα ονομαστούν τα σημεία του Ευκλείδιου χώρου που ικανοποιούν τους περιορισμούς του  $(NLP)$ , εφικτή περιοχή του  $(NLP)$ . Ακολούθως θα γίνει ο χαρακτηρισμός της βέλτιστης λύσης του  $(NLP)$ . Αυτό θα είναι σχετικά απαρτητικό, εάν εισαχθεί μία ελαφριά κυρτότητα στο μη γραμμικό πρόγραμμα  $(NLP)$ . Για να επιτευχθεί αυτό, θα πρέπει να δοθούν κάποιοι επιπλέον ορισμοί. Στα ακόλουθα,  $R$  και  $R^+$  συμβολίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών και το σύνολο των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών, αντίστοιχα. [1]

### Ορισμός 3.8

(α) Αν  $x$  και  $y$  είναι δύο σημεία στον Ευκλείδιο χώρο  $R^n$ , τότε ένας κυρτός συνδυασμός του  $x$  και  $y$ , είναι ένα σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ  $x$  και  $y$ , είναι δηλαδή της μορφής  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  για κάποια  $\lambda \in [0,1]$ .

(β) Ένα υποσύνολο  $S \in R^n$  είναι κυρτό εάν περιέχει όλους τους κυρτούς συνδυασμούς του, δηλαδή εάν τα  $x$  και  $y$  ανήκουν στο  $S$ , τότε και  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  για όλα  $\lambda \in [0,1]$ .

(γ) Μία συνάρτηση  $h: S \rightarrow R$  ορισμένη σε ένα κυρτό υποσύνολο  $S$  του Ευκλείδιου χώρου είναι κυρτή, αν όλα τα ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ δύο σημείων πάνω στο γράφο  $h$  βρίσκονται πάνω από τον γράφο:

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y) \quad (3.12)$$

για όλα τα  $x, y \in S$  και  $\lambda \in [0,1]$ .

(δ) Μία συνάρτηση  $c: R^+ \rightarrow R^+$  είναι ημικυρτή εάν η συνάρτηση  $x.c(x)$  είναι κυρτή.

Τα (α)-(γ) (πιο πάνω) του ορισμού 3.8 ισχύουν πάντα. Το (δ) δεν ισχύει πάντα. Κάθε δύο φορές διαφορίσιμη συνάρτηση με μη αρνητική δεύτερη παράγωγο είναι κυρτή, έτσι ένα παράδειγμα κυρτής συνάρτησης στον πραγματικό χώρο είναι οι πολυωνυμικές με μη αρνητικούς συντελεστές. Εδώ θα γίνει η υπόθεση ότι οι συναρτήσεις κόστους που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι ημι-κυρτές. Υπό αυτή την υπόθεση, εξάγεται εύκολα ότι το κόστος  $C(\cdot)$  είναι μία κυρτή συνάρτηση σύμφωνα με τον ορισμό 3.8 (γ). [1]

Επίσης η εφικτή περιοχή του ( $NLP$ ) είναι τομή μισών χώρων και γι' αυτό είναι κυρτή. Το μη γραμμικό πρόγραμμα ( $NLP$ ) είναι λοιπόν ένα κυρτό πρόγραμμα όταν όλες οι συναρτήσεις κόστους είναι ημι-κυρτές. [1]

Ακολουθεί ένας σημαντικός χαρακτηρισμός της βέλτιστης λύσης του ( $NLP$ ) όταν η αντικειμενική συνάρτηση είναι συνεχής, διαφορίσιμη και κυρτή. Θα χρησιμοποιηθούν οι όροι  $h'_e$  που ισούται με την παράγωγο  $\frac{d}{dx} h_e(x)$  του  $h_e$  και  $h'_P(f)$  που ισούται με  $\sum_{e \in P} h'_e(f_e)$ . [1]

**Πρόταση 3.9** Έστω ότι η  $f^*$  είναι μία εφικτή λύση σε ένα μη γραμμικό πρόβλημα της μορφής ( $NLP$ ) στο οποίο κάθε συνάρτηση  $h_e$  είναι συνεχής, διαφορίσιμη και κυρτή. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η ροή  $f^*$  είναι βέλτιστη.

(β) Για κάθε  $i \in \{1, \dots, k\}$  και  $P_1, P_2 \in P_i$  με  $f_{P_1}^* > 0$

$$h'_{P_1}(f^*) \leq h'_{P_2}(f^*)$$

(γ) Για κάθε εφικτή ροή  $f$ ,

$$\sum_{P \in P} h'_P(f^*) f_P^* \leq \sum_{P \in P} h'_P(f^*) f_P$$

(δ) Για κάθε εφικτή ροή  $f$ ,

$$\sum_{e \in E} h'_e(f_e^*) f_e^* \leq \sum_{e \in E} h'_e(f_e^*) f_e$$

### Απόδειξη

Οι προτάσεις (γ) και (δ) είναι ισοδύναμες από την ίδια αντιστροφή των αθροίσεων που εισήγαγε την ισοδυναμία των δύο ορισμών του κόστους (3.8) και (3.9). Για να δειχθεί ότι οι προτάσεις (β) και (γ) είναι ισοδύναμες, ορίζεται η συνάρτηση  $H$ ,

$$H(f) = \sum_{P \in P} h'_P(f^*) f_P$$

Αφού η  $f^*$  είναι σταθερή,  $H(f)$  είναι το κόστος της ροής  $f$  όπου το κόστος σε κάθε μονοπάτι  $P$  είναι η ανεξάρτητη της συμφόρησης σταθερά  $h'_P(f^*)$ . Πρέπει να γίνει ξεκάθαρο ότι η  $H$  ελαχιστοποιείται ακριβώς από τις εφικτές ροές που δρομολογούν, για κάθε  $i$ , όλη την ροή του αγαθού  $i$  στα μονοπάτια  $s_i - t_i$  που ελαχιστοποιούν την  $h'_P(f^*)$  για όλα αυτά τα μονοπάτια. Έτσι, η  $H(f^*)$  ελαχιστοποιεί την  $H$  για όλες τις εφικτές ροές, και έτσι η (γ) ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει η (β). [1]

Η απόδειξη τελειώνει δείχνοντας ότι η ιδιότητα (α) συνεπάγεται την ιδιότητα (β) και ότι η ιδιότητα (δ) συνεπάγεται την (α). Για να δειχθεί ο πρώτος ισχυρισμός, υποθέτουμε ότι  $f^*$  είναι μία βέλτιστη ροή, και έστω ένα  $s_i - t_i$  μονοπάτι  $P_1 \in P_i$  με  $f_{P_1}^* > 0$  και ένα άλλο  $s_i - t_i$  μονοπάτι  $P_2 \in P_i$ . Αφού κάθε συνάρτηση  $h_e$  είναι συνεχής και διαφορίσιμη, μεταφέροντας μία μικρή ποσότητα ροής  $\lambda \in (0, f_{P_1}^*)$  από το  $P_1$  στο  $P_2$  αποδίδει μία εφικτή ροή με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης ίσης με:

$$\sum_{e \in E} h_e(f_e^*) + \lambda \left[ \sum_{e \in P_2} h'_e(f_e^*) - \sum_{e \in P_1} h'_e(f_e^*) \right] \quad (3.13)$$

Συν ένα όρο σφάλματος ο οποίος τείνει στο 0 όσο  $\lambda \downarrow 0$ . Αυτή η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν μπορεί να είναι μικρότερη από αυτή της βέλτιστης ροής  $f^*$ , η οποία είναι  $\sum_{e \in E} h_e(f_e^*)$ . [1]

Όταν το λ είναι επαρκώς μικρό, η εκτίμηση στην (3.13) είναι αρκετά έντονη ώστε να εξαχθεί ότι το  $h'_{P_1}(f^*)$  δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το  $h'_{P_2}(f^*)$ . Έτσι, η ιδιότητα (β) ισχύει.

Εν κατακλείδι, χρησιμοποιώντας την υπόθεση της κυρτότητας θα δειχθεί ότι η συνθήκη (δ) συνεπάγεται της συνθήκης (α). Ας υποθέσουμε ότι η  $f^*$  ικανοποιεί την ιδιότητα (δ), και έστω ότι η  $f$  είναι μία εφικτή ροή. Αφού κάθε συνάρτηση  $h_e$  είναι κυρτή, μπορεί να μειωθεί το όριο της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης μέσω μιας γραμμικής προσέγγισης της αντικειμενικής συνάρτησης στο  $f^*$ :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} h_e(f_e) &\geq \sum_{e \in E} [h_e(f_e^*) + h'_e(f_e^*)(f_e - f_e^*)] \\ &= \sum_{e \in E} [h_e(f_e^*) + \sum_{e \in E} h'_e(f_e^*)(f_e - f_e^*)] \quad (3.14) \end{aligned}$$

Από υπόθεση, η  $f^*$  ικανοποιεί την ιδιότητα (δ) και έτσι ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος της ανισότητας είναι μη αρνητικός. Έτσι έχουμε ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της  $f$  είναι τουλάχιστον αυτή της  $f^*$ . Αφού η  $f$  ήταν αυθαίρετη, η  $f^*$  είναι βέλτιστη ροή. Υπάρχει μία εντυπωσιακή ομοιότητα μεταξύ της πρότασης 3.9 (β), η οποία χαρακτηρίζει της βέλτιστες λύσεις των κυρτών προβλημάτων της μορφής (*NLP*), και της πρότασης 3.2, η οποία χαρακτηρίζει τις ροές που βρίσκονται σε ισορροπία Nash.

Αυτή η ομοιότητα προσφέρει μία χρήσιμη ερμηνεία για μία βέλτιστη ροή:

**οι βέλτιστες και οι ροές Nash είναι το ίδιο πράγμα, απλά με διαφορετικές συναρτήσεις κόστους.** [1]

Για να γίνει η παραπάνω σχέση πιο ακριβής, απαιτείται ένας ακόμη ορισμός.

**Ορισμός 3.9** Αν η  $c$  είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση κόστους, τότε η αντίστοιχη συνάρτηση οριακού κόστους  $c^*$  (marginal cost function) ορίζεται από την σχέση:

$$c^* = \frac{d}{dx}(x.c(x)) \quad (3.15)$$

### Πόρισμα 3.10

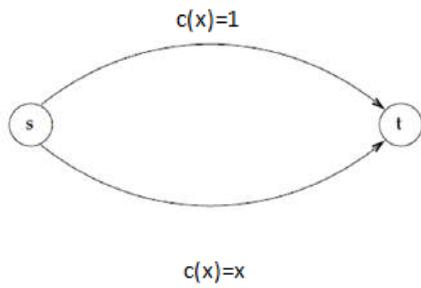
Έστω ένα στιγμιότυπο  $(G, r, c)$  με συνεχής, διαφορίσιμες και ημικυρτές συναρτήσεις με αντίστοιχες συναρτήσεις οριακού κόστους  $c^*$ . Τότε, μία ροή  $f$  εφικτή για το  $(G, r, c)$  είναι βέλτιστη, αν και μόνο αν βρίσκεται σε ισορροπία Nash για το στιγμιότυπο  $(G, r, c^*)$ . [1]

Οι συναρτήσεις οριακού κόστους έχουν μία ελκυστική και κλασσική οικονομική ερμηνεία. Η εξίσωση (3.15) του ορισμού 3.9 μιας συνάρτησης οριακού κόστους  $c^*$  συνεπάγεται ότι  $c^*(x) = c(x) + x \cdot c'(x)$ .

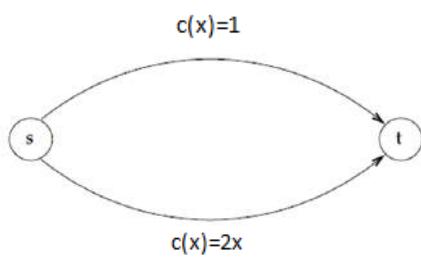
#### 3.5.5 Διάφορα ενδιαφέροντα παραδείγματα

##### α) Το παράδειγμα του Pigou

Στο παράδειγμα του Pigou (Pigou's example), έχουμε ένα δίκτυο με δύο κόμβους, τον  $s$  και τον  $t$ , και 2 παράλληλες ακμές με συναρτήσεις κόστους  $c(x) = 1$  και  $c(x) = x$ , καθώς και δείκτη κυκλοφορίας 1. Να σημειωθεί ότι αυτές οι συναρτήσεις είναι ημικυρτές σύμφωνα με τον ορισμό 3.8 (δ).



Εικόνα 11: Pigou's Example-Συναρτήσεις κόστους



Εικόνα 12: Pigou's Example-Συναρτήσεις οριακού κόστους

Εάν σταλεί όλη η κυκλοφορία από τον κάτω σύνδεσμο (Εικόνα 11-πιο πάνω), τότε τα κόστη των 2 διαθέσιμων  $s - t$  μονοπατιών εξισώνονται στο 1, και έτσι από την πρόταση 3.2 έχουμε ότι η ροή  $f$  βρίσκεται σε ισορροπία Nash. Από ισότητα (3.9) ή (3.10), το κόστος  $C(f)$  της  $f$  είναι 1.

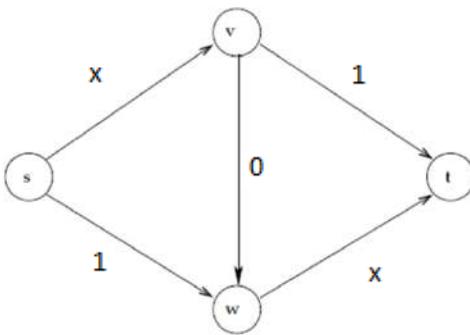
Οι συναρτήσεις οριακού κόστους του δικτύου είναι  $C(x) = 1$  και  $C(x) = 2x$ , όπως φαίνεται στην εικόνα 12. Στέλνοντας την μισή κυκλοφορία σε κάθε σύνδεσμο, εξισώνονται τα οριακά κόστη των 2,  $s - t$  μονοπατιών στο 1, και έτσι από πόρισμα 3.10 η  $f$  είναι βέλτιστη ροή  $f^*$ . Από σχέσεις (3.9) ή (3.10) το κόστος της  $f^*$  είναι:

$$C(f^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

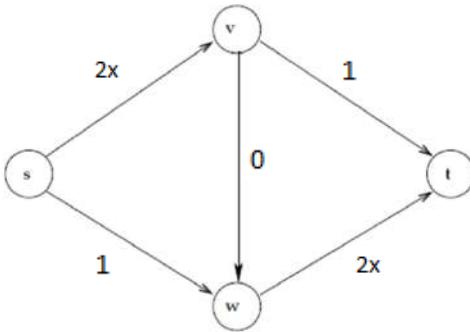
Και έτσι το τίμημα της αναρχίας στο παράδειγμα του Pigou είναι  $\frac{4}{3}$ . [1]

### β) Το παράδοξο του Braess (Braess's Paradox)

Θα μελετηθεί ξανά το παράδοξο του Braess αφότου προστεθεί μία ακμή μηδενικού κόστους (βλέπε εισαγωγή). Ορίζοντας τον δείκτη κυκλοφορίας στο 1, βλέπουμε ότι αν η ροή  $f$ , σταλεί όλη από το μονοπάτι  $s \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow t$ , εξισώνονται τα κόστη των τριών μονοπατιών  $s - t$  στο 2, και έτσι, από την πρόταση 3.2, η  $f$  βρίσκεται σε ισορροπία Nash με κόστος  $C(f) = 2$ . Χρησιμοποιώντας τώρα τις συναρτήσεις οριακού κόστους, όπως φαίνεται στην εικόνα 14, βρίσκουμε ότι η ροή  $f^*$  που μοιράζει την κυκλοφορία μισή σε κάθε ένα από τα μονοπάτια  $s \rightarrow v \rightarrow t$  και  $s \rightarrow w \rightarrow t$ , εξισώνει τα οριακά κόστη των τριών  $s \rightarrow t$  μονοπατιών στο 2, και έτσι από πόρισμα 3.10, η ροή είναι βέλτιστη. Το κόστος  $C(f^*)$  της  $f^*$  είναι  $\frac{3}{2}$ , και το τίμημα της αναρχίας είναι και πάλι  $\frac{4}{3}$ . [1]



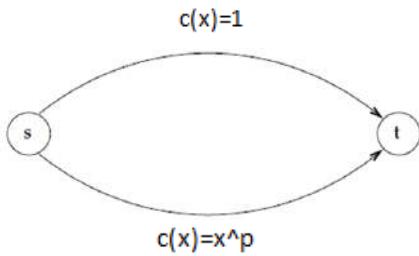
Εικόνα 13: Braess's Paradox-Συναρτήσεις κόστους



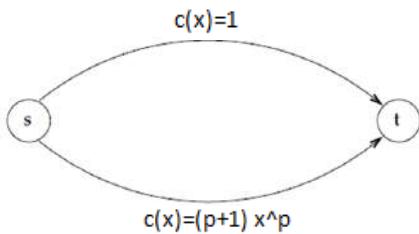
Εικόνα 14: Braess's Paradox-Συναρτήσεις οριακού κόστους

### γ) Το παράδειγμα του Pigou με μη γραμμική συνάρτηση κόστους

Έστω το τροποποιημένο παράδειγμα του Pigou (Nonlinear Pigou's Example) το οποίο προκύπτει αντικαθιστώντας την γραμμική συνάρτηση κόστους  $c(x) = x$  με την εξαιρετικά μη γραμμική  $c(x) = x^p$ , όπου  $p$  ένας μεγάλος αριθμός (εικόνα 3.8(a)). Με τον συνήθη δείκτη κυκλοφορίας στο 1, η ροή Nash είναι η ίδια με το απλό παράδειγμα του Pigou (γραμμική συνάρτηση κόστους-πιο πάνω): για κάθε  $p$ , όλη η κυκλοφορία πηγαίνει στον κάτω σύνδεσμο και αποφέρει μία μονάδα κόστους. Από την άλλη, η διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων κόστους, που φαίνονται στην εικόνα 15, και των συναρτήσεων οριακού κόστους, που φαίνονται στην εικόνα 16, είναι τώρα πολύ μεγαλύτερη.



Εικόνα 15: Nonlinear Pigou's Example-Συναρτήσεις κόστους



Εικόνα 16: Nonlinear Pigou's Example-Συναρτήσεις οριακού κόστους

Η ροή  $f^*$  που δρομολογεί  $(p + 1)^{-1/p}$  μονάδες κυκλοφορίας στον πάνω σύνδεσμο και τις υπόλοιπες στον κάτω, εξισώνει τα οριακά κόστη των δύο συνδέσμων στο 1 και έτσι είναι βέλτιστη.

Το κόστος  $C(f^*)$  της  $f^*$  είναι

$$1 - p \cdot (p + 1)^{-(p+1)/p}$$

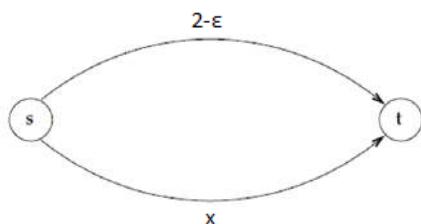
το οποίο τείνει στο 0 όσο το  $p \rightarrow \infty$ . Έτσι, αν επιτρέπονται αυθαίρετες συναρτήσεις κόστους, χωρίς κάποιο περιορισμό στο  $p$ , το τίμημα της αναρχίας που οφείλεται στην εγωιστική δρομολόγηση μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλο. [1]

## Σχόλιο

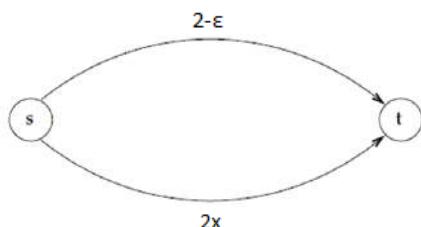
Στα παραπάνω παραδείγματα, η βέλτιστη ισορροπία ήταν κατά πολύ ανώτερη των ισορροπιών Nash. Δεν επιτεύχθηκε μόνο μικρότερο συνολικό κόστος αλλά και όλη η κυκλοφορία έχει τουλάχιστον το ίδιο επίπεδο ευημερίας με την ροή Nash. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στην καλή τύχη και όχι σε κάτι βαθύτερο μαθηματικά.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι για την επίτευξη μιας βέλτιστης ροής μπορεί να «θυσιαστεί» ένα κομμάτι της κυκλοφορίας και να σταλεί σε μονοπάτια με μεγαλύτερο κόστος από ότι στην ροή Nash, με σκοπό την μείωση του συνολικού κόστους. [1]

### β) Η «αδικία» των βέλτιστων ροών



Εικόνα 17: Unfairness of Optimal Flows-Συναρτήσεις κόστους



Εικόνα 18: Unfairness of Optimal Flows-Συναρτήσεις οριακού κόστους

Έστω μίας ήσσονος σημασίας τροποποίηση στο παράδειγμα του Rigou, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.9(α), όπου η συνάρτηση κόστους  $c(x) = 1$  αντικαθίσταται από την συνάρτηση κόστους  $c(x) = 2 - \varepsilon$ , όπου  $\varepsilon$  μία μικρή θετική σταθερά  $\varepsilon > 0$  (εικόνα 18). Ο δείκτης κυκλοφορίας  $r$  είναι 1.

Στην ροή που βρίσκεται σε ισορροπία Nash, όλη η κυκλοφορία δρομολογείται στον κάτω σύνδεσμο και υπόκειται σε μία μονάδα κόστους. Στην βέλτιστη ροή όμως, μόνο  $1 - \varepsilon/2$  μονάδες κυκλοφορίας δρομολογούνται στον κάτω σύνδεσμο- με το υπόλοιπο  $\varepsilon/2$  στον πάνω σύνδεσμο, εξισώνοντας έτσι τα οριακά κόστη των 2 ακμών στο  $2 - \varepsilon$ . [1]

Διαισθητικά, λοιπόν γίνεται κατανοητό ότι ένα μικρό ποσοστό της κυκλοφορίας «θυσιάζεται» και «στέλνεται» στην «αργή» πάνω ακμή με σκοπό μία μικρή μείωση του κόστους που βιώνει η συντριπτική πλειοψηφία των χρηστών του δικτύου. [1]

### 3.6 Συναρτήσεις κόστους και μακροσκοπική προσομοίωση

Η αντίσταση που σχετίζεται με μία μετακίνηση (από την προέλευση στον προορισμό) δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται εν μέρει από το ποσοστό χρήσης του μεταφορικού δικτύου. Η αντίσταση αυτή σε κάθε μία από τις διαδρομές που συνδέουν μία προέλευση με ένα προορισμό είναι συνάρτηση της κυκλοφοριακής συμφόρησης. Η συμφόρηση αυξάνεται με την αύξηση της κυκλοφορίας και ο αριθμός των μετακινήσεων αποθαρρύνεται από το επίπεδο της συμφόρησης. Η αντίσταση που σχετίζεται με τους συνδέσμους που αναπαριστούν ένα κυκλοφοριακό δίκτυο, μπορεί να έχει πολλές συνιστώσες, όπως τον χρόνο μετακίνησης, την ασφάλεια, το κόστος μετακίνησης κ.α. Η πιο κοινή “αναπαράσταση” αυτής της αντίστασης είναι ο χρόνος μετακίνησης, καθώς πολλές έρευνες έχουν δείξει πως είναι η κύρια συνιστώσα που επηρεάζει τις επιλογές των χρηστών και κατ’ επέκταση την κυκλοφοριακή ροή. Επιπροσθέτως, είναι πιο εύκολο να μετρηθεί σε σχέση με τις υπόλοιπες συνιστώσες. Ο χρόνος μετακίνησης είναι ένα ουσιώδες στοιχείο στο σχεδιασμό των μεταφορικών συστημάτων, διότι οι οδηγοί διαλέγουν τις διαδρομές για να φτάσουν στον προορισμό τους με βάση αυτόν. Ο χρόνος μετακίνησης στα κυκλοφοριακά δίκτυα είναι αύξουσα συνάρτηση της κυκλοφοριακής ροής. Η τυπική αναπαράσταση της αντίστασης που παρουσιάζει κάθε σύνδεσμος με όρους χρόνου μετακίνησης γίνεται με την χρήση των συναρτήσεων όγκου-καθυστέρησης (Volume Delay Functions-VDFs).

Αυτές οι συναρτήσεις κόστους είναι από τα πιο σημαντικά «συστατικά» των μοντέλων του καταμερισμού της κυκλοφορίας στο δίκτυο με την αρχή της ισορροπίας, οι οποίες επηρεάζουν τον όγκο της κυκλοφορίας στα διάφορα τμήματα του οδικού δικτύου. Εκφράζουν γενικά τον χρόνο μετακίνησης σε ένα σύνδεσμο, συναρτήσει του κυκλοφοριακού φόρτου στον ίδιο σύνδεσμο. [45][46][47]

### 3.6.1 Μαθηματική μορφή

Συνήθως οι συναρτήσεις κόστους (VDFs) εκφράζονται ως εξής:

$$t(V) = t_0 \times f\left(\frac{V}{C}\right)$$

όπου  $t_0$  – χρόνος ελεύθερης ροής

$V$  – όγκος κυκλοφορίας

$C$  – ικανότητα

Η συνάρτηση  $f$  πρέπει να διέπεται από κάποιες ιδιότητες, κυρίως μαθηματικές.[17][19]

Από μαθηματική σκοπιά, και έχοντας υπόψη την 2<sup>η</sup> αρχή (Ισορροπία Συστήματος), η συνάρτηση πρέπει να είναι:

- Συνεχής
- Γνησίως αύξουσα
- Μη αρνητική

### 3.6.2 Προϋποθέσεις για μια «καλή» συνάρτηση κόστους

Αυτές είναι οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συναρτήσεις-VDF [48]:

1.  $f(x)$  πρέπει να είναι γνησίως αύξουσα. Απαραίτητη συνθήκη για να συγκλίνει ο καταμερισμός της κυκλοφορίας στο δίκτυο σε μία μοναδική λύση.

2.  $f(0) = 1$ , έτσι για μηδενικό όγκο κυκλοφορίας η ταχύτητα μετακίνησης ισούται με την ταχύτητα ελεύθερης ροής.
3.  $f'(x)$  ορίζεται και είναι γνησίως αύξουσα. Αυτό διασφαλίζει την κυρτότητα της συνάρτησης κόστους – μία όχι τόσο απαραίτητη, όσο επιθυμητή ιδιότητα.
4.  $f'(1) = \beta$ , όπου  $\beta$  είναι η παράμετρος η οποία καθορίζει πόσο ξαφνικά-αιφνίδια τα φαινόμενα συμφόρησης αλλάζουν όταν φτάσουμε την ικανότητα.
5.  $f'(x) < M \cdot \beta$ , όπου  $M$  μία θετική σταθερά. Η κλίση της καμπύλης συμφόρησης είναι περιορισμένη. Αυτό με την σειρά του περιορίζει τις τιμές των VDFs με τέτοιο τρόπο ώστε να μην φτάνουν σε πολύ μεγάλες τιμές για τιμές του λόγου  $v/c$  μεγαλύτερες του 1.
6.  $f'(0) > 0$ . Αυτή η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει την μοναδικότητα του όγκου κυκλοφορίας στους συνδέσμους του δικτύου. Επίσης καθιστά τον καταμερισμό σταθερό όσον αφορά μικρά λάθη κωδικοποίησης στους χρόνους μετακίνησης και διανέμει την κυκλοφορία σε ανταγωνιστικά μη κορεσμένα μονοπάτια ανάλογα με την ικανότητά τους.

### 3.6.3 Η συνάρτηση κόστους Bureau of Public Roads

Η πιο γνωστή και ευρέως χρησιμοποιημένη VDF συνάρτηση είναι η Bureau of Public Roads (BPR-Volume Delay Function). Η πρότυπη καμπύλη BPR προέκυψε στα τέλη της δεκαετίας του 1960 από το ινστιτούτο BPR (σήμερα FHWA) [49], προσαρμόζοντας μία πολυωνυμική εξίσωση στις καμπύλες ταχύτητας-ροής αυτοκινητοδρόμων (freeway speed-flow curves) το 1965. [50] Ο χρόνος μετακίνησης θεωρείται ότι έχει μη γραμμική σχέση με τον λόγο  $v/c$ . Η απλή μαθηματική μορφή της και οι ελάχιστες απαιτήσεις δεδομένων εισόδου είναι τα δύο κύρια χαρακτηριστικά που έχουν οδηγήσει στην εκτενή χρήση της.

Η βασική συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^\beta\right) \quad (3.16)$$

και

$$f^{BPR}(x) = 1 + \alpha \cdot x^\beta$$

όπου

$T$  = χρόνος μετακίνησης

$T_0$  = χρόνος μετακίνησης σε ελεύθερη ροή

$\nu$  = όγκος κυκλοφορίας

$c$  = πρακτική ικανότητα (πολύ συχνά προσαρμόζεται στον λόγο  $(\frac{\text{green time}}{\text{cycle length}})$ )

$\alpha, \beta$  = παράμετροι

Σημείωση:  $\frac{\nu}{c}$  συμβολίζεται και απλουστευτικά  $x$

Στην συνάρτηση BPR, θεωρείται ότι ο συντελεστής  $\alpha$  (συχνά  $\alpha = 0,15$ ) είναι ο λόγος του χρόνου μετακίνησης στην μονάδα της απόστασης στην πρακτική ικανότητα προς τον αντίστοιχο χρόνο σε συνθήκες ελεύθερης ροής, και η παράμετρος  $\beta$  (συχνά  $\beta = 4$ ) καθορίζει πόσο γρήγορα η εκτιμώμενη μέση ταχύτητα συνδέσμου, ως συνάρτηση του  $x$ , μειώνεται από ελεύθερης ροής στην αντίστοιχη σε συνθήκες συμφόρησης. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του  $\beta$ , η εμφάνιση των αποτελεσμάτων της συμφόρησης γίνεται όλο και πιο ξαφνικά-αιφνίδια.[51]

✓ **Έλεγχος προϋποθέσεων καλής συνάρτησης για την συνάρτηση BPR**

1. Η  $f^{BPR}$  ορίζεται ως εξής:

$$f^{BPR}(x) = 1 + a \cdot x^\beta$$

Για να δειχθεί ότι η  $f^{BPR}$  είναι γνησίως αύξουσα, πρέπει η πρώτη παράγωγος της  $f^{BPR}$  να είναι μεγαλύτερη του 0, δηλαδή  $f^{BPR}' > 0$ .

Έστω ότι  $\beta \in R^+$  τότε:

$$f^{BPR}(x) = 1 + a \cdot x^\beta = 1 + a \cdot e^{\ln(x)\beta} = 1 + a \cdot e^{\beta \cdot \ln(x)}$$

$$f^{BPR'}(x) = a \cdot e^{\beta \cdot \ln(x)} \cdot (\beta \cdot \ln(x))' = a \cdot e^{\beta \cdot \ln(x)} \cdot \frac{\beta}{x}$$

Η ποσότητα  $\frac{a \cdot \beta \cdot e^{\beta \cdot \ln(x)}}{x} > 0$ , αφού  $x > 0$  και άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα,  
 $f \uparrow$ .

$$2. \quad f^{BPR}(0) = 1 + a \cdot (0)^\beta = 1 + 0 = 1 \Rightarrow f^{BPR}(0) = 1$$

3. Από το 1. προφανώς η  $f^{BPR}'$  ορίζεται. Για να δειχθεί ότι η  $f^{BPR}'$  είναι γνησίως αύξουσα, πρέπει η δεύτερη παράγωγος της  $f^{BPR}$  να είναι μεγαλύτερη του 0, δηλαδή  $f^{BPR''} > 0$ .

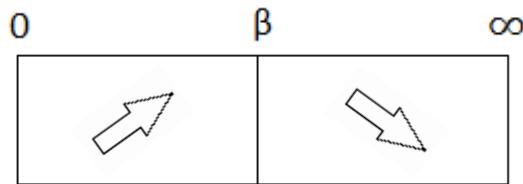
$$f^{BPR''}(x) = a \cdot \beta \cdot \left( \frac{(e^{\beta \cdot \ln(x)})' \cdot x - e^{\beta \cdot \ln(x)} \cdot x'}{x^2} \right) =$$

$$= a \cdot \beta \cdot \left( \frac{e^{\beta \cdot \ln(x)} \cdot \frac{\beta}{x} - e^{\beta \cdot \ln(x)}}{x^2} \right) =$$

$$= \frac{a \cdot \beta \cdot e^{\beta \cdot \ln(x)}}{x^2} \cdot \left( \frac{\beta}{x} - 1 \right)$$

Η ποσότητα  $\frac{a \cdot \beta \cdot e^{\beta \cdot \ln(x)}}{x^2} > 0$  οπότε πρέπει να ελεγχθεί η ποσότητα  $\frac{\beta}{x} - 1$  για ποια  $x$  είναι  $> 0$ .

$$\frac{\beta}{x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{\beta}{x} > 1 \Rightarrow \beta > x$$



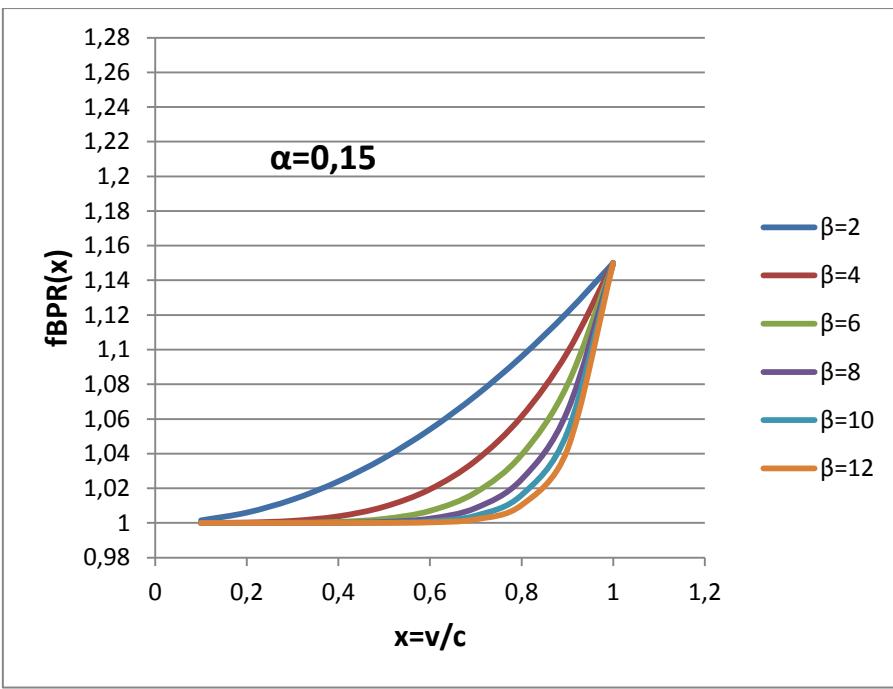
οπότε η  $f^{BPR''} > 0$  για  $x < \beta$ . Για τις συνήθεις τιμές του  $x$  και του  $\beta$  ισχύει ότι  $f^{BPR'} \uparrow$ , γνησίως αύξουσα.

$$4. \quad f^{BPR'}(1) = a \cdot e^{\beta \cdot \ln(1)} \cdot \frac{\beta}{1} = \alpha \cdot \beta \text{ και για } \alpha = 1 \text{ προκύπτει ότι } f^{BPR'}(1) = \beta$$

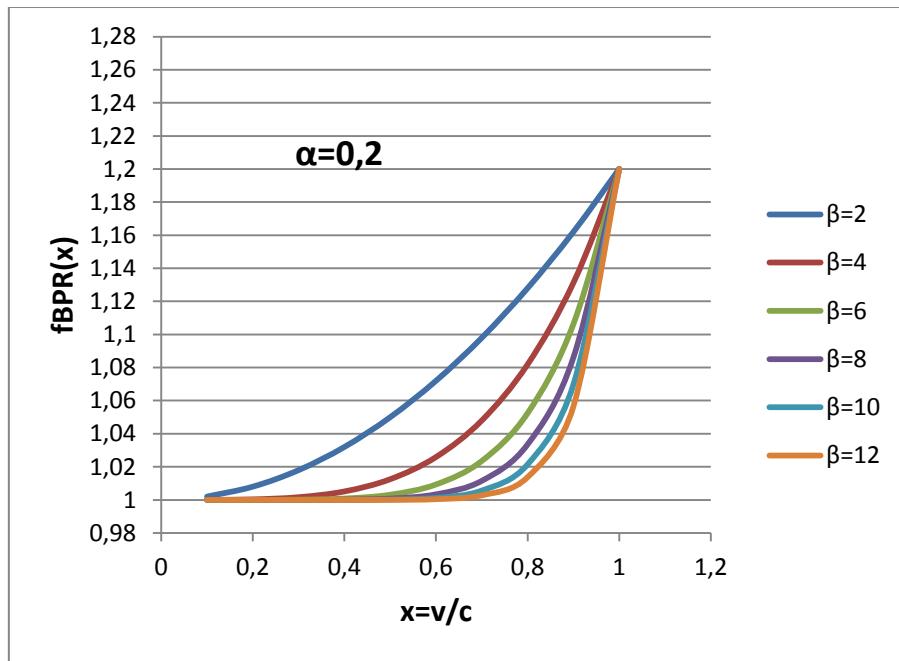
Τα 5 και 6 δεν ισχύουν για την συνάρτηση BPR.

#### **Μειονεκτήματα των BPR συναρτήσεων με μεγάλες τιμές του $\beta$ :**

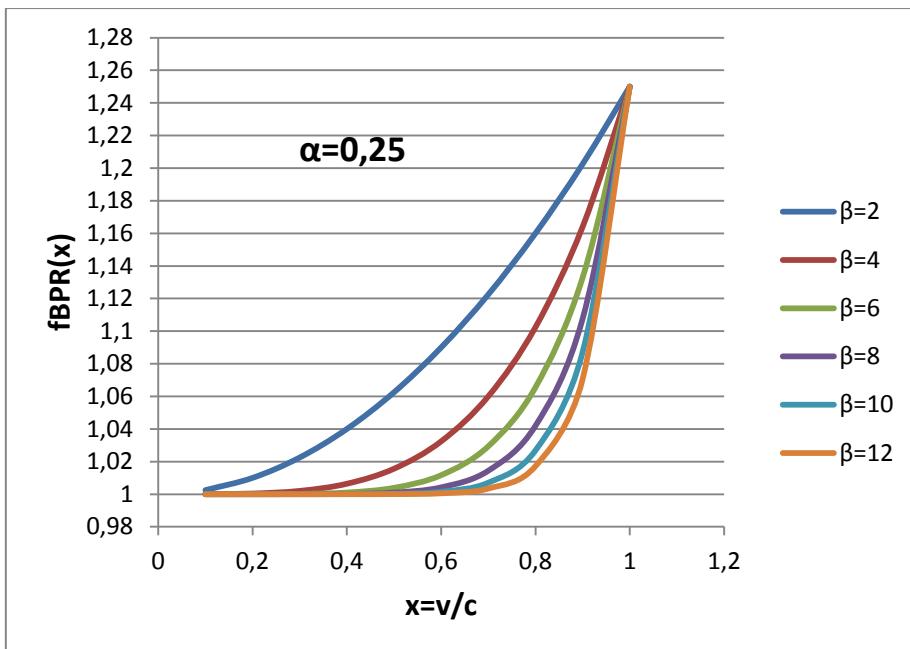
1. Ενώ για ένα ρεαλιστικό σύνολο όγκων κυκλοφορίας, μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι  $v/c \leq 1$  (ή τουλάχιστον λίγο μεγαλύτερο του 1), παρατηρείται ότι στις πρώτες επαναλήψεις του καταμερισμού της κυκλοφορίας στο δίκτυο με την ισορροπία χρήστη δεν συμβαίνει αυτό και ο λόγος  $v/c$  μπορεί να φτάσει ακόμα 3 μέχρι 5 ή και περισσότερο. Δηλαδή ο χρόνος για να διανυθεί ένα σύνδεσμος σε συνθήκες ελεύθερης ροής, για παράδειγμα, με  $\alpha=0,2$  και  $\beta=12$  και με λόγο  $v/c = 3$  αυξάνεται κατά ένα παράγοντα  $1 + 0,2 \times 3^{12} = 106.289$ , που σημαίνει ότι ο χρόνος μετακίνησης σε συνθήκες ελεύθερης ροής για κάθε λεπτό γίνεται 74 μέρες χρόνου συμφόρησης. Αυτές οι ανωμαλίες επιβραδύνουν κατά πολύ τη σύγκλιση δίνοντας βαρύτητα στις υπερφορτωμένες συνδέσεις με μεγάλες τιμές του  $\beta$  και μπορεί επίσης να προκαλέσει αριθμητικά προβλήματα και απώλεια ακρίβειας.



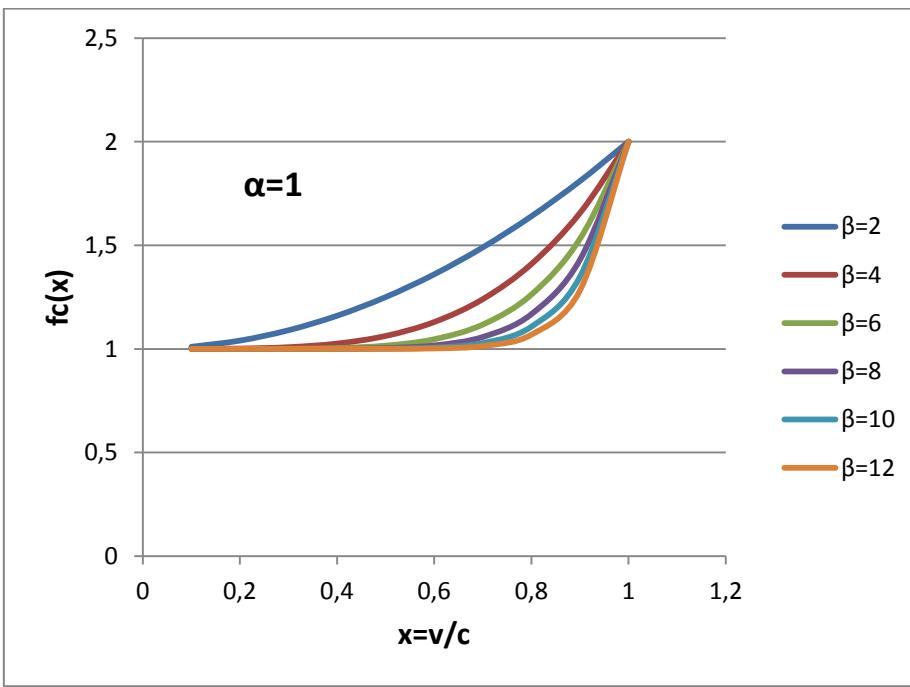
Διάγραμμα 1: Συνάρτηση BPR για μικρούς λόγους  $v/c$  και  $\alpha=0,15$



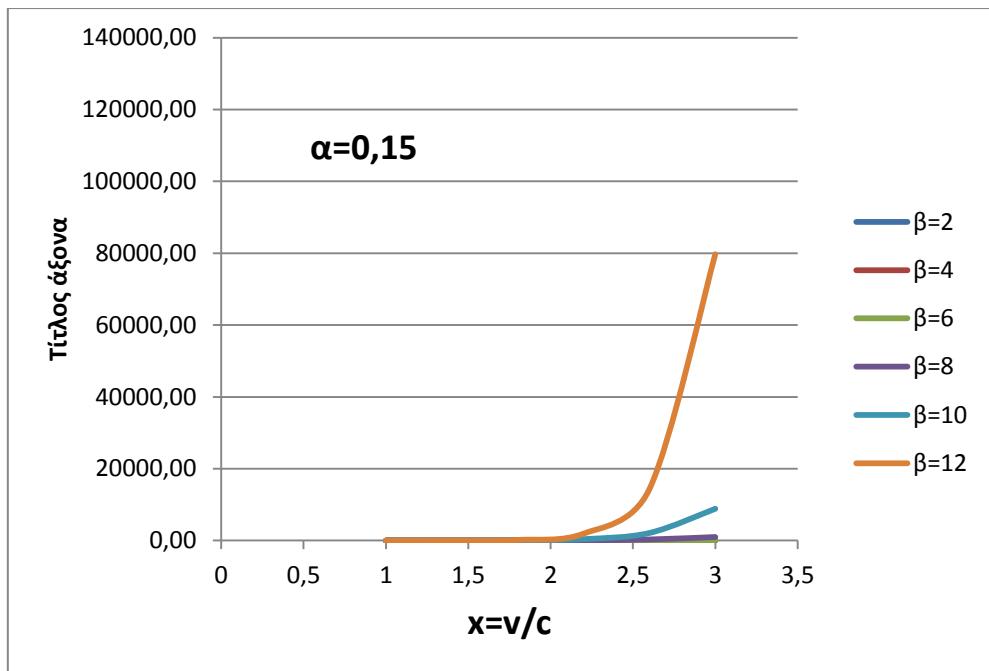
Διάγραμμα 2: Συνάρτηση BPR για μικρούς λόγους  $v/c$  και  $\alpha=0,2$



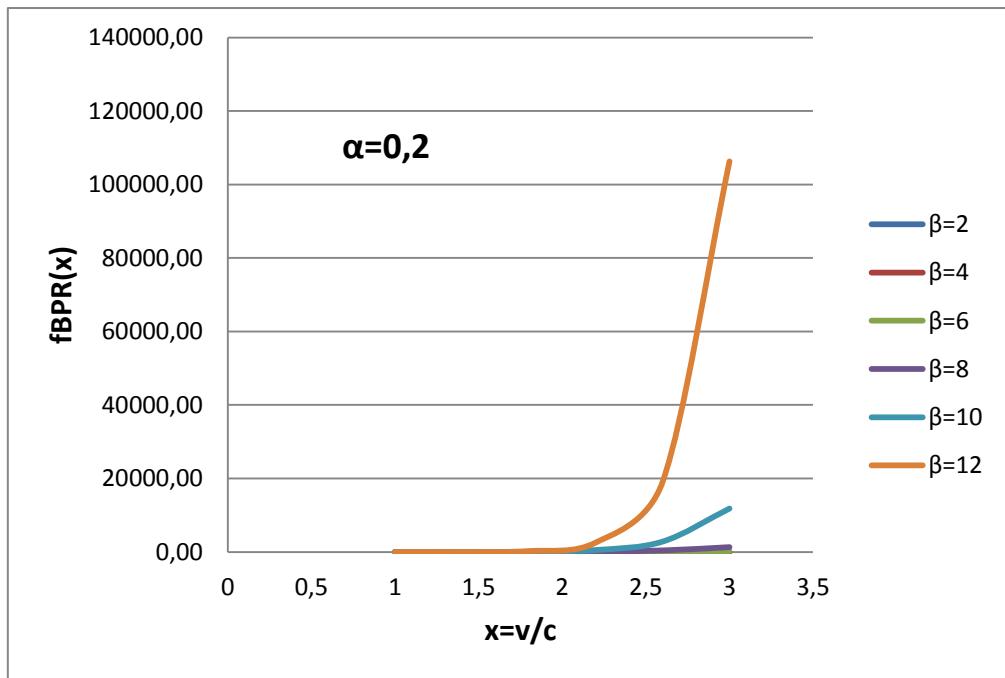
Διάγραμμα 3: Συνάρτηση BPR για μικρούς λόγους  $v/c$  και  $\alpha=0,25$



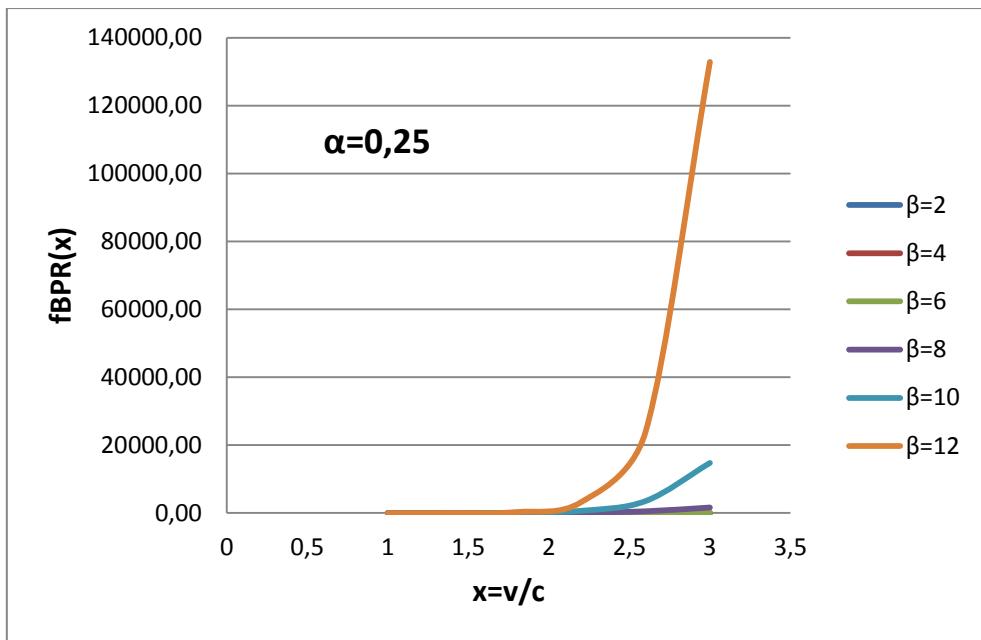
Διάγραμμα 4: Συνάρτηση BPR για μικρούς λόγους  $v/c$  και  $\alpha=1$



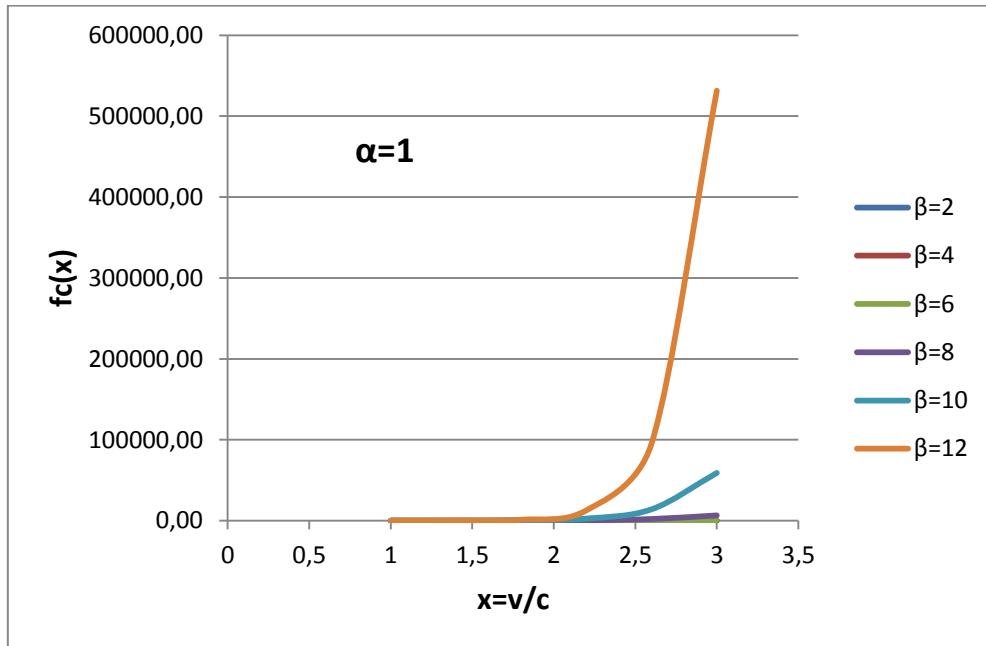
Διάγραμμα 5: Συνάρτηση BPR για μεγάλους λόγους  $v/c$  και  $\alpha=0,15$



Διάγραμμα 6: Συνάρτηση BPR για μεγάλους λόγους  $v/c$  και  $\alpha=0,2$



Διάγραμμα 7: Συνάρτηση BPR για μεγάλους λόγους  $v/c$  και  $\alpha=0,25$



Διάγραμμα 8: Συνάρτηση BPR για μεγάλους λόγους  $v/c$  και  $\alpha=1$

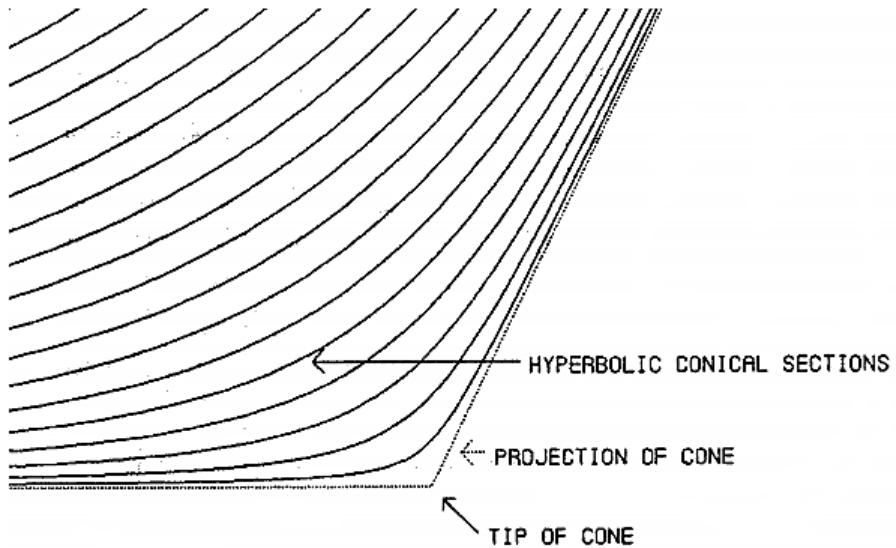
2. Για συνδέσμους οι οποίοι χρησιμοποιούνται σε πολύ χαμηλότερο επίπεδο από την ικανότητα, οι BPR συναρτήσεις, ιδιαίτερα για μεγάλες τιμές του α, αποδίδουν χρόνο ελεύθερης ροής ανεξάρτητα του πραγματικού όγκου της κυκλοφορίας. Έστω, για παράδειγμα, ένας σύνδεσμος με  $\beta=12$  και ικανότητα 1000. Είτε ο όγκος της κυκλοφορίας είναι 0 ή 300, η VDF δίνει τα ίδια αποτελέσματα (με ακρίβεια χιλιοστού). Έτσι, το μοντέλο ισορροπίας τοπικά θα εκφυλίζεται σε καταμερισμό της κυκλοφορίας στο δίκτυο με την μέθοδο all or nothing, όπου και η πιο μικρή αλλαγή (ή σφάλμα) στον χρόνο ελεύθερης ροής μπορεί να καταλήγει σε ολοκληρωτική αλλαγή της κυκλοφορίας από την μία διαδρομή στην άλλη. Επίσης, η λύση δεν είναι εγγυημένα μοναδική, για αυτό το επίπεδο των ροών στους συνδέσμους, δεδομένου ότι εκεί η VDF δεν είναι πια συνάρτηση του όγκου.
  
3. Παρότι η συνάρτηση BPR είναι πολύ απλή στην μορφή της, η εκτίμησή της απαιτεί το υπολογισμό δύο υπερβατικών συναρτήσεων, όπως μίας λογαριθμικής και μίας εκθετικής συνάρτησης, που απαιτεί αρκετή υπολογιστική δύναμη.

### 3.6.4 Η συνάρτηση κόστους Conical

Ο Spiess [51] πρότεινε την συνάρτηση conical (Conical-Volume Delay Function) για την συμφόρηση σε ένα σύνδεσμο για να ξεπεράσει τις δυσκολίες που σχετίζονται με τις υψηλές τιμές της εκθετικής παραμέτρου  $\beta$  της συνάρτησης BPR (βλέπε πιο πάνω - «**Μειονεκτήματα των BPR συναρτήσεων με μεγάλες τιμές του  $\beta$** »). Μία παρόμοια συνάρτηση είχε προταθεί σε μία μη δημοσιευμένη έκθεση που εκπονήθηκε στο πλαίσιο μιας μελέτης μεταφοράς για την πόλη του Γουίντεργκ (Traffic Research Corporation [52], Florian and Nguyen [53]). Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτήν την μελέτη μπορούν να ερμηνευθούν ως κωνικές τομές, αλλά χρησιμοποιούσαν περισσότερες συναρτήσεις και δεν ικανοποιούσαν, γενικά, τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν πιο πάνω. [51]

Έστω ένας αμβλύς τρισδιάστατος κώνος που διασταυρώνονται με ένα επίπεδο δύο διαστάσεων  $x - y$ . Η εικόνα 19 (πιο κάτω) δείχνει την προβολή του κώνου, καθώς

και ένα πιθανό προκύπτον υπερβολικό τμήμα. Αυτές οι υπερβολικές κωνικές τομές έχουν όλες τις επιθυμητές ιδιότητες και αποτελούν την βάση για την συνάρτηση conical. [51]



**Εικόνα 19: Υπερβολικές κωνικές τομές [23]**

Η βασική συνάρτηση ορίζεται ως εξής [54][51]:

$$T = T_0 \cdot \left( 2 + \sqrt{\beta^2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 + \alpha^2} - \beta \left(1 - \frac{v}{c}\right) - \alpha \right) \quad (3.17)$$

και  $f^C(x) = (2 + \sqrt{\beta^2(1-x)^2 + \alpha^2} - \beta(1-x) - \alpha)$

όπου

$T$  = χρόνος μετακίνησης

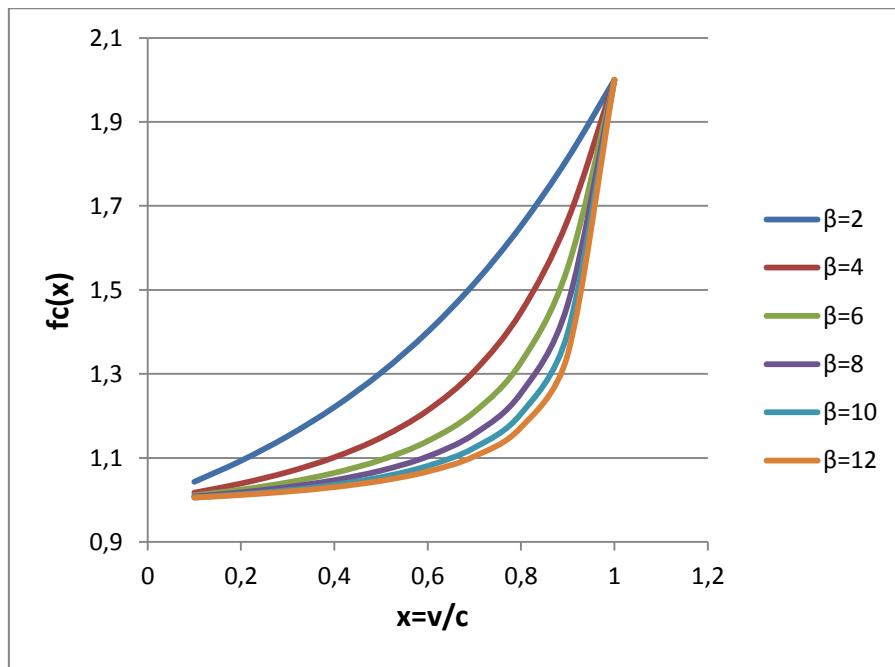
$T_0$  = χρόνος μετακίνησης σε ελεύθερη ροή

$v$  = όγκος κυκλοφορίας

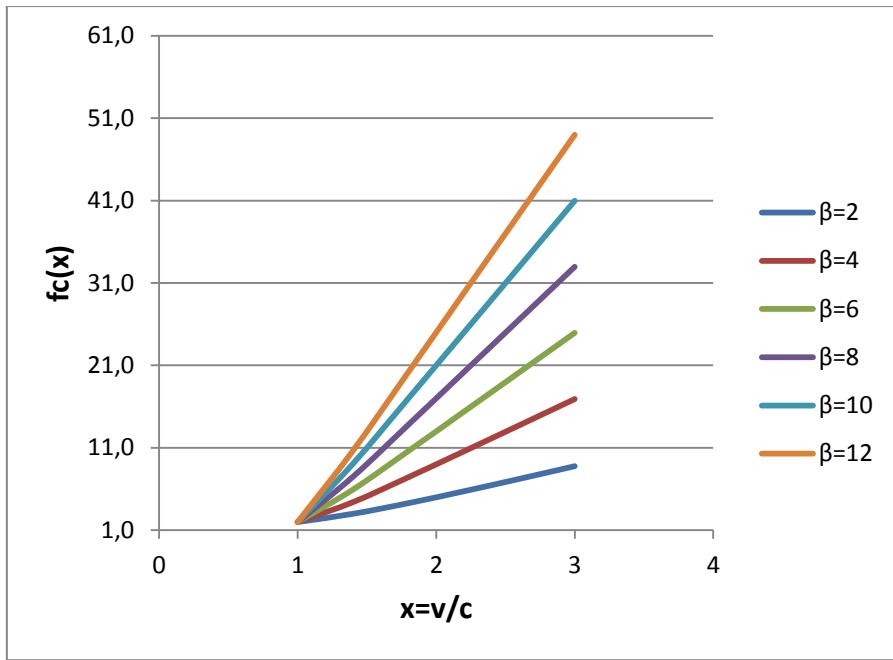
$c$  = πρακτική ικανότητα (πολύ συχνά προσαρμόζεται στον λόγο  $(green\ time/cycle\ length)$ )

$$\alpha, \beta = \text{παράμετροι και } a = \frac{2\beta-1}{2\beta-2}$$

Σημείωση:  $\frac{v}{c}$  συμβολίζεται και απλουστευτικά  $x$



Διάγραμμα 9: Conical συναρτήσεις για μικρούς λόγους  $v/c$



Διάγραμμα 10: Conical συναρτησεις για μεγάλους λόγους  $v/c$

- ✓ Έλεγχος προϋποθέσεων καλής συνάρτησης για την συνάρτηση Conical
1. Η  $f^C$  ορίζεται ως εξής:

$$f^C(x) = (2 + \sqrt{\beta^2(1-x)^2 + \alpha^2}) - \beta(1-x) - \alpha$$

Για να δειχθεί ότι η  $f^C$  είναι γνησίως αύξουσα, πρέπει η πρώτη παράγωγος της  $f^C$  να είναι μεγαλύτερη του 0, δηλαδή  $f^{C'} > 0$ .

$$f^{C'}(x) = \beta + \frac{\beta^2 \cdot (x-1)}{\sqrt{\beta^2 \cdot (1-x)^2 + \alpha^2}} =$$

$$= \beta \cdot \left(1 + \frac{\beta \cdot (x-1)}{\sqrt{\beta^2 \cdot (1-x)^2 + \alpha^2}}\right)$$

Ξέρω ότι  $\beta > 0$  οπότε θα ελεγχθεί ο δεύτερος όρος  $(1 + \frac{\beta \cdot (x-1)}{\sqrt{\beta^2 \cdot (1-x)^2 + \alpha^2}})$

$$1 + \frac{\beta \cdot (x - 1)}{\sqrt{\beta^2 \cdot (1 - x)^2 + \alpha^2}} > 0 \Rightarrow \frac{\beta \cdot (x - 1)}{\sqrt{\beta^2 \cdot (1 - x)^2 + \alpha^2}} > -1 \Rightarrow$$

$$\beta \cdot (x - 1) > -\sqrt{\beta^2 \cdot (1 - x)^2 + \alpha^2} \Rightarrow \beta \cdot (1 - x) < \sqrt{\beta^2 \cdot (1 - x)^2 + \alpha^2} \Rightarrow$$

- Άν  $1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$  και υψώνοντας στο τετράγωνο προκύπτει:

$$(\beta \cdot (1 - x))^2 < (\sqrt{\beta^2 \cdot (1 - x)^2 + \alpha^2})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta^2 \cdot (1 - x)^2 < \beta^2 \cdot (1 - x)^2 + \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 > 0 \text{ Αληθές}$$

- Άν  $1 - x > 0$  τότε  $\beta \cdot (1 - x) < 0$  και

$$\beta \cdot (1 - x) < \sqrt{\beta^2 \cdot (1 - x)^2 + \alpha^2} \text{ Αληθές}$$

Οπότε σε κάθε περίπτωση  $1 + \frac{\beta \cdot (x - 1)}{\sqrt{\beta^2 \cdot (1 - x)^2 + \alpha^2}} > 0$  και άρα  $f^C'(x) > 0$ .

$$2. f^C(0) = (2 + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} - \beta - \alpha) = 2 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha - \beta$$

$$\text{Από σχέση } \alpha = \frac{2\beta - 1}{2\beta - 2} \text{ έχω ότι } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta - 1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα έχω: } f^C(0) &= 2 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha - \beta = 2 + \sqrt{(\alpha + \beta - 1)^2} - \alpha - \beta = \\ &= 2 + \alpha + \beta - 1 - \alpha - \beta = 1 \Rightarrow f^C(0) = 1 \end{aligned}$$

3. Από το 1. προφανώς η  $f^{C'}$  ορίζεται. Για να δειχθεί ότι η  $f^{C'}$  είναι γνησίως αύξουσα, πρέπει η δεύτερη παράγωγος της  $f^C$  να είναι μεγαλύτερη του 0, δηλαδή  $f^{C''} > 0$ .

H  $f^{C'}$  γράφεται  $f^{C'}(x) = \beta + \frac{\beta^2 \cdot (x-1)}{\sqrt{\beta^2 \cdot (x-1)^2 + \alpha^2}}$  οπότε

$$f^{C''} = \frac{\alpha^2 \cdot \beta^2}{(\beta^2 \cdot (x-1)^2 + \alpha^2) \cdot \sqrt{\beta^2 \cdot (1-x)^2 + \alpha^2}} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{C'} \uparrow, \quad \gamma \nu \eta \sigma \iota \omega \varsigma \alpha \acute{\varsigma} o u \sigma \alpha$$

4.  $f^{C'}(1) = \beta \cdot \left(1 + \frac{\beta \cdot (1-1)}{\sqrt{\beta^2 \cdot (1-1)^2 + \alpha^2}}\right) \Rightarrow f^{C'}(1) = \beta$

5. Πρέπει να δειχθεί ότι  $f^{C'}(x) < 2\beta$

$$f^{C'}(x) < 2\beta \Rightarrow \beta \cdot \left(1 + \frac{\beta \cdot (x-1)}{\sqrt{\beta^2 \cdot (1-x)^2 + \alpha^2}}\right) < 2\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta \cdot (x-1)}{\sqrt{\beta^2 \cdot (1-x)^2 + \alpha^2}} < 1 \Rightarrow \beta \cdot (x-1) < \sqrt{\beta^2 \cdot (1-x)^2 + \alpha^2} \Rightarrow$$

- Av  $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$  και υψώνοντας στο τετράγωνο προκύπτει:

$$(\beta \cdot (x-1))^2 < (\sqrt{\beta^2 \cdot (1-x)^2 + \alpha^2})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta^2 \cdot (1-x)^2 < \beta^2 \cdot (1-x)^2 + \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 > 0 \text{ Aληθές}$$

- Av  $x-1 < 0$  τότε  $\beta \cdot (x-1) < 0$  και

$$\beta \cdot (1-x) < \sqrt{\beta^2 \cdot (1-x)^2 + \alpha^2} \text{ Aληθές}$$

Αυτό σημαίνει για μεγάλους λόγους  $\frac{v}{c}$ , η συμφόρηση συμπεριφέρεται ως μία οινοεί γραμμική συνάρτηση, με μία κλίση που πλησιάζει αλλά ποτέ δεν υπερβαίνει το διπλάσιο της κλίσης στην ικανότητα.

6. Πρέπει να δειχθεί ότι  $f^{C'}(0) > 0$

$$f^{C'}(0) = \beta \cdot \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}\right)$$

$$\text{Το } \beta > 0 \text{ áρα θα ελεγχθεί ο δεύτερος όρος } \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}\right)$$

$$\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}\right) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} < 1 \Rightarrow \beta < \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} \Rightarrow \beta^2 < \beta^2 + \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 > 0 \text{ Αληθές áρα } f^{C'}(0) > 0 \text{ αφού } \alpha, \beta > 0$$

Άρα για την συνάρτηση conical ισχύουν και οι 6 προϋποθέσεις [51].

### 3.6.5 Συναρτήσεις οριακού κόστους

Για τις ανάγκες του υπολογισμού του βέλτιστου καταμερισμού της κυκλοφορίας στο δίκτυο (system optimum assignment), είναι απαραίτητο να υπολογιστούν οι αντίστοιχες συναρτήσεις οριακού κόστους (βλέπε και «**3.5.3 Χαρακτηρισμός των βέλτιστων ροών**»). Πως λειτουργεί όμως μία συνάρτηση οριακού κόστους;

Με μία μικρή αύξηση της ποσότητας της κυκλοφορίας σε μία ακμή, η αντίστοιχη συνάρτηση οριακού κόστους  $c^*$  έχει έναν όρο  $c(x)$  που δεσμεύει το (ανά μονάδα) κόστος λόγω της νέας κυκλοφορίας, όπως επίσης και έναν δεύτερο όρο  $x.c'(x)$  που αντιπροσωπεύει το (ανά μονάδα) αυξημένο κόστος που οφείλεται στην ισχύουσα

κατάσταση κυκλοφορίας λόγω της επιπρόσθετης συμφόρησης. Έτσι, το οριακό κόστος περιλαμβάνει το κόστος που αντιλαμβάνεται ο ίδιος ο οδηγός  $c(v)$  καθώς και την αύξηση στο κόστος,  $c'(v)$ , που προκαλεί σε όλους τους οδηγούς στον ίδιο σύνδεσμο. [51] Η μόνη διαφορά λοιπόν, μεταξύ μίας βέλτιστης ροής (συνάρτηση οριακού κόστους) και μιας ροής σε ισορροπία Nash (συνάρτηση κόστους) είναι ότι η πρώτη λαμβάνει υπόψη τον ευσυνείδητο και αλτρουιστικό δεύτερο όρο, ενώ η δεύτερη όχι.

Για μία δεδομένη VDF συνάρτηση,  $c(v)$  η αντίστοιχη συνάρτηση οριακού κόστους ορίζεται ως εξής:

$$c^{SO}(v) = c(v) + v \cdot c'(v) \quad (3.18)$$

### α) Συνάρτηση BPR

Η συνάρτηση BPR (Bureau of Public Roads) δίνεται από τη σχέση:

$$c^{BPR}(v) = T_0 \cdot \left( 1 + a \cdot \left( \frac{v}{c} \right)^\beta \right)$$

ενώ η πρώτη παράγωγος είναι:

$$c'^{BPR}(v) = T_0 \cdot a \cdot \beta \cdot \frac{v^{(\beta-1)}}{c^\beta}$$

η συνάρτηση οριακού κόστους είναι:

$$c^{SO^{BPR}}(v) = c^{BPR}(v) + v \cdot c'^{BPR}(v) =$$

$$= T_0 \cdot \left( 1 + a \cdot \left( \frac{v}{c} \right)^\beta \right) + v \cdot \left( T_0 \cdot \left( 1 + a \cdot \left( \frac{v}{c} \right)^\beta \right) \right)' =$$

$$= T_0 \cdot \left( 1 + a \cdot \left( \frac{v}{c} \right)^\beta \right) + v \cdot T_0 \cdot a \cdot \beta \cdot \frac{v^{(\beta-1)}}{c^\beta} =$$

$$= T_0 \cdot (1 + a \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^\beta + a \cdot \beta \cdot \frac{v^\beta}{c^\beta}) = T_0 \cdot \left(1 + a \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^\beta + a \cdot \beta \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^\beta\right) =$$

$$= T_0 \cdot \left(1 + a \cdot (\beta + 1) \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^\beta\right)$$

**Οπότε τελικά είναι:**  $c^{SO^{BPR}}(v) = T_0 \cdot \left[1 + a \cdot (\beta + 1) \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^\beta\right] \quad (3.19)$

Σχόλιο:

Η συνάρτηση BPR όπως φαίνεται και από την μορφή της είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση. Σύμφωνα με τον Roughgarden [1], για πολυωνυμικές συναρτήσεις κόστους χαμηλού βαθμού το Τίμημα της Αναρχίας μπορεί να είναι αρκετά μικρό. Το συμπέρασμα είναι το εξής:

**To Price of anarchy είναι μικρό εκτός αν οι συναρτήσεις κόστους είναι υψηλού πολυωνυμικού βαθμού, δηλαδή έχουν μεγάλη κλίση.**

Το ανώτατο όριο του Price of Anarchy για την συνάρτηση BPR με  $\alpha=0,15$  και  $\beta=4$  έχει βρεθεί ότι είναι 2,15.

### β) Συνάρτηση conical

Η συνάρτηση Conical δίνεται από την σχέση:

$$c^{Conical}(v) = T_0 \cdot \left(2 + \sqrt{\beta^2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 + \alpha^2} - \beta \left(1 - \frac{v}{c}\right) - \alpha\right)$$

Ενώ η πρώτη παράγωγος είναι:

$$c'^{Conical}(v) = \frac{T_0}{c} \cdot \left( \beta + \frac{\beta^2 \cdot \left(\frac{v}{c} - 1\right)}{\sqrt{\beta^2 \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 + \alpha^2}} \right)$$

η συνάρτηση οριακού κόστους είναι:

$$c^{SO^{Conical}}(v) = c^{Conical}(v) + v \cdot c'^{Conical}(v) =$$

$$= \left[ T_0 \cdot \left( 2 + \sqrt{\beta^2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 + \alpha^2} - \beta \left(1 - \frac{v}{c}\right) - \alpha \right) \right] + \\ + v \cdot \left[ \frac{T_0}{c} \cdot \left( \beta + \frac{\beta^2 \cdot \left(\frac{v}{c} - 1\right)}{\sqrt{\beta^2 \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 + \alpha^2}} \right) \right] =$$

$$= T_0 \cdot \left( 2 - \alpha - \beta \cdot \left(1 - 2 \frac{v}{c}\right) + \frac{\alpha^2 \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) \cdot \left(1 - 2 \frac{v}{c}\right) + \beta^2}{\sqrt{\beta^2 \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 + \alpha^2}} \right)$$

**Οπότε τελικά είναι:**

$$c^{SO^{Conical}}(v) = T_0 \cdot \left( 2 - \alpha - \beta \cdot \left(1 - 2 \frac{v}{c}\right) + \frac{\alpha^2 \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) \cdot \left(1 - 2 \frac{v}{c}\right) + \beta^2}{\sqrt{\beta^2 \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 + \alpha^2}} \right)$$

(3.20)

### **3.7 Μονάδες Επιβατικών Οχημάτων**

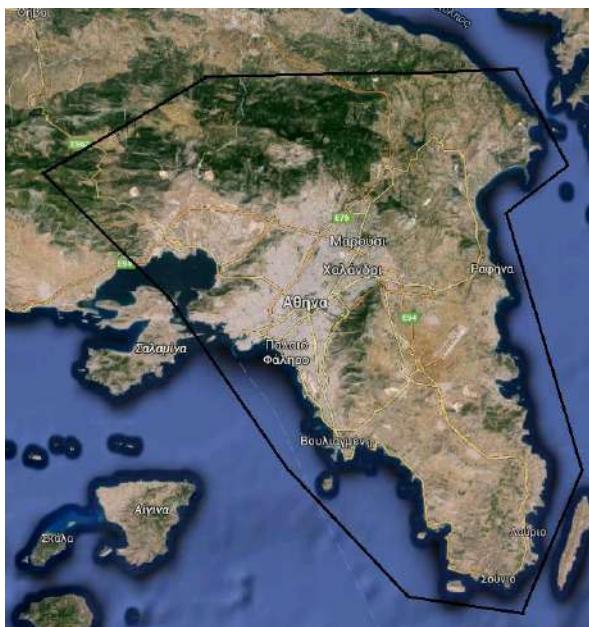
Οι διάφορες κατηγορίες οχημάτων απαιτούν διαφορετικού μεγέθους χώρο στην οδό εξαιτίας των διαστάσεων και των χαρακτηριστικών λειτουργίας τους και συνεπώς έχουν διαφορετική επιρροή στην κυκλοφοριακή ροή. Για την μετατροπή των διαφόρων κατηγοριών οχημάτων σε συγκρίσιμες μονάδες χρησιμοποιείται ως βασική μονάδα το επιβατικό όχημα (passenger car) και οι φόρτοι εκφράζονται σε Μονάδες Επιβατικών Αυτοκινήτων-MEA (Passenger car units-PCU). Η επίδραση κάθε κατηγορίας οχήματος στην κυκλοφοριακή ροή εξαρτάται από το μέγεθος και τα λειτουργικά χαρακτηριστικά των οχημάτων, διαφοροποιείται δε ανάλογα με τα γεωμετρικά και κυκλοφοριακά χαρακτηριστικά των οδών. [55]

## 4. Μεθοδολογία

Η παρούσα διπλωματική εργασία θα μπορούσε να χωριστεί σε δύο στάδια. Το πρώτο στάδιο, αφορά την ανάπτυξη της μεθοδολογίας υπολογισμού του Τιμήματος της Αναρχίας, ενώ το δεύτερο στάδιο, αφορά την ανάπτυξη της μεθοδολογίας προσέγγισης του προβλήματος για τον εντοπισμό του παράδοξου του Braess. Για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής εργασίας χρησιμοποιήθηκε το ειδικό λογισμικό προσομοίωσης AIMSUN. Το πρόγραμμα AIMSUN μετά από ενδελεχή έλεγχο προσφέρει όλα τα εργαλεία που απαιτούνται για τον υπολογισμό των μεγεθών προς διερεύνηση.

### 4.1 Το κυκλοφοριακό δίκτυο του νομού Αττικής στο πρόγραμμα AIMSUN

Το κυκλοφοριακό δίκτυο του νομού Αττικής, έκτασης  $3.808 \text{ km}^2$ , προτυποποιήθηκε στο περιβάλλον του προγράμματος AIMSUN στα πλαίσια ενός ερευνητικού προγράμματος του Θαλή. Το οδικό δίκτυο που προτυποποιήθηκε αποτελείται από 15556 συνδέσμους, 6343 κόμβους και 1284 κεντροειδή. Η περιοχή που μοντελοποιήθηκε φαίνεται στην εικόνα 20 και 21.



Εικόνα 20: Νομός Αττικής (Πηγή: Google Maps)



**Εικόνα 21: Μοντελοποιημένο οδικό δίκτυο νομού Αττικής (Πηγή: AIMSUN)**

### Πίνακας προέλευσης-προορισμού

Ο πίνακας προέλευσης-προορισμού του οδικού δικτύου του Ν.Αττικής ο οποίος αναπαριστά την μορφή των μετακινήσεων και πάλι δημιουργήθηκε στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος του Θαλή και ανανεώθηκε από τον υποψήφιο διδάκτορα Ηλία Γκότση κατά τα κυκλοφοριακά δεδομένα του Μαΐου 2015. Η μορφή του φαίνεται στην εικόνα 22.

Παραγωγές	Τελερεις							$\sum_j T_{ij}$
	1	2	3	$\dots$	j	$\dots$	z	
1	$T_{11}$	$T_{12}$	$T_{13}$	$\dots$	$T_{1j}$	$\dots$	$T_{1z}$	$O_1$
2	$T_{21}$	$T_{22}$	$T_{23}$	$\dots$	$T_{2j}$	$\dots$	$T_{2z}$	$O_2$
3	$T_{31}$	$T_{32}$	$T_{33}$	$\dots$	$T_{3j}$	$\dots$	$T_{3z}$	$O_3$
.	.	.	.		.		.	.
i	$T_{i1}$	$T_{i2}$	$T_{i3}$	$\dots$	$T_{ij}$	$\dots$	$T_{iz}$	$O_i$
.	.	.	.		.		.	.
z	$T_{z1}$	$T_{z2}$	$T_{z3}$	$\dots$	$T_{zj}$	$\dots$	$T_{zz}$	$O_z$
$\sum_i T_{ij}$		$D_1$	$D_2$	$D_3$	$\dots$	$D_j$	$\dots$	$D_z$
							$\sum_{i,j} T_{ij} = T$	

**Εικόνα 22: Μορφή πίνακα προέλευσης-προορισμού  
(Πήγη: AIMSUN)**

Για τις ανάγκες της διπλωματικής εργασίας δημιουργήθηκε ο πίνακας προέλευσης-προορισμού για την πρωινή ώρα αιχμής (και γενικά ώρα αιχμής), και πιο συγκεκριμένα 8:00-9:00 π. μ., από τον πίνακα 24ώρου με στοιχειά για τους φόρτους από το Κέντρο Διαχείρισης Κυκλοφορίας (Κ.Δ.Κ.). Ο πίνακας που δημιουργήθηκε έχει 1284 στήλες και 1284 γραμμές και  $\sum_{i,j} T_{ij} = 475729,23$  που ισούται με την συνολική ζήτηση για την ώρα αιχμής που μελετήθηκε.

## 4.2 Περιοχές μελέτης

Οι περιοχές μελέτης που επιλέχθηκαν για τον υπολογισμό του Τιμήματος της Αναρχίας είναι ο μικρός δακτύλιος Αθηνών καθώς και ένα μεγαλύτερο δίκτυο στην ευρύτερη περιοχή των Αθηνών το οποίο περιλαμβάνει μέσα και το δακτύλιο Αθηνών. Το δεύτερο θα ονομαστεί «Ευρύτερο Δίκτυο».

### 4.2.1 Μικρός δακτύλιος Αθηνών

Ο δακτύλιος Αθηνών θεσπίστηκε εκτάκτως τον Ιούλιο του 1979 από τον Κωνσταντίνο Μητσοτάκη, υπουργό της κυβέρνησης του Κωνσταντίνου Καραμανλή, ως επείγον προσωρινό μέτρο για λόγους εξοικονόμησης καυσίμων, λόγω της τότε παγκόσμιας πετρελαϊκής κρίσης. Το 1982 όμως, η τότε κυβέρνηση του ΠΑΣΟΚ αποφάσισε να το καθιερώσει μόνιμα για λόγους κυκλοφοριακής αποσυμφόρησης και παραμένει σε ισχύ ως σήμερα. Λειτουργεί ουσιαστικά ως ένα μέτρο περιορισμού της κυκλοφορίας των οχημάτων στο κέντρο της Αθήνας, που βασίζεται στην εκ περιτροπής κυκλοφορία των περισσότερων από αυτά. Το μέτρο αυτό έχει σκοπό τη μείωση του κυκλοφοριακού φόρτου στο κέντρο της Αθήνας και κατά συνέπεια τον περιορισμό της ατμοσφαιρικής ρύπανσης λόγω των αερίων ρύπων κατά τη λειτουργία των οχημάτων, τόσο στην ευρύτερη περιοχή της Αθήνας όσο και στην περιοχή του κέντρου της. Μέτρα περιορισμού κυκλοφορίας παρόμοιου χαρακτήρα ισχύουν και σε ορισμένες μεγάλες πόλεις του εξωτερικού. [56]

Όρια εφαρμογής του μικρού δακτυλίου είναι οι εξής λεωφόροι και οδοί: Αλεξάνδρας – Ζαχάρωφ – Μεσογείων - Φειδιπίδου – Μιχαλακοπούλου – Σπ. Μερκούρη – Βρυσάξιδος – Υμηττού – Ηλ. Ηλιού – Αμβρ. Φραντζή – Συγγρού – Χαμοστέρνας – Πειραιώς – Ιερά Οδός – Κωνσταντινούπόλεως – Αχιλλέως – Πλατεία Καραϊσκάκη – Καρόλου – Μάρνη – 28ης Οκτωβρίου (Πατησίων) όπως φαίνεται στην εικόνα 23. [56]



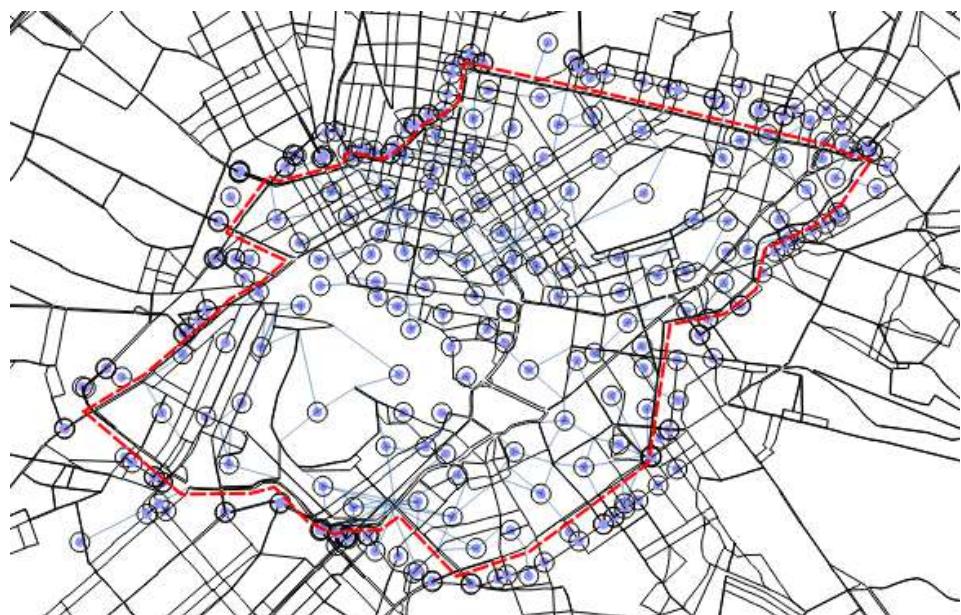
Εικόνα 23: Μικρός Δακτύλιος Αθηνών (Πηγή: Stigmap)

Τα όρια του μικρού δακτυλίου σημειώνονται με ειδικές πινακίδες (βλέπε εικόνα 4.5) με την ένδειξη «Δ» σε κίτρινο φόντο, οι οποίες βρίσκονται σε κάθε εισερχόμενο δρόμο στο δακτύλιο. [56]



Εικόνα 24: Το σήμα του μικρού δακτυλίου (Πηγή: Google)

Η περιοχή του μικρού δακτυλίου δεν επιλέχθηκε τυχαία καθώς αποτελεί την πιο συμφορημένη περιοχή της πόλης των Αθηνών αλλά και της ευρύτερης περιοχής του Ν.Αττικής. Στο πρόγραμμα AIMSUN η περιοχή του δακτυλίου αποτελείται από 1370 συνδέσμους, 600 κόμβους και 199 κεντροειδή, δηλαδή ο πίνακας προέλευσης-προορισμού είναι 199x199.



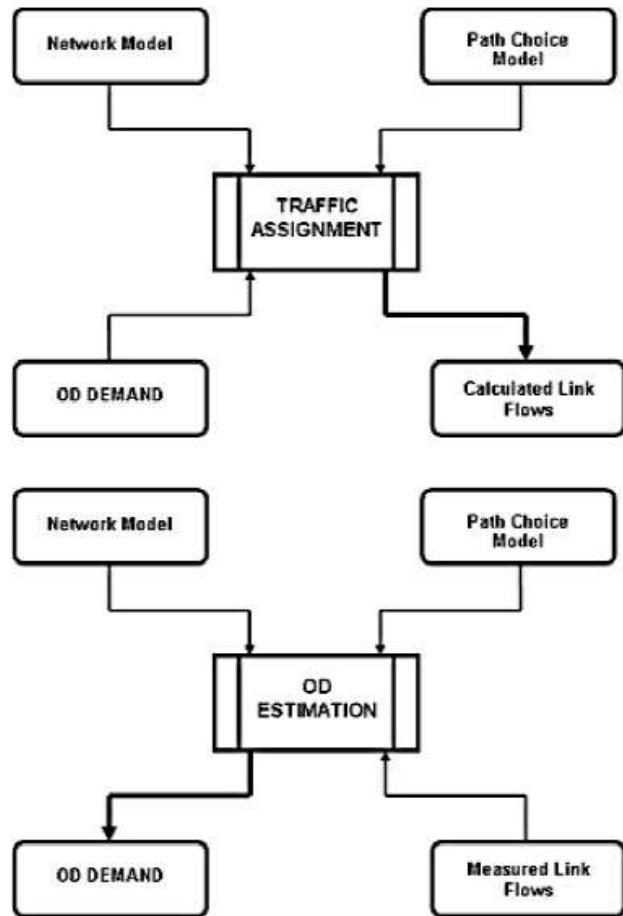
Εικόνα 25: Ο μικρός δακτύλιος στο περιβάλλον του AIMSUN (Πηγή: AIMSUN)

#### 4.2.1.1 Κατασκευή πίνακα προέλευσης-προορισμού για το μικρό δακτύλιο

Για την κατασκευή του πίνακα προέλευσης-προορισμού του μικρού δακτυλίου ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία:

##### 1) Macro Adjustment Scenario στο περιβάλλον του AIMSUM

Η προσαρμογή πίνακα είναι μία διαδικασία βαθμονόμησης ενός πίνακα προέλευσης-προορισμού από ένα πρωταρχικό πίνακα, χρησιμοποιώντας μετρήσεις κυκλοφορίας από φωρατές. Ο αλγόριθμος επίλυσης βασίζεται σε ένα bi-level μοντέλο, το οποίο λύνεται ευριστικά από ένα αλγόριθμο σύγκλισης και περιλαμβάνει μία διαδικασία καταμερισμού κυκλοφορίας στο δίκτυο σε κάθε επανάληψη.



Εικόνα 26: Σχέση μεταξύ της διαδικασίας adjustment και assignment (Πηγή: AIMSUN)

Δημιουργήθηκε ένα σενάριο προσαρμογής σε μακροσκοπική προσομοίωση (Macro Adjustment Scenario).

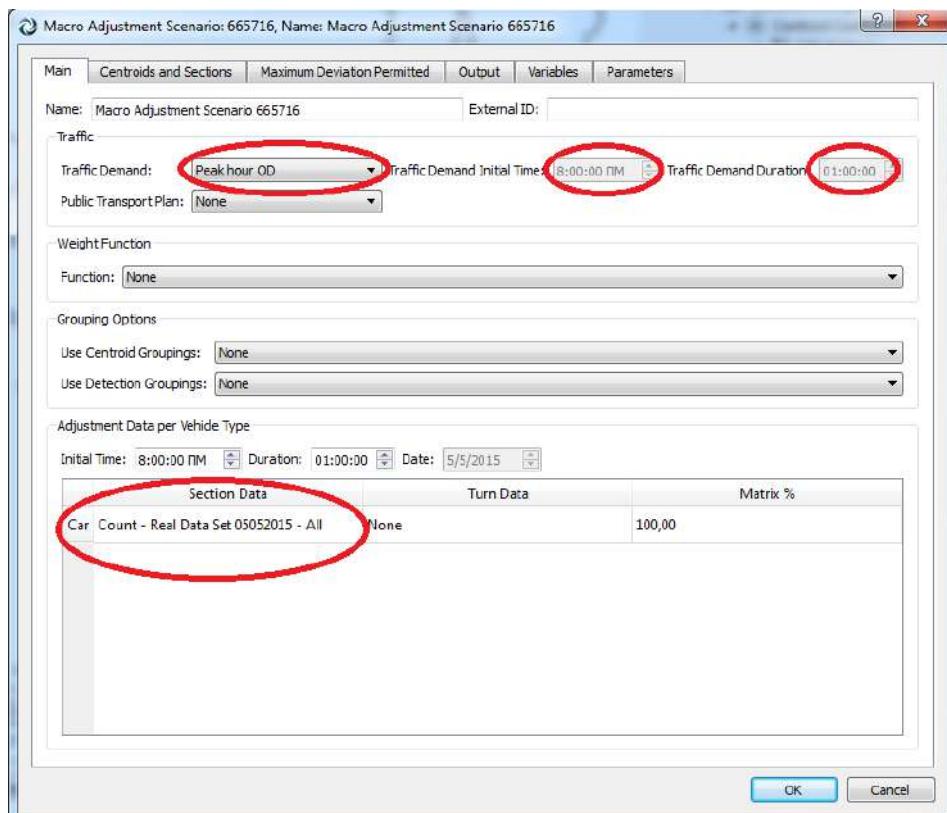
Για το σενάριο που δημιουργήθηκε τέθηκαν οι εξής παράμετροι:

- **Επιλογή κυκλοφοριακής ζήτησης**

Επιλέχθηκε ως κυκλοφοριακή ζήτηση (traffic demand) ο συνολικός πίνακας προέλευσης-προορισμού για την ώρα αιχμής 8:00-9:00π.μ (δηλαδή διάρκειας μίας ώρας), “Peak Hour OD”, ο οποίος προέκυψε από τον 24ωρο πίνακα, “24h Original OD”, μετά από υπολογισμό της διακύμανσης της κυκλοφορίας από στοιχεία που πάρθηκαν από το Κέντρο Διαχείρισης Κυκλοφορίας.

- **Δεδομένα κυκλοφοριακών μετρήσεων από φωρατές**

Χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα κυκλοφοριακών μετρήσεων από 215 φωρατές, για την ώρα αιχμής, δεδομένα τα οποία πάρθηκαν από το Κέντρο Διαχείρισης Κυκλοφορίας, για την βαθμονόμηση του νέου πίνακα.



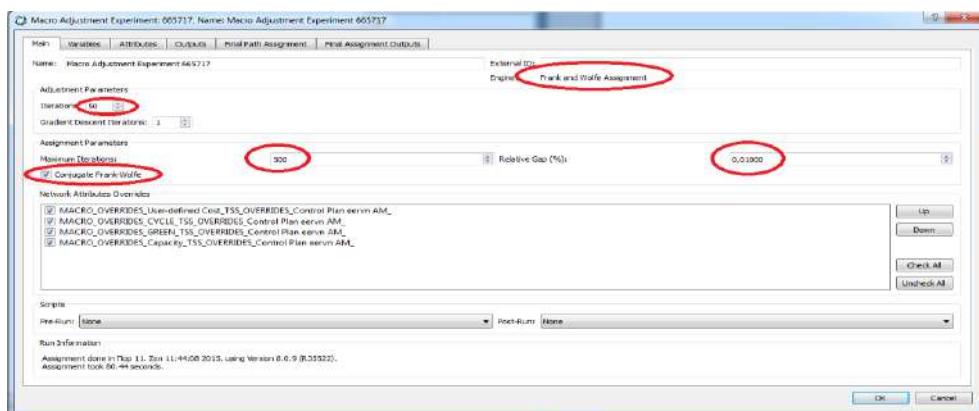
**Εικόνα 27: Παράθυρο στο περιβάλλον του AIMSUN-Επιλογή βασικών παραμέτρων για το Macro Adjustment Scenario (Πηγή: AIMSUN)**

Να σημειωθεί ότι μέγιστη απόκλιση από τον αρχικό πίνακα επιλέχθηκε 5% ενώ για τα μηδενικά κελιά του πίνακα προέλευσης-προορισμού 0% (frozen cells).

Για το πιο πάνω σενάριο, δημιουργήθηκε ένα πείραμα προσαρμογής σε μακροσκοπική προσομοίωση (Macro Adjustment Experiment). Αρχικά επιλέχθηκε ως αλγόριθμος επίλυσης για την εύρεση της ισορροπίας του δικτύου, ο αλγόριθμος Frank and Wolfe. Όπως έχει περιγραφεί εκτενώς στο τρίτο κεφάλαιο, ο αλγόριθμος αυτός είναι επαναληπτικός. Επίσης επιλέχθηκε η επιλογή Conjugate Frank-Wolfe η οποία δίνει πιο ακριβή λύση.

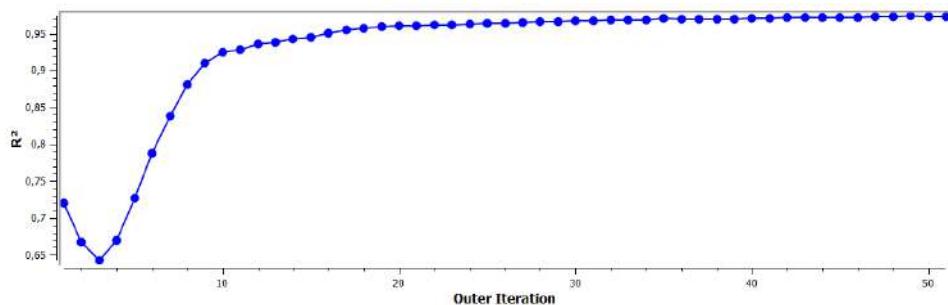
Για το πείραμα που δημιουργήθηκε τέθηκαν οι εξής παράμετροι:

- Καθορισμός του αριθμού επαναλήψεων του Macro Adjustment Experiment**  
Ο αριθμός των επαναλήψεων που επιλέχθηκαν αντιστοιχούν στο αριθμό των βημάτων του αλγορίθμου. Επιλέχθηκαν 50 επαναλήψεις.
- Καθορισμός του αριθμού επαναλήψεων του Assignment**  
Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου προσαρμογής, θα εκτελεστεί μία διαδικασία assignment για την οποία πρέπει να καθοριστεί ο αριθμός των επαναλήψεων και το επίπεδο σύγκλισης. Επιλέχθηκαν 500 επαναλήψεις και ποσοστό απόκλισης 0,01%.

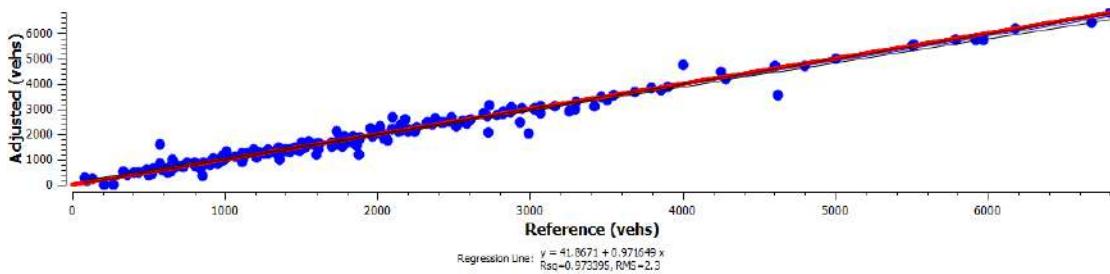


Εικόνα 28: Παράθυρο στο περιβάλλον του AIMSUN-Επιλογή βασικών παραμέτρων για το Macro Adjustment Experiment (Πηγή: AIMSUN)

#### Σχολιασμός αποτελεσμάτων του Macro Adjustment Scenario:

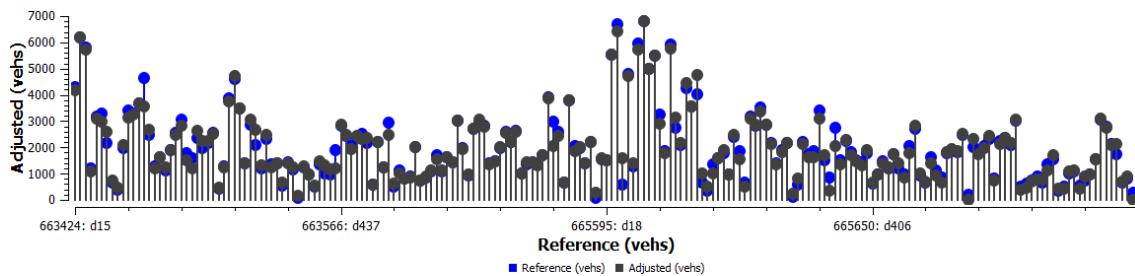


Διάγραμμα 11: Συντελεστής καλής προσαρμογής  $R^2$  μεταξύ των φόρτων του Assignment και των φόρτων των φωρατών για κάθε επανάληψη



Διάγραμμα 12: Γραμμική παλινδρόμηση

Ο συντελεστής  $R^2$  ισούται με 0,973 άρα έχουμε μία πολύ καλή σύγκλιση χωρίς πολύ μεγάλη απόκλιση του αρχικού πίνακα με του προσαρμοσμένου ( $\leq 5\%$ ).



Εικόνα 29: Σύγκριση μεταξύ των φόρτων του Assignment και των φόρτων των φωρατών ανά φωρατή μετά τη διαδικασία

Από την παραπάνω διαδικασία προέκυψε ο προσαρμοσμένος πίνακας προέλευσης-προορισμού, «Adjusted Peak Hour OD».

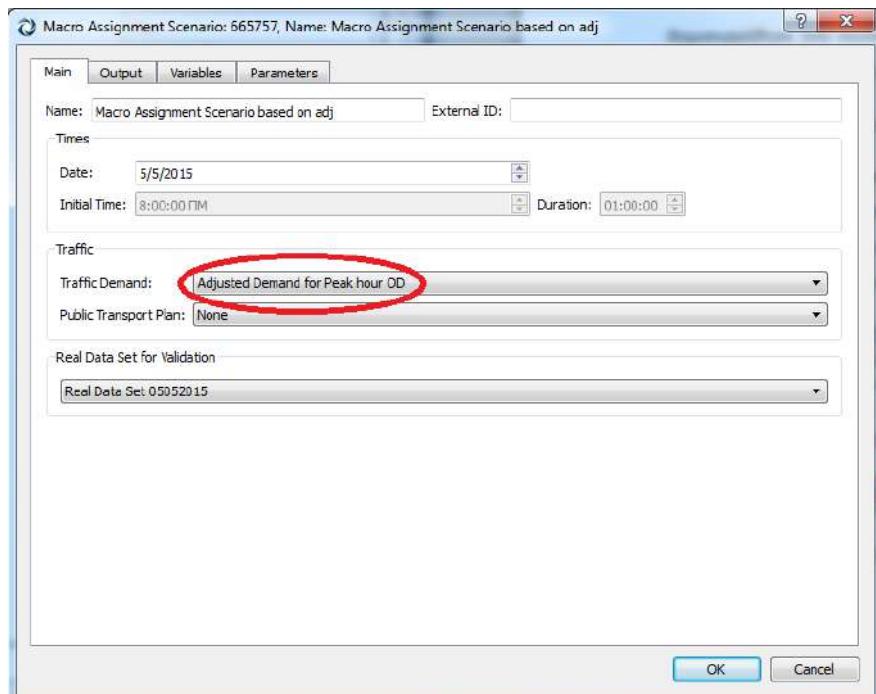
## 2) Macro Assignment Scenario στο περιβάλλον του AIMSUN

Δημιουργήθηκε ένα σενάριο μακροσκοπικής προσομοίωσης για τον καταμερισμό της κυκλοφορίας στο δίκτυο (Macro assignment-Scenario), για το δίκτυο της Αττικής.

Για το σενάριο που δημιουργήθηκε τέθηκαν οι εξής παράμετροι:

- **Επιλογή κυκλοφοριακής ζήτησης**

Επιλέχθηκε ως κυκλοφοριακή ζήτηση (traffic demand) ο πίνακας προέλευσης-προορισμού για την ώρα αιχμής 8:00-9:00π.μ, «Adjusted Peak Hour OD», που προέκυψε από το πρώτο βήμα.



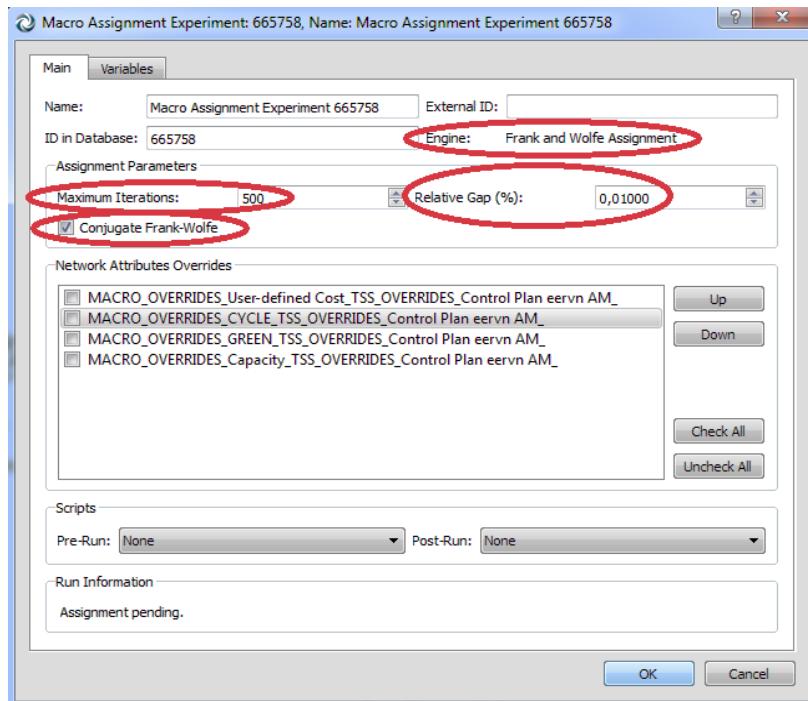
Εικόνα 30: Παράθυρο στο περιβάλλον του AIMSUN-Επιλογή κυκλοφοριακής ζήτησης

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω ο πίνακας προέλευσης-προορισμού της ώρας αιχμής του δικτύου του Ν.Αττικής έχει 1284 στήλες και 1284 γραμμές.

Στο σενάριο που δημιουργήθηκε, δημιουργούμε ένα πείραμα (Macro Assignment Experiment) (εικόνα 30) για το οποίο απαιτείται η ρύθμιση των παραμέτρων που φαίνονται στην εικόνα 31.

Για το πείραμα που δημιουργήθηκε τέθηκαν οι εξής παράμετροι:

- **Επιλογή αλγορίθμου για τον υπολογισμό της ισορροπίας, του αριθμού των επαναλήψεων και της ακρίβειας σύγκλισης**



Εικόνα 31: Παράθυρο στο περιβάλλον του AIMSUN-Επιλογή βασικών παραμέτρων για το Macro Assignment Experiment  
(Πηγή: AIMSUN)

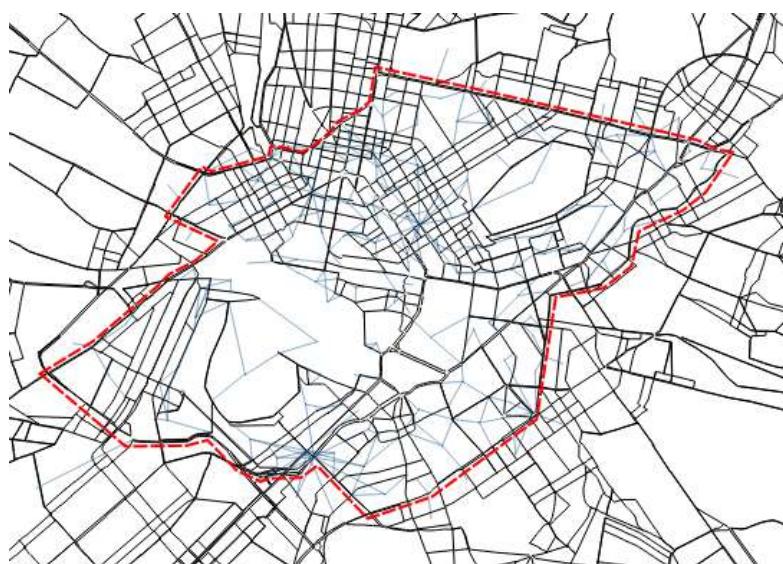
Αρχικά επιλέχθηκε ως αλγόριθμος επίλυσης για την εύρεση της ισορροπίας του δικτύου, ο αλγόριθμος Frank and Wolfe. Όπως έχει περιγραφεί εκτενώς στο τρίτο κεφάλαιο, ο αλγόριθμος αυτός είναι επαναληπτικός. Έτσι επιλέχθηκε ως μέγιστος αριθμός επαναλήψεων (Maximum Iterations) οι 999 επαναλήψεις και ως μέγιστο σφάλμα το 0,01%. Αυτό λειτουργεί ως εξής, ο αλγόριθμος θα σταματήσει κα θα δώσει λύση όταν ολοκληρώσει τις 500 επαναλήψεις με το αντίστοιχο σφάλμα ή εάν επιτευχθεί σφάλμα μικρότερο του 0,01% πριν ολοκληρώσει τις 999 επαναλήψεις, σταματάει στην επανάληψη στην οποία ολοκληρώθηκε. Επίσης επιλέχθηκε η επιλογή Conjugate Frank-Wolfe η οποία δίνει πιο ακριβή λύση.

Έπειτα εκτελέστηκε το πείραμα και βρέθηκε η ισορροπία Nash του δικύου, δηλαδή οι φόρτοι σε κάθε σύνδεσμο που βρίσκονται σε ισορροπία.

### 3) Κατασκευή του μικρού δακτυλίου

Κατασκευάστηκε το υποδίκτυο (subnetwork), δηλαδή η περιοχή του μικρού δακτυλίου και ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία:

- Αρχικά οριοθετήθηκε η περιοχή του μικρού δακτυλίου χρησιμοποιώντας την λειτουργία «Create a Polygon» (Polygon tool) και δημιουργήθηκε με την εντολή «Convert to Subnetwork».

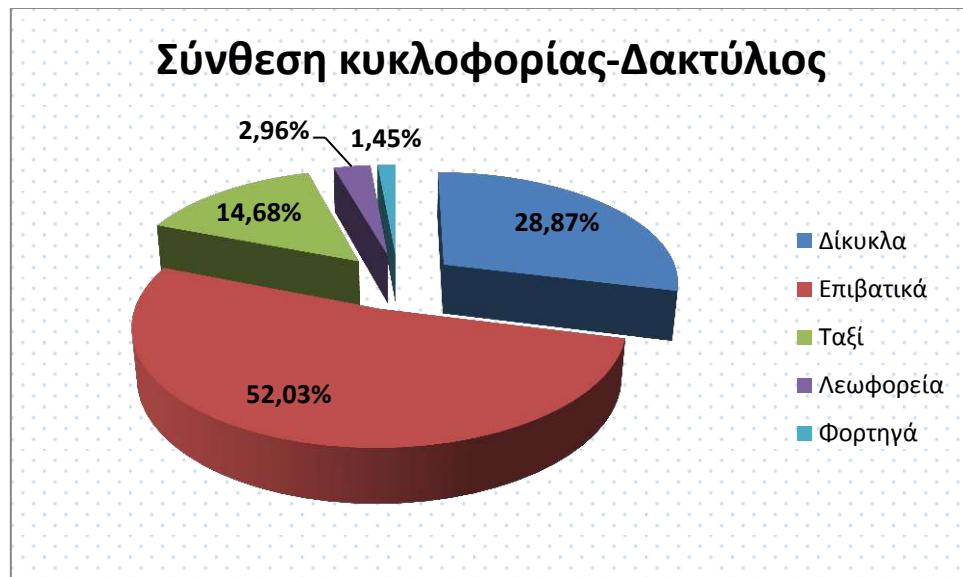


Εικόνα 32: Δημιουργία μικρού δακτυλίου (Πηγή: AIMSUN)

- Έπειτα δημιουργήθηκε ο πίνακας προέλευσης-προορισμού του μικρού δακτυλίου, με την επιλογή «Generate Static Traversal». Ουσιαστικά το πρόγραμμα χρησιμοποιεί το αποτέλεσμα του assignment που περιγράφηκε στο βήμα 2, δηλαδή τις διαδρομές που ξεκινάνε και τελειώνουν μέσα στο δακτύλιο, που ξεκινάνε μέσα και τελειώνουν έξω από αυτόν, τις διαμπερείς διαδρομές και αυτές που ξεκινάνε έξω και τελειώνουν μέσα σ' αυτόν και δημιουργεί τα νέα κεντροειδή του νέου υποδικτύου με τον αντίστοιχο πίνακα προέλευσης-προορισμού (εικόνα 32-πιο πάνω).

#### 4.2.1.2 Σύνθεση κυκλοφορίας του μικρού δακτυλίου

Η σύνθεση κυκλοφορίας του μικρού δακτυλίου φαίνεται στο διάγραμμα 4.1:



Διάγραμμα 13: Σύνθεση κυκλοφορίας μικρού δακτυλίου (Πηγή: ΟΑΣΑ)

Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα 13 από τον αρχικό πίνακα προέλευσης-προορισμού του μικρού δακτυλίου προέκυψαν 5 πίνακες προέλευσης- προορισμού, ένας για κάθε μία κατηγορία οχημάτων. Οι Μ.Ε.Α για κάθε μία κατηγορία οχημάτων φαίνεται στον πίνακα 2.

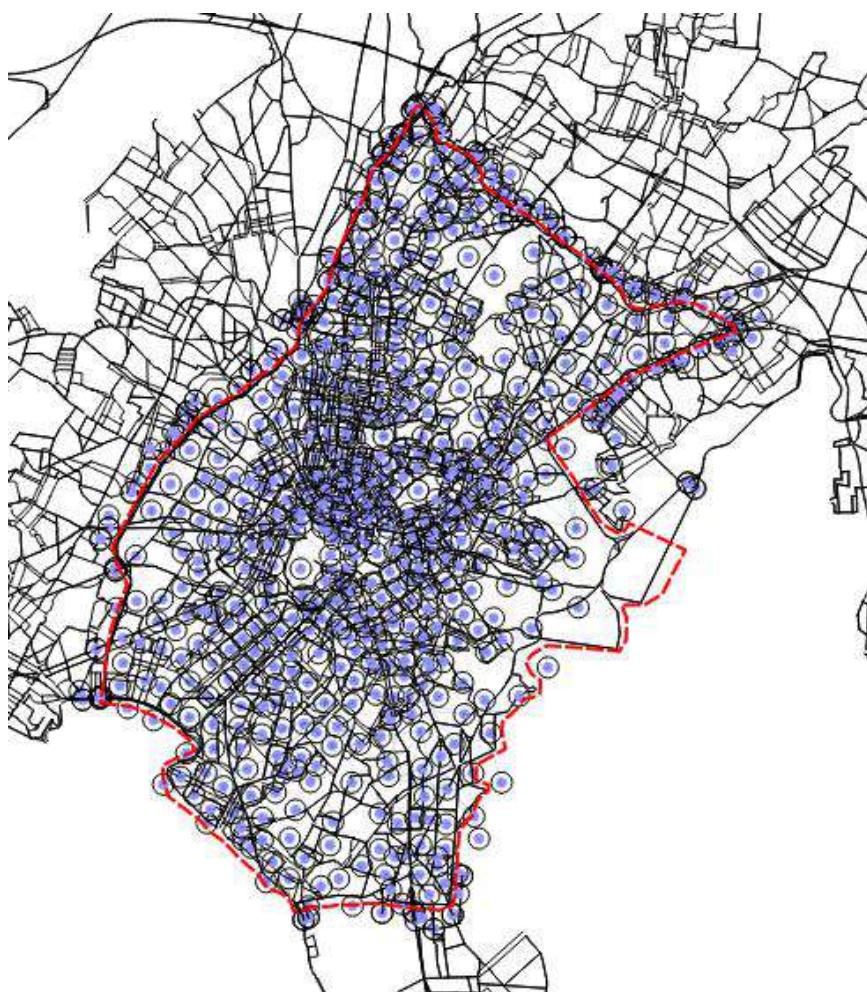
Πίνακας 2: Μονάδες επιβατικών Αυτοκινήτων ανά κατηγορία οχήματος

Κατηγορία οχημάτων	Μ.Ε.Α.
Δίκυκλα	0,5
Επιβατικά	1
Ταξί	1
Λεωφορεία	2,5
Φορτηγά	1,9

## 4.2.2 «Ευρύτερο Δίκτυο»

### 4.2.2.1 Κατασκευή πίνακα προέλευσης-προορισμού για το «Ευρύτερο Δίκτυο»

Για την κατασκευή του πίνακα προέλευσης-προορισμού του ευρύτερου δικτύου ακολουθήθηκε ακριβώς η ίδια διαδικασία με τον μικρό δακτύλιο και προέκυψε ένας πίνακας προέλευσης-προορισμού με μέγεθος 658x658.

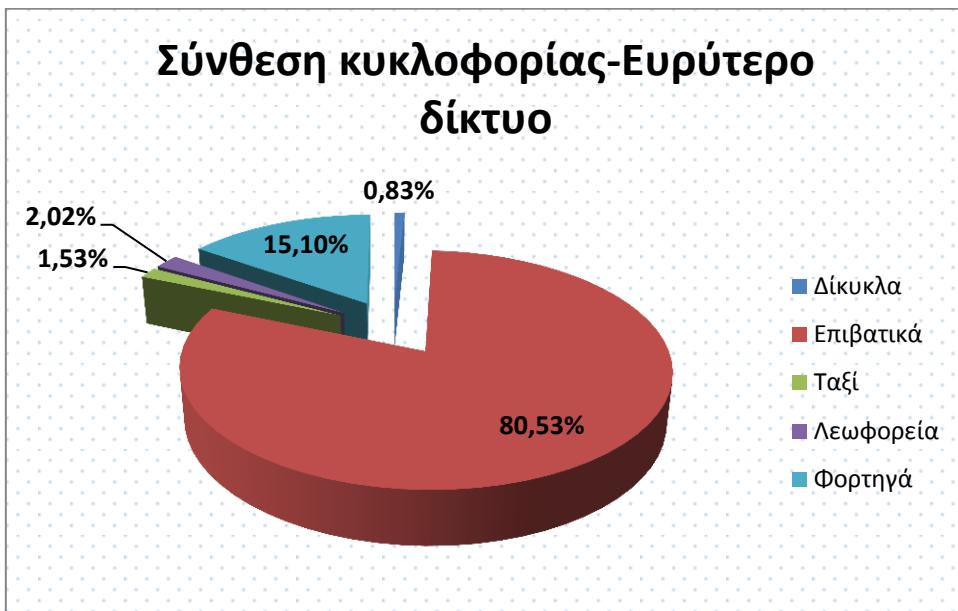


Εικόνα 33: Το ευρύτερο δίκτυο στο περιβάλλον του AIMSUN (Πηγή: AIMSUN)

Τα όρια της περιοχής του «ευρύτερου δικτύου» είναι η λεωφόρος Κηφισού, νότια μέχρι λεωφόρο Ποσειδώνος, ανατολικά μέχρι το ελληνικό, στα όρια του Υμηττού, και την λεωφόρο Κατεχάκη μέχρι βόρεια στα όρια της περιοχής του Χαλανδρίου.

#### 4.2.2.2 Σύνθεση κυκλοφορίας του «Ευρύτερου δικτύου»

Η σύνθεση κυκλοφορίας του ευρύτερου δικτύου φαίνεται στο διάγραμμα 4.2:



Διάγραμμα 14: Σύνθεση κυκλοφορίας ευρύτερου δικτύου (Πηγή: ΟΑΣΑ)

Οι Μ.Ε.Α. είναι οι ίδιες με του πίνακα 4.1.

### 4.3 Διαδικασία υπολογισμού του Τιμήματος της Αναρχίας

Το Τίμημα της Αναρχίας αξιολογεί την αποδοτικότητα ενός δικτύου η οποία φθίνει λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς των χρηστών του δικτύου. Για τον υπολογισμό του δημιουργήθηκαν 2 σενάρια, το Σενάριο Ισορροπίας Nash (Nash Equilibrium Scenario) και το Σενάριο Βέλτιστης Ισορροπίας (System Optimum Scenario). Η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι η ίδια και για τα δύο δίκτυα που μελετήθηκαν.

#### 4.3.1 Σενάριο Ισορροπίας Nash

Στο σενάριο ισορροπίας Nash (Nash Equilibrium Scenario) υπολογίστηκε η ισορροπία Nash του δικτύου, χρησιμοποιώντας τις κανονικές συναρτήσεις κόστους (βλέπε πιο κάτω), δηλαδή οι φόρτοι κάθε συνδέσμου για τους οποίους για κάθε ζεύγος προέλευσης-προορισμού, οι διαδρομές που χρησιμοποιήθηκαν έχουν το

μικρότερο από το σύνολο των δυνατών διαδρομών και ίσο κόστος μεταξύ τους. Δηλαδή έγινε ελαχιστοποίηση του κάθε χρήστη ξεχωριστά όσον αφορά τον χρόνο μετακίνησης ανά ζεύγος προέλευσης-προορισμού και όχι ελαχιστοποίηση ως προς το σύνολο του χρόνου μετακίνησης των χρηστών. Οι παράμετροι που ορίστηκαν για το σενάριο (και το αντίστοιχο πείραμα) είναι:

- Αλγόριθμος υπολογισμού → Frank-Wolfe
- Αριθμός επαναλήψεων = 999
- Σχετικό σφάλμα = 0,01%
- Επιλογή ■ Conjugate Frank-Wolfe

### **Συναρτήσεις κόστους στο σενάριο ισορροπίας Nash**

Χρησιμοποιήθηκαν δύο συναρτήσεις κόστους, η συνάρτηση Bureau of Public Roads (BPR) και η συνάρτηση Conical (βλέπε κεφάλαιο 3).

#### **Συνάρτηση BPR**

Η συνάρτηση ορίζεται ως εξής (σχέση 3.16):

$$c^{BPR}(v) = T_0 \cdot \left( 1 + \alpha \cdot \left( \frac{v}{c} \right)^\beta \right)$$

όπου

$c^{BPR}$  = κόστος σε όρους χρόνου μετακίνησης

$T_0$  = χρόνος μετακίνησης σε ελεύθερη ροή

$v$  = όγκος κυκλοφορίας

$c$  = ικανότητα

$\alpha, \beta$  = παράμετροι

Οι παράμετροι  $\alpha$  και  $\beta$  τέθηκαν 0,2 και 10 αντίστοιχα, οι οποίοι αντιστοιχούν σε δρόμους με φωτεινή σηματοδότηση (signalized streets).

```

def vdf(context, section, funcVolume):
    volume = funcVolume.getVolume()
    capacity = section.getCapacity()

    time = ( (0.06 * section.length3D()) / section.getSpeed() ) * ( 1 + 0.2 * ( volume / capacity ) ** 10 )

    return time

```

Εικόνα 34: Συνάρτηση BPR σε γλώσσα προγραμματισμού Python (Πηγή: AIMSUN)

### Συνάρτηση *Conical*

Η συνάρτηση ορίζεται ως εξής (σχέση 3.17):

$$c^{Conical}(v) = T_0 \cdot \left( 2 + \sqrt{\beta^2 \left( 1 - \frac{v}{c} \right)^2 + \alpha^2} - \beta \left( 1 - \frac{v}{c} \right) - \alpha \right)$$

όπου

$c^{Conical}$  = κόστος σε όρους χρόνου μετακίνησης

$T_0$  = χρόνος μετακίνησης σε ελεύθερη ροή

$v$  = όγκος κυκλοφορίας

$c$  = πρακτική ικανότητα (πολύ συχνά προσαρμόζεται στον λόγο

$$\alpha, \beta = \text{παράμετροι και } a = \frac{2\beta-1}{2\beta-2}$$

Οι παράμετροι  $\alpha$  και  $\beta$  τέθηκαν 1,03 και 18,8 αντίστοιχα, οι οποίοι αντιστοιχούν σε δρόμους με φωτεινή σηματοδότηση. Έτσι τα αποτελέσματα είναι άμεσα συγκρίσιμα με τα αντίστοιχα της συνάρτησης BPR.

```

def vdf(context, section, funcVolume):
    volume = funcVolume.getVolume()
    capacity = section.getCapacity()
    import math

    time = ((0.06 * section.length3D()) / section.getSpeed() ) *
        *( 2 + math.sqrt( 353.44 * (1 - (volume / capacity)) ** 2 + 1.0609) - 18.8 * (1 - (volume / capacity)) - 1.03)

    return time

```

Εικόνα 35: Συνάρτηση Conical σε γλώσσα προγραμματισμού Python (Πηγή: AIMSUN)

#### 4.3.2 Σενάριο Βέλτιστης Ισορροπίας

Στο σενάριο βέλτιστης ισορροπίας (System Optimum Scenario) υπολογίστηκε η ισορροπία Nash του δικτύου, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες συναρτήσεις οριακού κόστους (βλέπε πιο κάτω), δηλαδή οι φόρτοι κάθε συνδέσμου για τους οποίους ελαχιστοποιείται ο συνολικός χρόνος μετακίνησης στο δίκτυο τον οποίο βιώνουν οι χρήστες. Χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες παράμετροι νε το σενάριο ισορροπίας Nash.

#### Συναρτήσεις οριακού κόστους στο σενάριο βέλτιστης ισορροπίας

Χρησιμοποιήθηκαν αντίστοιχα δύο συναρτήσεις οριακού κόστους, η συνάρτηση οριακού κόστους της συνάρτησης Bureau of Public Roads (BPR) και η συνάρτηση οριακού κόστους της συνάρτησης Conical (βλέπε κεφάλαιο 3).

#### Συνάρτηση οριακού κόστους της συνάρτησης BPR

Η συνάρτηση οριακού κόστους της συνάρτησης BPR ορίζεται ως εξής (σχέση 3.19):

$$c^{SO_{BPR}}(v) = T_0 \cdot \left[ 1 + \alpha \cdot (\beta + 1) \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^\beta \right]$$

Οι παράμετροι  $\alpha$  και  $\beta$  έχουν ίδιες τιμές με αυτές που ορίστηκαν για την συνάρτηση κόστους BPR.

```

def vdf(context, section, funcVolume):

    volume = funcVolume.getVolume()
    capacity = section.getCapacity()

    time = ((0,06 * section.length30()) / section.getSpeed()) * ( 1 + 2.2 * ( volume / capacity ) ** 10 )

    return time

```

**Εικόνα 36: Συνάρτηση οριακού κόστους της συνάρτησης BPR σε γλώσσα προγραμματισμού Python (Πηγή: AIMSUN)**

### **Συνάρτηση οριακού κόστους της συνάρτησης *Conical***

Η συνάρτηση οριακού κόστους της συνάρτησης Conical ορίζεται ως εξής (σχέση 3.20):

$$c^{SO_{Conical}}(v) = T_0 \cdot \left( 2 - \alpha - \beta \cdot \left( 1 - 2 \frac{v}{c} \right) + \frac{\alpha^2 \cdot \left( 1 - \frac{v}{c} \right) \cdot \left( 1 - 2 \frac{v}{c} \right) + \beta^2}{\sqrt{\beta^2 \cdot \left( 1 - \frac{v}{c} \right)^2 + \alpha^2}} \right)$$

Οι παράμετροι  $\alpha$  και  $\beta$  έχουν ίδιες τιμές με αυτές που ορίστηκαν για την συνάρτηση κόστους Conical.

```

def vdf(context, section, funcVolume):

    volume = funcVolume.getVolume()
    capacity = section.getCapacity()
    import math

    time = (((0,06 * section.length30()) / section.getSpeed()) * ( 2 + math.sqrt( 353,44 * ( 1 - ( volume / capacity ) ** 2 + 1,0609 ) - 18,0 *
        * ( 1 - ( volume / capacity ) - 1,03 ) ) + ( ( 18,8 * ((0,06 * section.length30()) / section.getSpeed()) * volume ) / capacity ) *
        * ( ( 18,8 * ( (volume / capacity) - 1 ) ) / ( math.sqrt ( 353,44 * ( 1 - ( volume/capacity)**2 + 1,0609 ) ) + 1 ) )
    return time

```

**Εικόνα 37: Συνάρτηση οριακού κόστους της συνάρτησης Conical σε γλώσσα προγραμματισμού Python (Πηγή: AIMSUN)**

#### 4.3.3 Υπολογισμός του Τιμήματος της Αναρχίας

Ο υπολογισμός του Τιμήματος της Αναρχίας έγινε και για τα δύο δίκτυα χρησιμοποιώντας και τις δύο συναρτήσεις κόστους που προαναφέρθηκαν για διάφορα επίπεδα ζήτησης. Ως επίπεδο ζήτησης 100%, θεωρήθηκε εκείνο της ώρας αιχμής ενώ τα υπόλοιπα είναι ποσοστά της ωριαίας ζήτησης αιχμής. Ακολουθήθηκε η παρακάτω διαδικασία:

##### Βήμα 1<sup>o</sup>

Υπολογισμός του συνολικού χρόνου μετακίνησης των χρηστών του δικτύου, από το Σενάριο Ισορροπίας Nash, το οποίο δίνει ως αποτέλεσμα τον φόρτο ανά σύνδεσμο καθώς και τον χρόνο μετακίνησης ανά Μ.Ε.Α. και ανά σύνδεσμο.

$$\Sigma.X.M^{Nash} = \sum_{i=1}^n [c_i^{BPR \text{ ή } Conical} (\varphi\sigma\tau\omega_i^{Nash}) \times (\varphi\sigma\tau\omega_i^{Nash})] \quad (3.21))$$

Όπου  $\Sigma.X.M^{Nash}$  → ο συνολικός χρόνος μετακίνησης των χρηστών του δικτύου

που βρίσκονται σε Ισορροπία Nash

$c_i^{BPR \text{ ή } Conical}$  → το κόστος ανά Μ.Ε.Α. (χρόνος μετακίνησης) στον σύνδεσμο i

χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις κόστους BPR ή Conical

(σχέση 3.16 και 3.17 αντίστοιχα)

$\varphi\sigma\tau\omega_i^{Nash}$  → ο φόρτος σε Μ.Ε.Α. στον σύνδεσμο i που προκύπτει από το

Σενάριο Ισορροπίας Nash

n → ο συνολικός αριθμός των συνδέσμων του δικτύου

## Βήμα 2<sup>ο</sup>

Υπολογισμός του ελάχιστου συνολικού χρόνου μετακίνησης των χρηστών του δικτύου, από το Σενάριο Βέλτιστης Ισορροπίας, το οποίο δίνει ως αποτέλεσμα τον βέλτιστο φόρτο ανά σύνδεσμο.

$$\Sigma.X.M^{SO} = \sum_{i=1}^n [c_i^{BPR \text{ } \& \text{ } Conical} (\varphi\sigma\tau\varsigma_i^{SO}) \times (\varphi\sigma\tau\varsigma_i^{SO})] \quad (3.22)$$

Όπου  $\Sigma.X.M^{SO}$  → ο ελάχιστος συνολικός χρόνος μετακίνησης των χρηστών του

δικτύου που βρίσκονται σε βέλτιστη ισορροπία

$c_i^{BPR \text{ } \& \text{ } Conical}$  → το κόστος ανά Μ.Ε.Α. (χρόνος μετακίνησης) στον σύνδεσμο i

χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις κόστους BPR ή Conical

(σχέση 3.16 και 3.17 αντίστοιχα)

$\varphi\sigma\tau\varsigma_i^{SO}$  → ο φόρτος σε Μ.Ε.Α. στον σύνδεσμο i που προκύπτει από το

Σενάριο Βέλτιστης Ισορροπίας (βέλτιστες ροές)

$n$  → ο συνολικός αριθμός των συνδέσμων του εκάστοτε δικτύου

**“Οι βέλτιστες και οι ροές Nash είναι το ίδιο πράγμα, απλά με διαφορετικές συναρτήσεις κόστους.”**

## Βήμα 3<sup>ο</sup>

Το Τίμημα της Αναρχίας υπολογίζεται από την σχέση:

$$PoA = \frac{\Sigma.X.M^{Nash}}{\Sigma.X.M^{SO}} \quad (3.23)$$

## 4.4 Πρόβλημα εντοπισμού του Παράδοξου του Braess

Στην βιβλιογραφία έχει μελετηθεί εκτενώς το παράδοξο του Braess, παρόλα αυτά τα αποτελέσματα κάποιων ερευνών είναι αντικρουόμενα. Επιπροσθέτως, το πρόβλημα εντοπισμού του παράδοξου σε θεωρητικό επίπεδο σε δίκτυα ισορροπίας Wardrop με σταθερή και εξωγενή ζήτηση είναι πολύ ασταθές. Σε πραγματικά δίκτυα έχει γίνει ελάχιστη έρευνα, και η επιρροή που έχει στο Τίμημα της Αναρχίας όσον αφορά την μείωση του, δεν έχει μελετηθεί ακόμα.

### 4.4.1 Διαδικασία εντοπισμού μεμονωμένων συνδέσμων Braess

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από το παράδοξο του Braess (Braess's paradox) είναι το εξής: «Σε ότι έχει να κάνει με την εγωιστική επιλογή διαδρομών (selfish routing), κάποιες κατασκευαστικές βελτιώσεις στο δίκτυο μπορούν να οδηγήσουν σε μείωση της αποτελεσματικότητας του δικτύου». Στο παράδειγμα του παράδοξου του Braess (βλέπε Εισαγωγή), από ένα αρχικό δίκτυο, προσθέτοντας ένα σύνδεσμο (μηδενικού κόστους) προκύπτει ένα τελικό δίκτυο του οποίου το συνολικό κόστος είναι μεγαλύτερο από του αρχικού παρά την αύξηση της ικανότητας του δικτύου. Έστω ότι ένα πραγματικό δίκτυο αντιστοιχεί στο τελικό δίκτυο του παράδοξου του Braess, και ότι το δίκτυο που προκύπτει από την αφαίρεση μίας ακμής (ενός οποιοδήποτε δρόμου) αντιστοιχεί στο αρχικό δίκτυο του παράδοξου. Εάν ο συνολικός χρόνος μετακίνησης του αρχικού δικτύου (πραγματικό δίκτυο στο οποίο έχει αφαιρεθεί μία ακμή) είναι μικρότερος του τελικού δικτύου (πραγματικό δίκτυο), τότε το παράδοξο ισχύει και προφανώς η αφαίρεση της ακμής οδηγεί σε καλυτέρευση των κυκλοφοριακών συνθηκών και θα λέγεται ότι ο σύνδεσμος εκείνος «πάσχει» από το παράδοξο.

Για τον εντοπισμό των συνδέσμων Braess, δηλαδή των συνδέσμων εκείνων που «πάσχουν» από το παράδοξο, ακολουθήθηκε η παρακάτω διαδικασία:

### Βήμα 1<sup>ο</sup>

Για το επίπεδο ζήτησης που αντιστοιχεί στο μέγιστο Τίμημα της Αναρχίας και για την ζήτηση ώρας αιχμής, υπολογίστηκε ο συνολικός χρόνος μετακίνησης  $\Sigma.X.M.^{Nash}_{Δακτύλιος}$  για τον δακτύλιο (χωρίς να γίνει καμία παρέμβαση-τελικό δίκτυο) και για τις δύο συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν (BPR και Conical) ως συναρτήσεις κόστους.

### Βήμα 2<sup>ο</sup>

Έπειτα κλείνοντας τους συνδέσμους  $(1 \dots i)$ , έναν κάθε φορά σε κάθε σενάριο (σενάριο Nash για το επίπεδο ζήτησης που αντιστοιχεί στο μέγιστο Τίμημα και για την ζήτηση ώρας αιχμής), οι οποίοι έχουν χωρητικότητα που αντιστοιχεί σε μία λωρίδα, υπολογίστηκε ο συνολικός χρόνος μετακίνησης του δικτύου εκείνου που προκύπτει από την αφαίρεση του συνδέσμου,  $\Sigma.X.M.^{Nash}_{[Δακτύλιος - Σύνδεσμος i]}$ . Το δεύτερο βήμα έγινε επίσης και για τις 2 συναρτήσεις.

### Βήμα 3<sup>ο</sup>

Υπολογισμός της ποσότητας:

$$\Delta T_i = \Sigma.X.M.^{Nash}_{Δακτύλιος} - \Sigma.X.M.^{Nash}_{[Δακτύλιος - Σύνδεσμος i]}$$

- Αν  $\Delta T_i > 0$ , ο σύνδεσμος  $i$  δεν «πάσχει» από το παράδοξο.
- Αν  $\Delta T_i < 0$ , ο σύνδεσμος  $i$  «πάσχει» από το παράδοξο.

Να σημειωθεί ότι ελέγχθηκαν σύνδεσμοι με χωρητικότητα μίας λωρίδας με φόρτο στο σενάριο Nash μεγαλύτερο από το φόρτο στο σενάριο βέλτιστης ισορροπίας για περιορισμό του φόρτου εργασίας, έλλειψη τεχνικής γνώσης, καθώς και για πιο ορθολογικό κλείσιμο των δρόμων.



# 5. Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης όσον αφορά στο Τίμημα της Αναρχίας και στο Παράδοξο του Braess καθώς και ο σχολιασμός αυτών των αποτελεσμάτων.

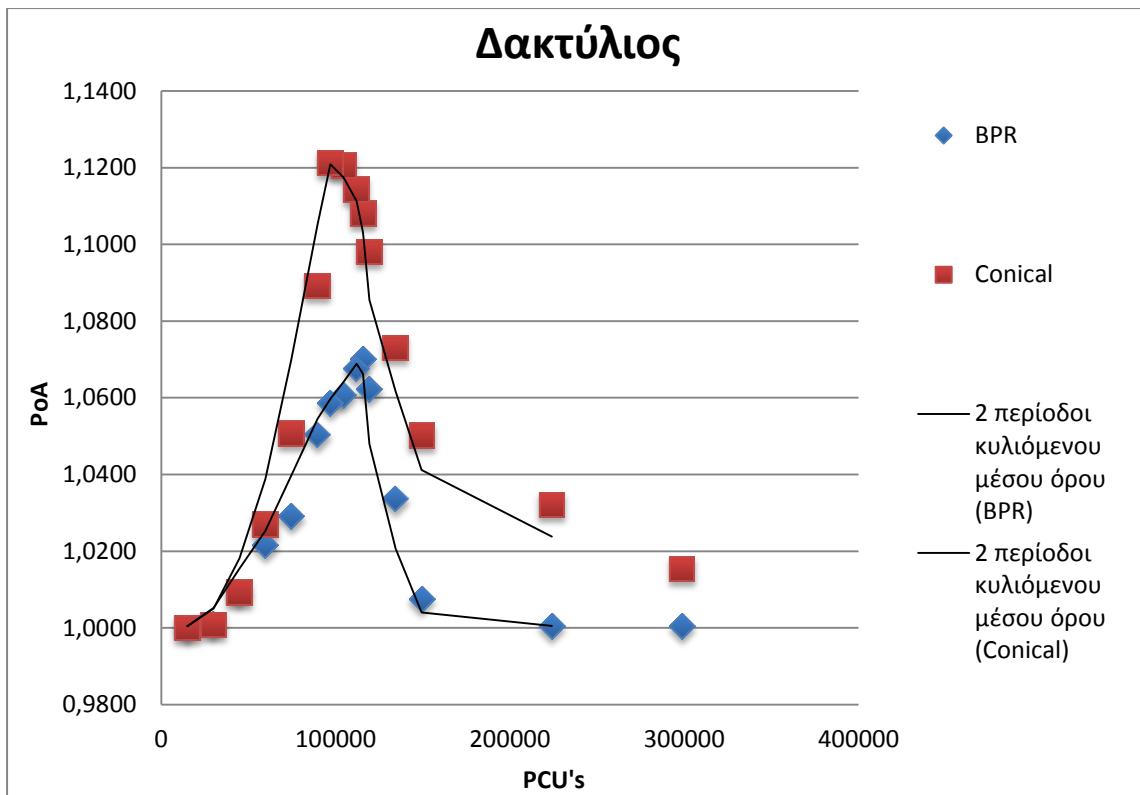
## 5.1 Το Τίμημα της Αναρχίας

### 5.1.1 Αποτελέσματα για τον Δακτύλιο

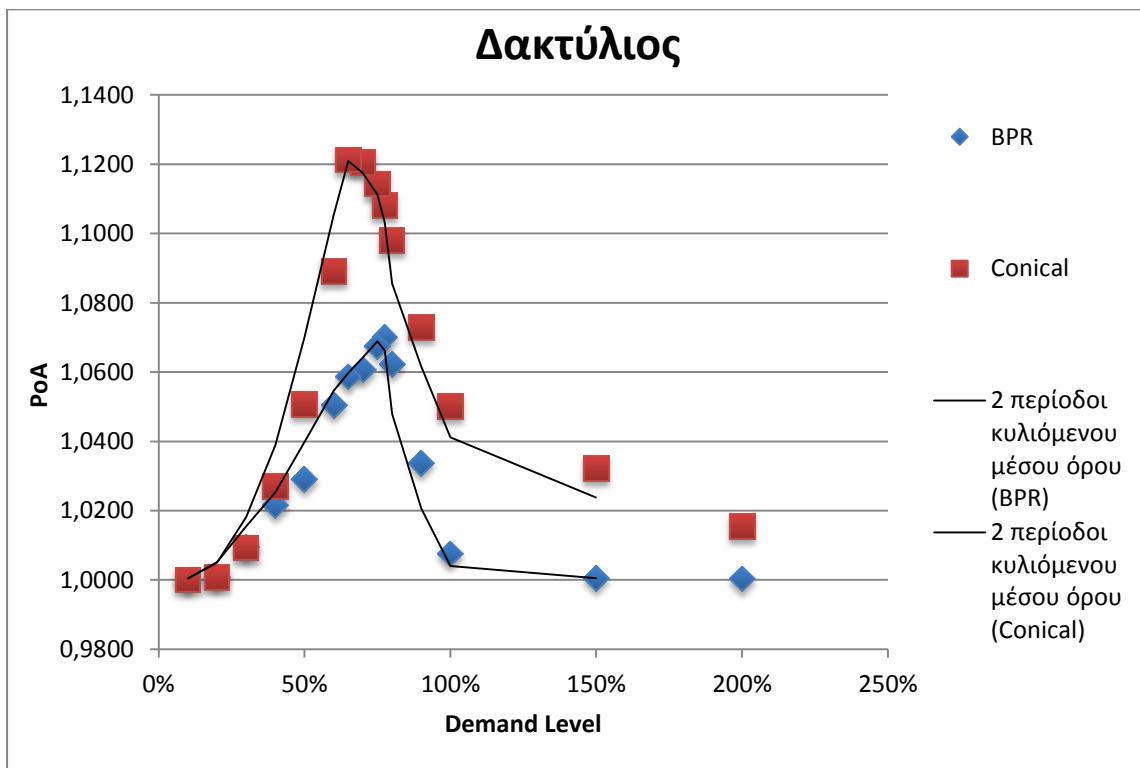
Υπολογίστηκε το Τίμημα της Αναρχίας για το δίκτυο του μικρού δακτυλίου και για τις δύο συναρτήσεις για τα εξής επίπεδα ζήτησης της κυκλοφορίας: 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 65%, 70% 75%, 77,50%, 80%, 90%, 100%. Στον πίνακα 3 φαίνονται τα αποτελέσματα.

Πίνακας 3: Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας - Δακτύλιος

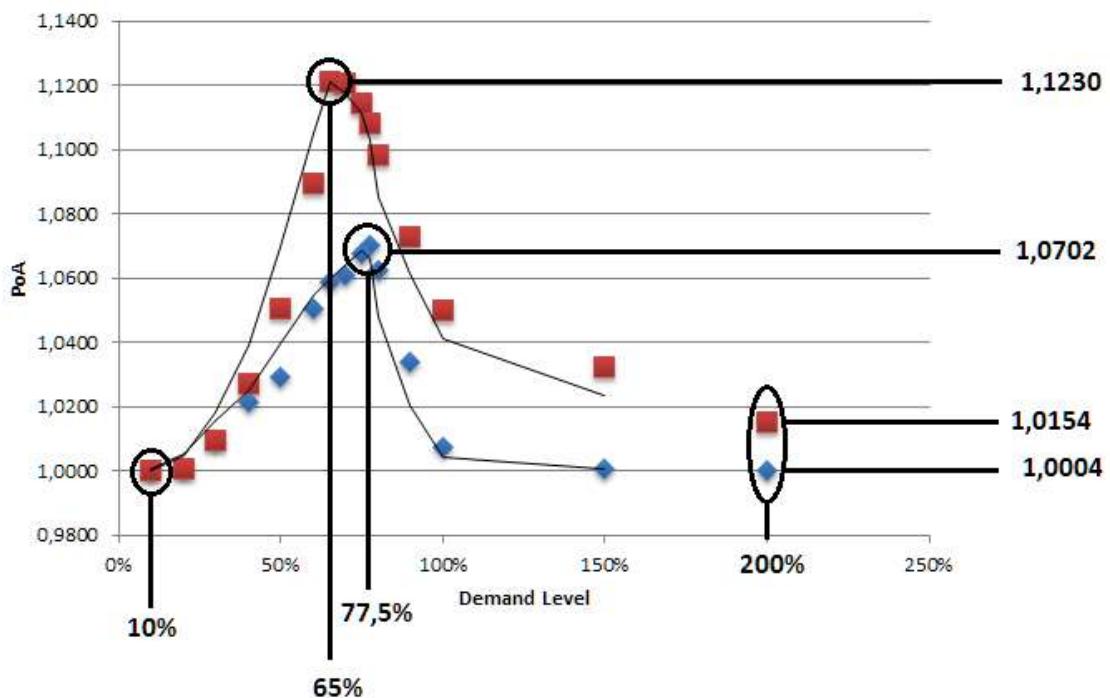
Traffic Demand Level	PCU's	PoA (Conical Function)	PoA (BPR Function)
200%	298725	1,0154	1,0004
150%	224044	1,0321	1,0006
100%	149357	1,0502	1,0077
90%	134421,3	1,0730	1,0337
80%	119485,6	1,0980	1,0622
<b>77,50%</b>	<b>115751,7</b>	<b>1,1082</b>	<b>1,0702</b>
75%	112017,8	1,1143	1,0675
70%	104549,9	1,1206	1,0607
<b>65%</b>	<b>97082,05</b>	<b>1,1230</b>	1,0587
60%	89614,2	1,0892	1,0504
50%	74678,5	1,0507	1,0291
40%	59742,8	1,0270	1,0215
30%	44807,1	1,0093	1,0094
20%	29871,4	1,0008	1,0009
10%	14935,7	1,0000	1,0000



Διάγραμμα 15: Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει των Μ.Ε.Α.-Δακτύλιος



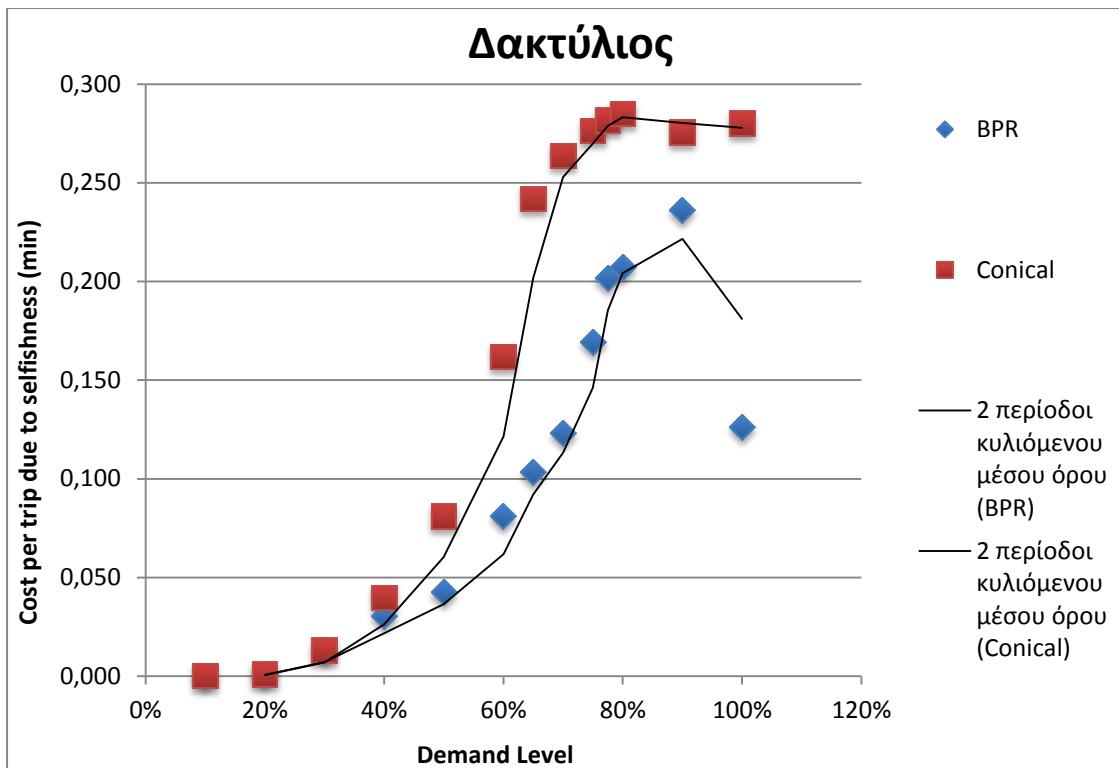
Διάγραμμα 16: Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Demand Level)-Δακτύλιος



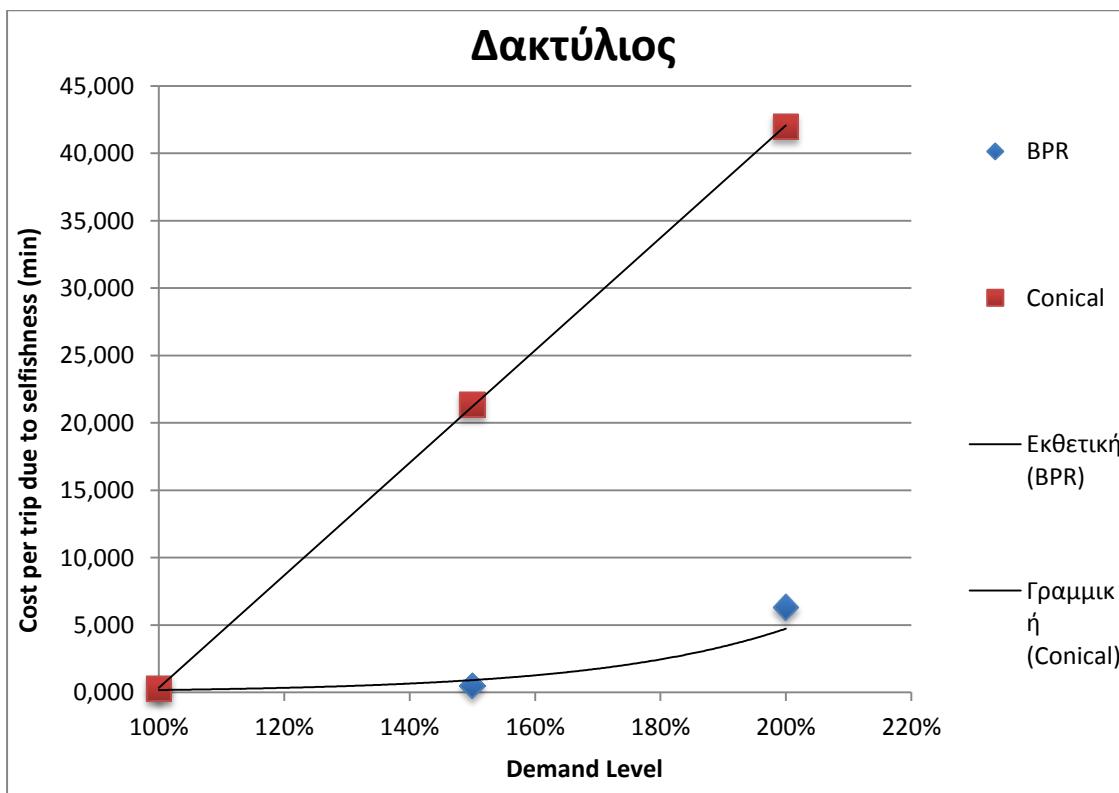
Εικόνα 38: Παρατηρήσεις στα αποτελέσματα του Τιμήματος της Αναρχίας - Δακτύλιος

Πίνακας 4: Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης-Δακτύλιος

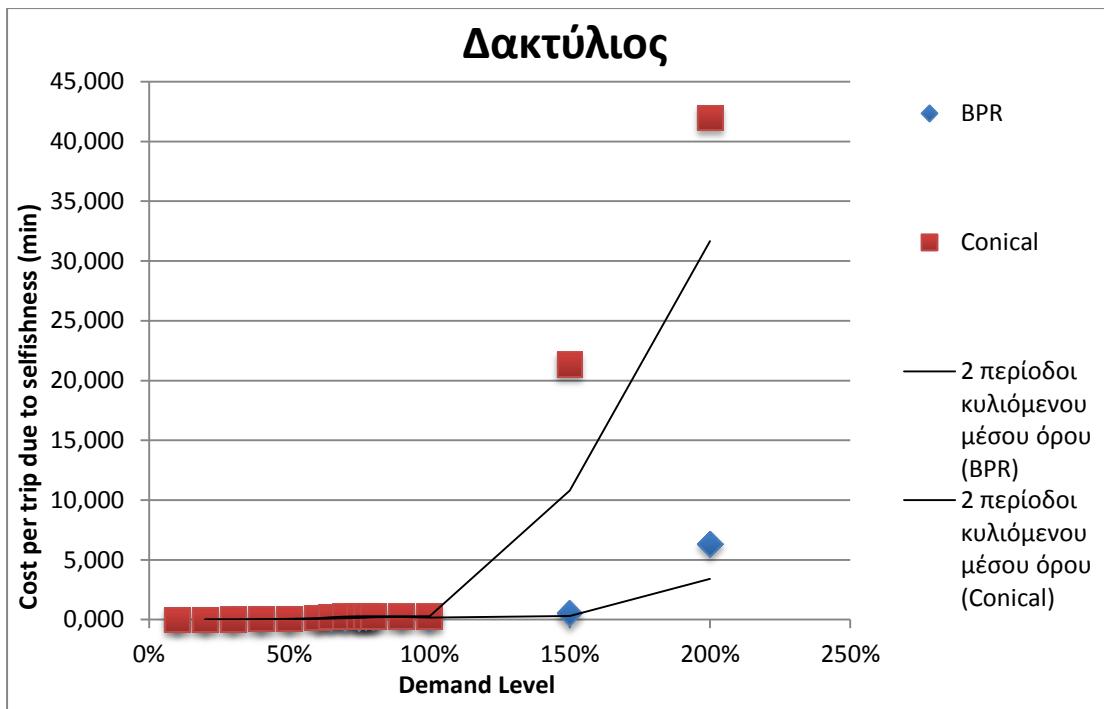
Demand Level (%)	Cost per trip due to selfishness (min)	
	BPR	Conical
10%	1,145E-06	6,436E-05
20%	1,210E-03	1,018E-03
30%	1,298E-02	1,304E-02
40%	3,051E-02	3,966E-02
50%	4,252E-02	8,104E-02
60%	8,100E-02	1,619E-01
65%	1,033E-01	<b>2,420E-01</b>
70%	1,230E-01	2,637E-01
75%	1,262E-01	2,763E-01
<b>77,50%</b>	<b>1,693E-01</b>	2,816E-01
80%	2,015E-01	2,849E-01
90%	2,071E-01	2,757E-01
100%	2,360E-01	2,801E-01
150%	5,083E-01	2,134E+01
200%	6,338E+00	4,200E+01



Διάγραμμα 17: Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Ζήτηση $\leq$ 100%)-Δακτύλιος



Διάγραμμα 18: Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Ζήτηση $\geq$ 100%)-Δακτύλιος



**Διάγραμμα 19: Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Συγκεντρωτικό)-Δακτύλιος**

Όπως φαίνεται στα διαγράμματα 15, 16, 17, 18 και 19 υπάρχουν κάποιες ομοιότητες αλλά και αρκετές διαφορές μεταξύ των συναρτήσεων.

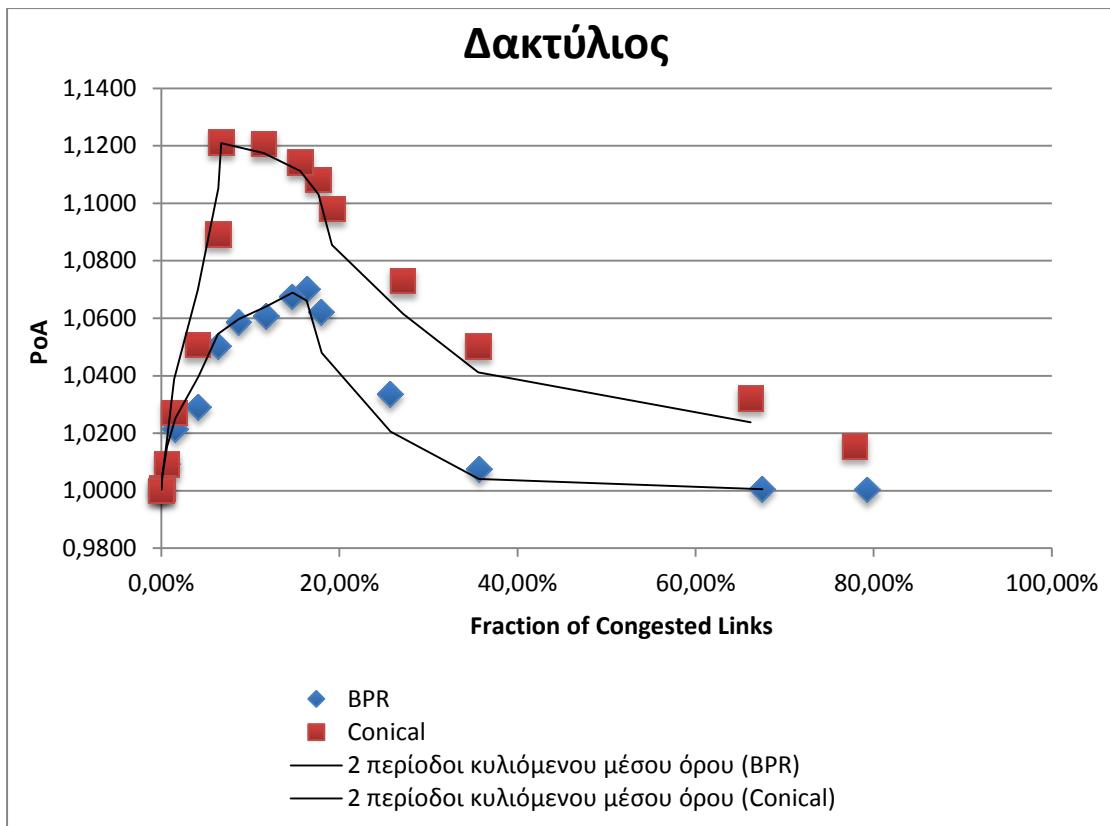
### Συνάρτηση BPR

- Παρατηρείται ένας αριστερός και ένας δεξιός κλάδος. Για χαμηλούς φόρτους το Τίμημα της Αναρχίας παίρνει πολύ χαμηλές τιμές (πολύ κοντά στο 1). Καθώς αυξάνεται η ζήτηση, αυξάνεται και παίρνει την μέγιστη τιμή του, για ζήτηση στο 77,5% της ζήτησης αιχμής, ενώ για περαιτέρω αύξηση της ζήτησης μειώνεται και για την ζήτηση αιχμής (100%) παίρνει την τιμή 1,0075, φτάνοντας πολύ κοντά στο 1 (1,0004) για 200% επίπεδο ζήτησης.
- Το Τίμημα της Αναρχίας μεγιστοποιείται και παίρνει την τιμή 1,0702 για το 77,5% της ζήτησης ώρας αιχμής που σημαίνει ότι οι χρήστες του δικτύου σπαταλάνε το 7,02% του συνολικού χρόνου μετακίνησής τους και πιο συγκεκριμένα  $0,0702 \times 332400 = 23335$  λεπτά, λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς που επιδεικνύουν και της έλλειψης συνεργασίας, που αντιστοιχεί σε 0,2 λεπτά ανά ταξίδι.

- Ενδιαφέρον στοιχείο (βλέπε διάγραμμα 17, 18 και 19) είναι ότι το μέγιστο κόστος (επιπλέον χρόνος μετακίνησης σε λεπτά) ανά ταξίδι που οφείλεται στην εγωιστική συμπεριφορά δεν αντιστοιχεί στο μέγιστο Τίμημα δηλαδή στο 77,5 % της ζήτησης ( $PoA=1,0702$ ). Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 4.5 υπάρχει τοπικά στο 100% μία ελαφριά μείωση και για επίπεδα ζήτησης μεγαλύτερα του 100%, η συσχέτιση είναι αύξουσα φτάνοντας περίπου τα 6,4 λεπτά ανά ταξίδι.

### **Συνάρτηση Conical**

- Παρατηρείται ένας αριστερός και ένας δεξιός κλάδος. Για χαμηλούς φόρτους το Τίμημα της Αναρχίας παίρνει πολύ χαμηλές τιμές. Καθώς αυξάνεται η ζήτηση, αυξάνεται και παίρνει την μέγιστη τιμή του, για ζήτηση στο 65% της ζήτησης αιχμής, ενώ για περαιτέρω αύξηση της ζήτησης μειώνεται, και για την ζήτηση αιχμής (100%) παίρνει την τιμή 1,0502, φτάνοντας στο 1,0154 για 200% επίπεδο ζήτησης.
- Μεγιστοποιείται και παίρνει την τιμή 1,1230 για το 65% της ζήτησης αιχμής που σημαίνει ότι οι χρήστες του δικτύου σπαταλάνε το 12,30% του συνολικού χρόνου μετακίνησής τους, και πιο συγκεκριμένα  $0,1230 \times 193800 = 23838$  λεπτά, λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς που επιδεικνύουν και της έλλειψης συνεργασίας, που αντιστοιχεί σε 0,24 λεπτά ανά ταξίδι.
- Ομοίως με την συνάρτηση BPR, (βλέπε διάγραμμα 17, 18 και 19) το μέγιστο κόστος ανά ταξίδι που οφείλεται στην εγωιστική συμπεριφορά δεν αντιστοιχεί στην ζήτηση για το μέγιστο Τίμημα της Αναρχίας δηλαδή στο 65% ( $PoA=1,1230$ ). Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 4.5 υπάρχει τοπικά στο 90% μία ελαφριά μείωση και για επίπεδα ζήτησης μεγαλύτερα του 90%, η συσχέτιση είναι αύξουσα φτάνοντας περίπου τα 42 λεπτά ανά ταξίδι.



Διάγραμμα 20: Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του ποσοστού των συμφορημένων συνδέσμων-Δακτύλιος

Πίνακας 5: Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του ποσοστού των συμφορημένων συνδέσμων - Δακτύλιος

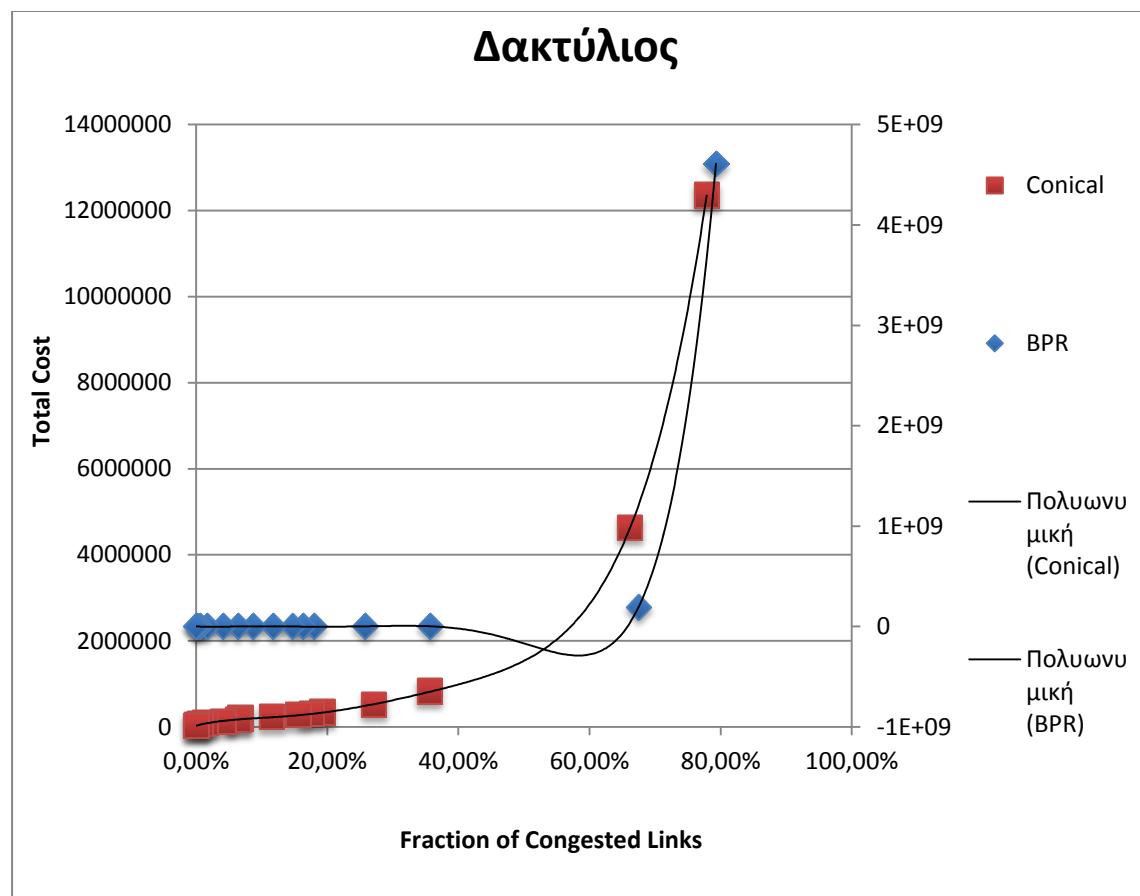
Traffic Demand Level (%)	Fraction of congested links (BPR)	Fraction of congested links (Conical)	PoA (BPR)	PoA (Conical)
200%	79,27%	77,88%	1,0004	1,0154
150%	67,50%	66,20%	1,0006	1,0321
100%	36%	35,59%	1,0077	1,0502
90%	25,74%	27,13%	1,0337	1,0730
80%	<b>18,00%</b>	19,18%	1,0622	1,0980
<b>77,50%</b>	<b>16,34%</b>	17,65%	<b>1,0702</b>	1,1082
75%	14,73%	15,61%	1,0675	1,1143
70%	11,80%	11,52%	1,0607	1,1206
<b>65%</b>	<b>8,68%</b>	<b>6,71%</b>	1,0587	<b>1,1230</b>
60%	6,35%	6,42%	1,0504	1,0892
50%	4,16%	4,10%	1,0291	1,0507
40%	1,60%	1,45%	1,0215	1,0270
30%	0,65%	0,65%	1,0094	1,0093
20%	0,10%	0,10%	1,0009	1,0008
10%	0,00%	0%	1,0000	1,0000

### **Συνάρτηση BPR**

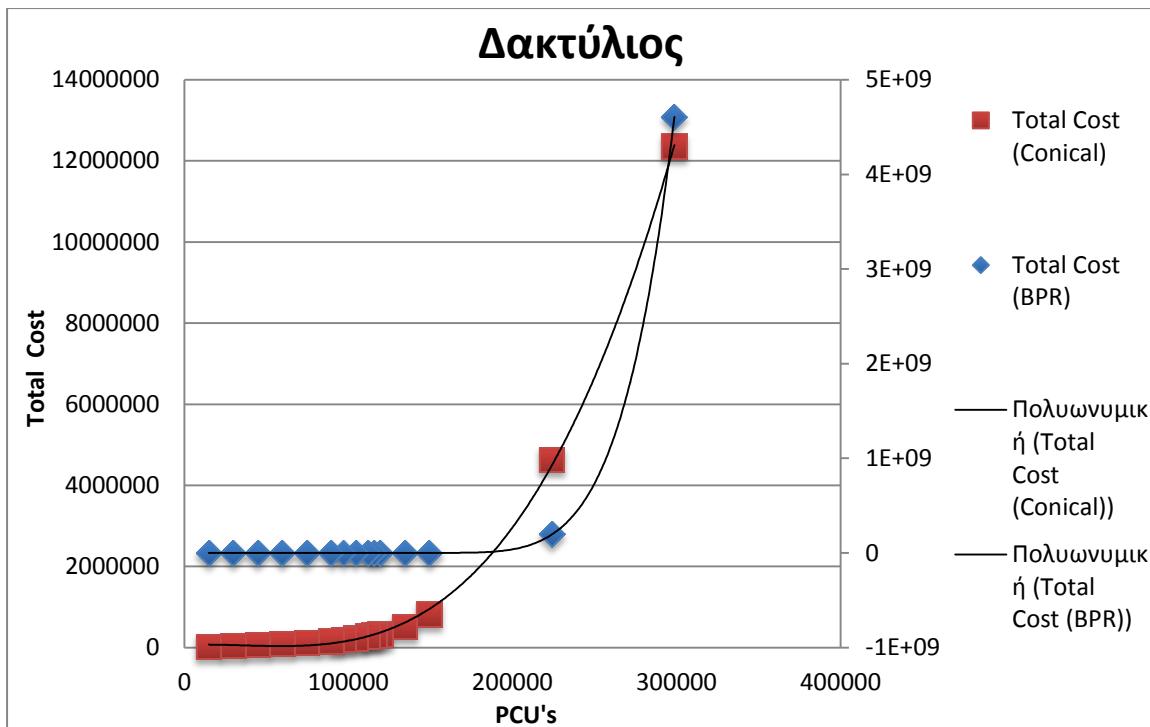
Το Τίμημα της Αναρχίας μεγιστοποιείται όταν το 16,34% των συνδέσμων είναι συμφορημένο (βλέπε πίνακα 5 και διάγραμμα 20). Συμφορημένοι θεωρήθηκαν οι σύνδεσμοι με λόγο  $v/c > 0,85$ .

### **Συνάρτηση Conical**

Ο RoA μεγιστοποιείται όταν το 6,71% των συνδέσμων είναι συμφορημένο (βλέπε πίνακα 5 και διάγραμμα 20). Συμφορημένοι θεωρήθηκαν οι σύνδεσμοι με λόγο  $v/c > 0,85$ .



Διάγραμμα 21: Συνολικό κόστος συναρτήσει των Μ.Ε.Α. - Δακτύλιος



Διάγραμμα 22: Συνολικό κόστος συναρτήσει των συμφορημένων συνδέσμων – Δακτύλιος

Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα 4.5 και 4.6 η συνάρτηση BPR είναι πολύ πιο ευαίσθητη σε υψηλούς φόρτους σε σχέση με την συνάρτηση Conical. Για φόρτους μέχρι 120000 Μ.Ε.Α. το συνολικό κόστος του δικτύου είναι περίπου το ίδιο για τις δύο συναρτήσεις, ενώ για τιμές μεγαλύτερες των 135000 Μ.Ε.Α. η διαφορά εντείνεται με την αύξηση της ζήτησης, και φτάνοντας στην ζήτηση ώρας αιχμής (149357 Μ.Ε.Α.) η διαφορά είναι της τάξεως του 67%.

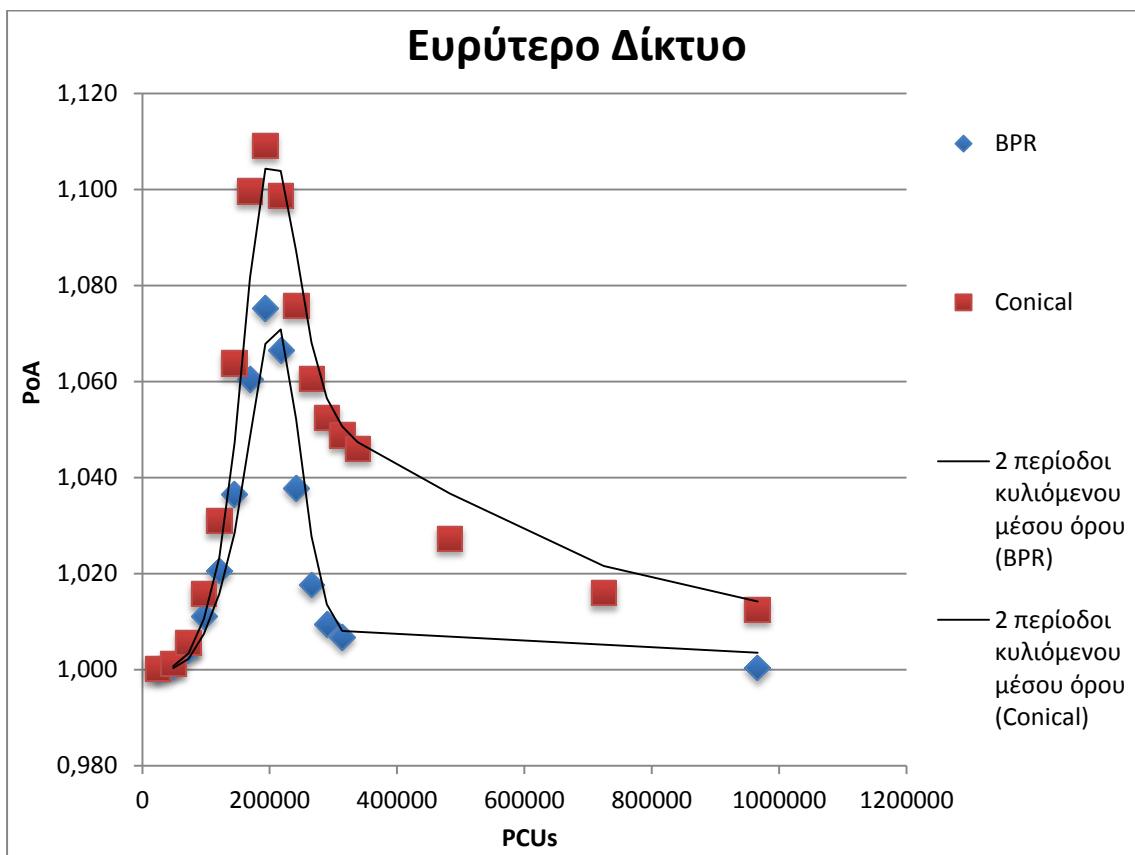
### 5.1.2 Αποτελέσματα για το «Ευρύτερο Δίκτυο»

Υπολογίστηκε το Τίμημα της Αναρχίας για το «Ευρύτερο Δίκτυο» και για τις 2 συναρτήσεις για τα εξής επίπεδα ζήτησης της κυκλοφορίας:

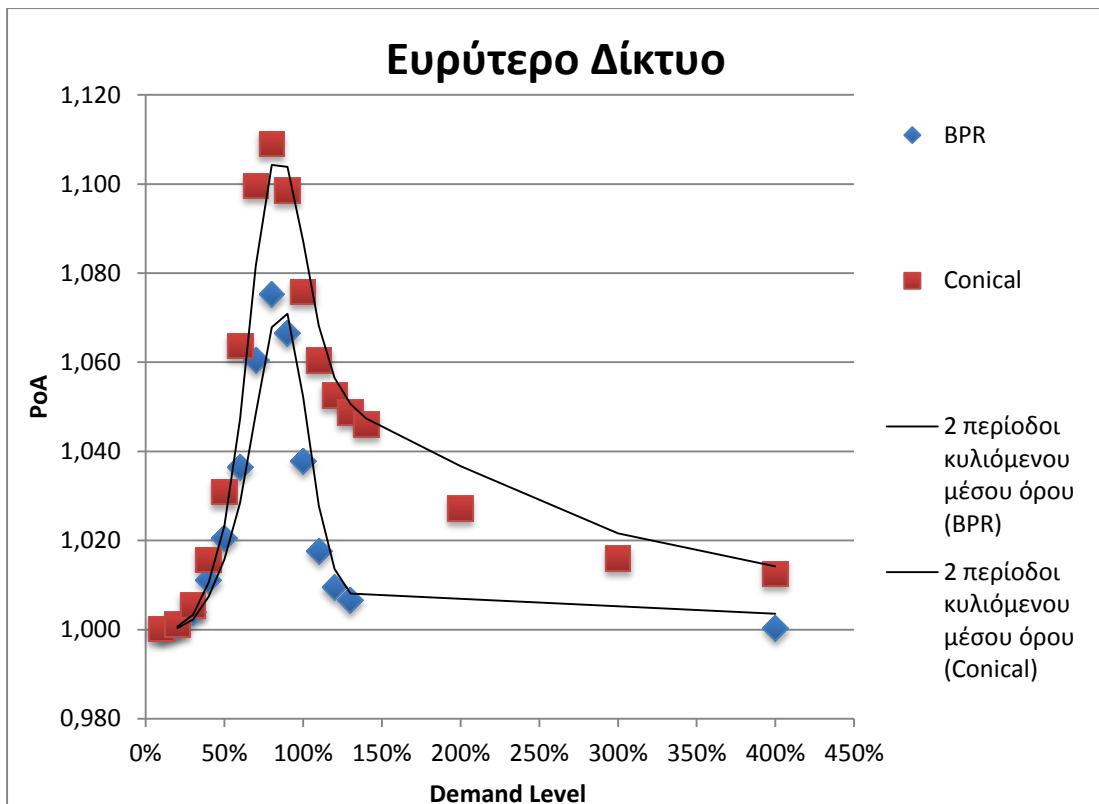
- **Συνάρτηση BPR:** 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90%, 100%, 110%, 120%, 130%, 400%. Στον πίνακα 4.5 φαίνονται τα αποτελέσματα.
- **Συνάρτηση Conical:** 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90%, 100%, 110%, 120%, 130%, 140%, 200%, 300%, 400%. Στον πίνακα 4.5 φαίνονται τα αποτελέσματα.

Πίνακας 6: Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας - Ευρύτερο Δίκτυο

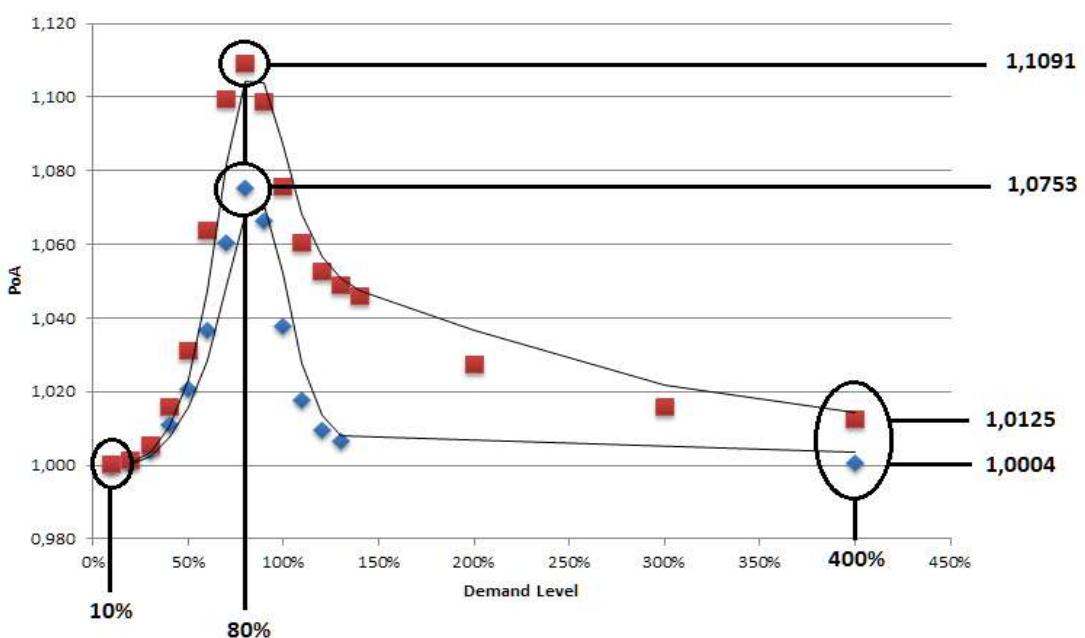
Demand Level (%)		PCU's	PoA (BPR)	PoA (Conical)
BPR Function	Conical Function			
10%	10%	24157,1	1,0000	1,0002
20%	20%	48314,2	1,0007	1,0012
30%	30%	72471,3	1,0039	1,0055
40%	40%	96628,4	1,0111	1,0157
50%	50%	120785,5	1,0205	1,0309
60%	60%	144942,6	1,0365	1,0637
70%	70%	169099,7	1,0604	1,0996
<b>80%</b>	<b>80%</b>	<b>193256,8</b>	<b>1,0753</b>	<b>1,1091</b>
90%	90%	217413,9	1,0665	1,0986
100%	100%	241571	1,0379	1,0758
110%	110%	265728,1	1,0177	1,0605
120%	120%	289885,2	1,0095	1,0525
130%	130%	314042,3	1,0067	1,0488
-	140%	338199,4	-	1,0460
-	200%	483142	-	1,0273
-	300%	724713	-	1,0159
400%	400%	966284	1,0004	1,0125



Διάγραμμα 23: Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει των Μ.Ε.Α. – «Ευρύτερο Δίκτυο»



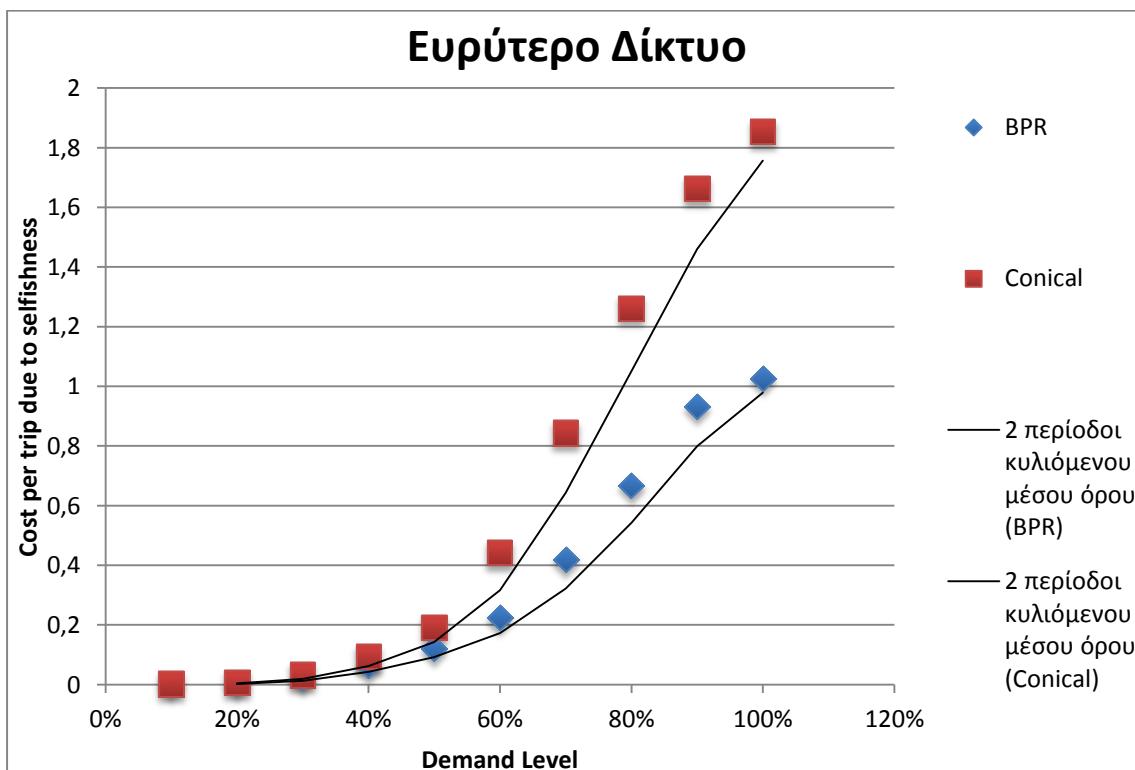
Διάγραμμα 24: Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης – «Ευρύτερο Δίκτυο»



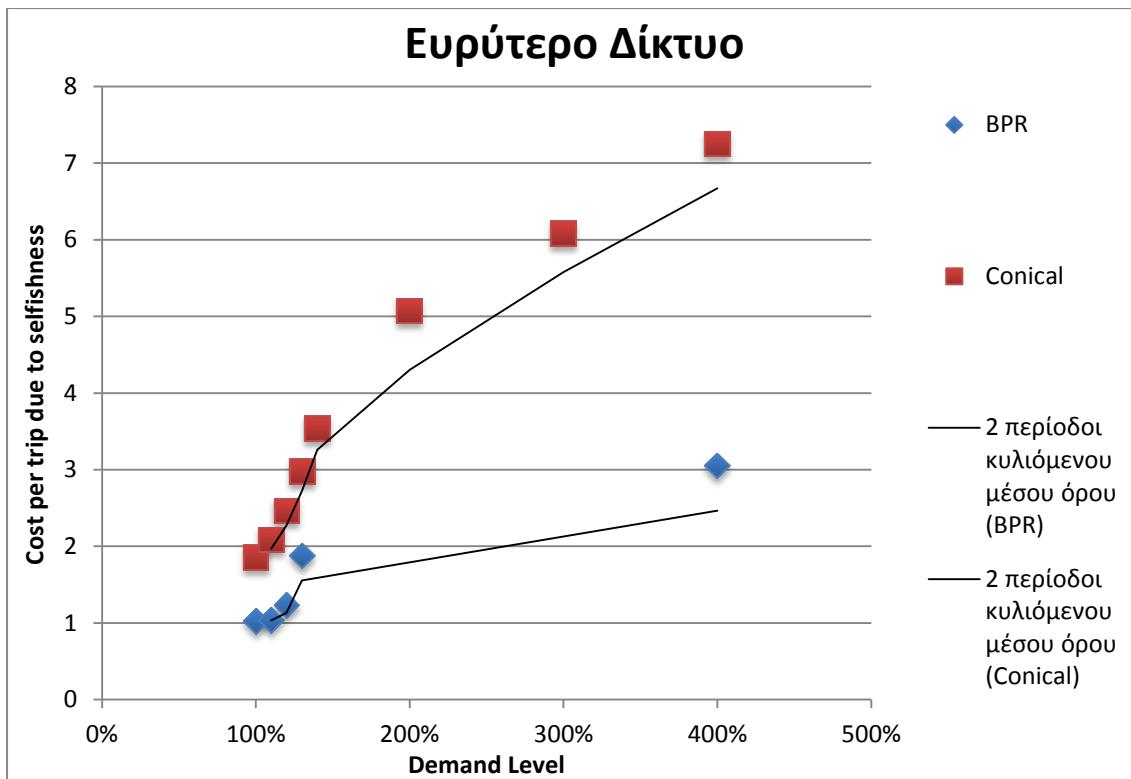
Εικόνα 39: Παρατηρήσεις στα αποτελέσματα του Τιμήματος της Αναρχίας - «Ευρύτερο Δίκτυο»

**Πίνακας 7: Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης-«Ευρύτερο Δίκτυο»**

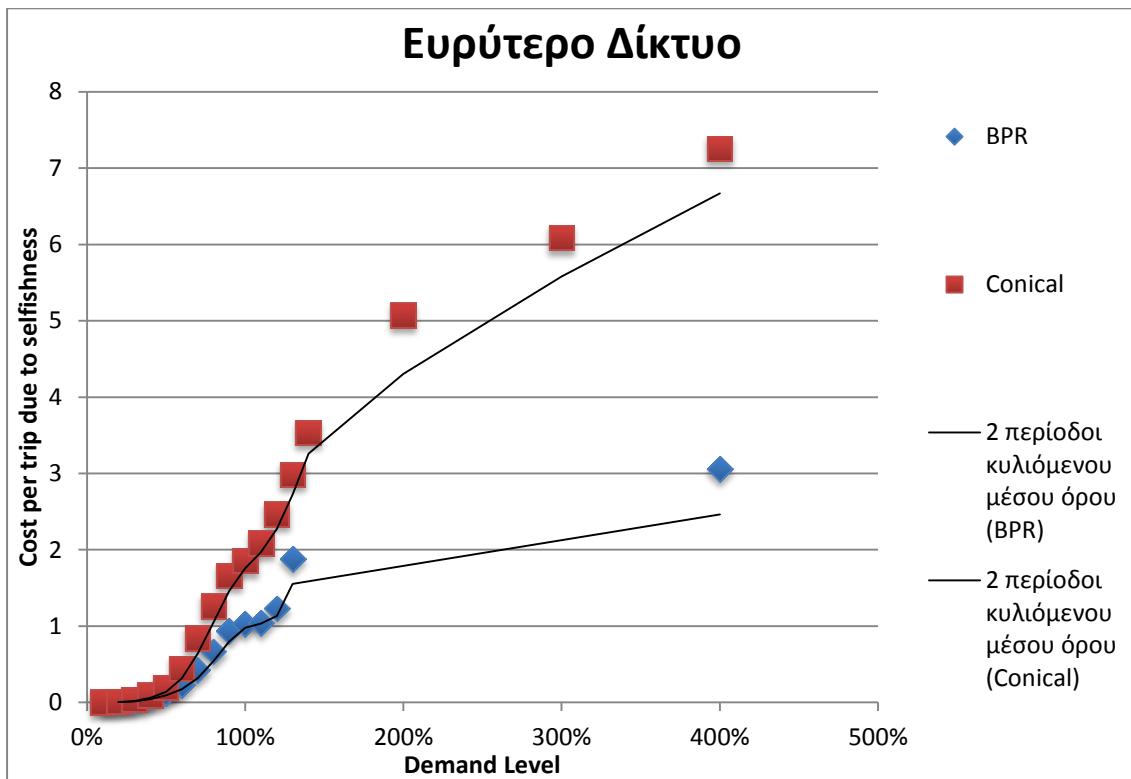
Demand Level (%)		Cost per trip due to selfishness (min)	
BPR Function	Conical Function	BPR	Conical
10%	10%	5,62E-06	1,01E-03
20%	20%	3,69E-03	7,05E-03
30%	30%	2,18E-02	3,17E-02
40%	40%	6,36E-02	9,28E-02
50%	50%	1,21E-01	1,92E-01
60%	60%	2,25E-01	4,41E-01
70%	70%	4,19E-01	8,43E-01
<b>80%</b>	<b>80%</b>	<b>6,67E-01</b>	<b>1,26E+00</b>
90%	90%	9,32E-01	1,66E+00
100%	100%	1,03E+00	1,85E+00
110%	110%	1,04E+00	2,09E+00
120%	120%	1,23E+00	2,46E+00
130%	130%	1,88E+00	2,98E+00
-	140%	-	3,54E+00
-	200%	-	5,07E+00
-	300%	-	6,08E+00
400%	400%	3,05E+00	7,26E+00



**Διάγραμμα 25: Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Ζήτησης <=100%)-Ευρύτερο δίκτυο**



Διάγραμμα 26: Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης ( $\text{Ζήτηση} \geq 100\%$ )-«Ευρύτερο Δίκτυο»



Διάγραμμα 27: Επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς συναρτήσει του επιπέδου ζήτησης (Συγκεντρωτικό)- «Ευρύτερο Δίκτυο»

Όπως φαίνεται στα διαγράμματα 23, 24, 25, 26 και 27 υπάρχουν κάποιες ομοιότητες αλλά και αρκετές διαφορές μεταξύ των συναρτήσεων. Το ίδιο ισχύει και μεταξύ των δύο δικτύων που μελετήθηκαν.

### Συνάρτηση BPR

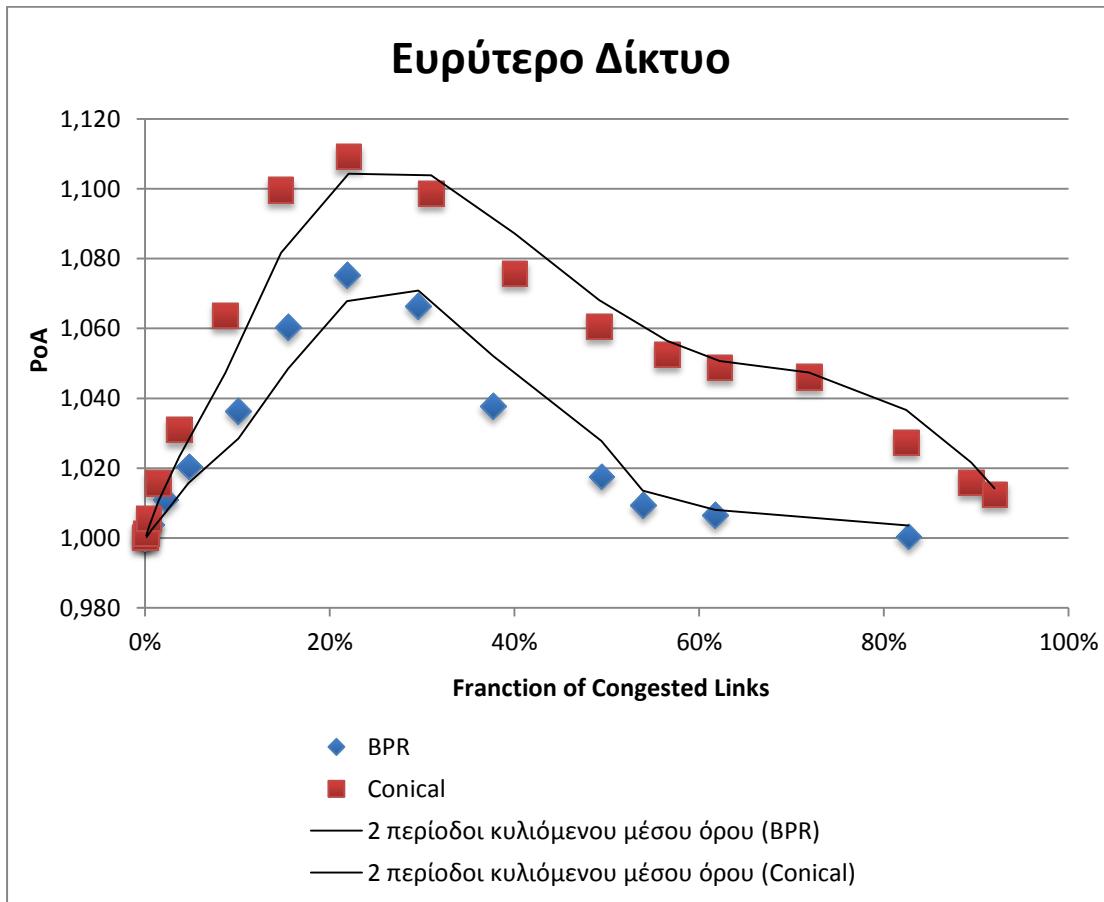
- Παρατηρείται ένας αριστερός και ένας δεξιός κλάδος. Για χαμηλούς φόρτους το Τίμημα της Αναρχίας παίρνει πολύ χαμηλές τιμές. Καθώς αυξάνεται η ζήτηση, ο αυξάνεται και παίρνει την μέγιστη τιμή του, για ζήτηση στο 80% της ζήτησης αιχμής, ενώ για περαιτέρω αύξηση της ζήτησης μειώνεται, και για την ζήτηση αιχμής (100%) παίρνει την τιμή 1,0379, φτάνοντας στο 1,0003 για ζήτηση 400%
- Μεγιστοποιείται και παίρνει την τιμή 1,0753 για το 80% της ζήτησης αιχμής που σημαίνει ότι οι χρήστες του δικτύου σπαταλάνε το 7,53% του συνολικού χρόνου μετακίνησής τους, και πιο συγκεκριμένα  $0,0753 \times 1713130 = 193257$  λεπτά, λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς που επιδεικνύουν και της έλλειψης συνεργασίας, που αντιστοιχεί σε 0,67 λεπτά ανά ταξίδι.
- Το κόστος (επιπλέον χρόνος μετακίνησης σε λεπτά) ανά ταξίδι που οφείλεται στην εγωιστική συμπεριφορά αυξάνεται συνεχώς με την αύξηση της ζήτησης, φτάνοντας τα 3,05 λεπτά ανά ταξίδι για ζήτηση 400%.

### Συνάρτηση Conical

- Παρατηρείται ένας αριστερός και ένας δεξιός κλάδος. Για χαμηλούς φόρτους το Τίμημα της Αναρχίας παίρνει πολύ χαμηλές τιμές. Καθώς αυξάνεται η ζήτηση αυξάνεται και παίρνει την μέγιστη τιμή του, για ζήτηση στο 80% της ζήτησης αιχμής, ενώ για περαιτέρω αύξηση της ζήτησης μειώνεται και για την ζήτηση αιχμής (100%) παίρνει την τιμή 1,0758, φτάνοντας στο 1,0125 για ζήτηση 400%.
- Μεγιστοποιείται και παίρνει την τιμή 1,1091 για το 80% της ζήτησης αιχμής που σημαίνει ότι οι χρήστες του δικτύου σπαταλάνε το 10,91% του συνολικού χρόνου μετακίνησής τους, και πιο συγκεκριμένα  $0,1091 \times 2232020 = 243290$  λεπτά περίπου, λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς που

επιδεικνύουν και της έλλειψης συνεργασίας, που αντιστοιχεί σε 1,26 λεπτά ανά ταξίδι.

- Το κόστος (επιπλέον χρόνος μετακίνησης σε λεπτά) ανά ταξίδι που οφείλεται στην εγωιστική συμπεριφορά αυξάνεται συνεχώς με την αύξηση της ζήτησης, φτάνοντας τα 7,26 λεπτά ανά ταξίδι για ζήτηση 400%.



Διάγραμμα 28: Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του ποσοστού των συμφορημένων συνδέσμων – «Ευρύτερο δίκτυο»

**Πίνακας 8: Τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του ποσοστού των συμφορημένων συνδέσμων – «Ευρύτερο Δίκτυο»**

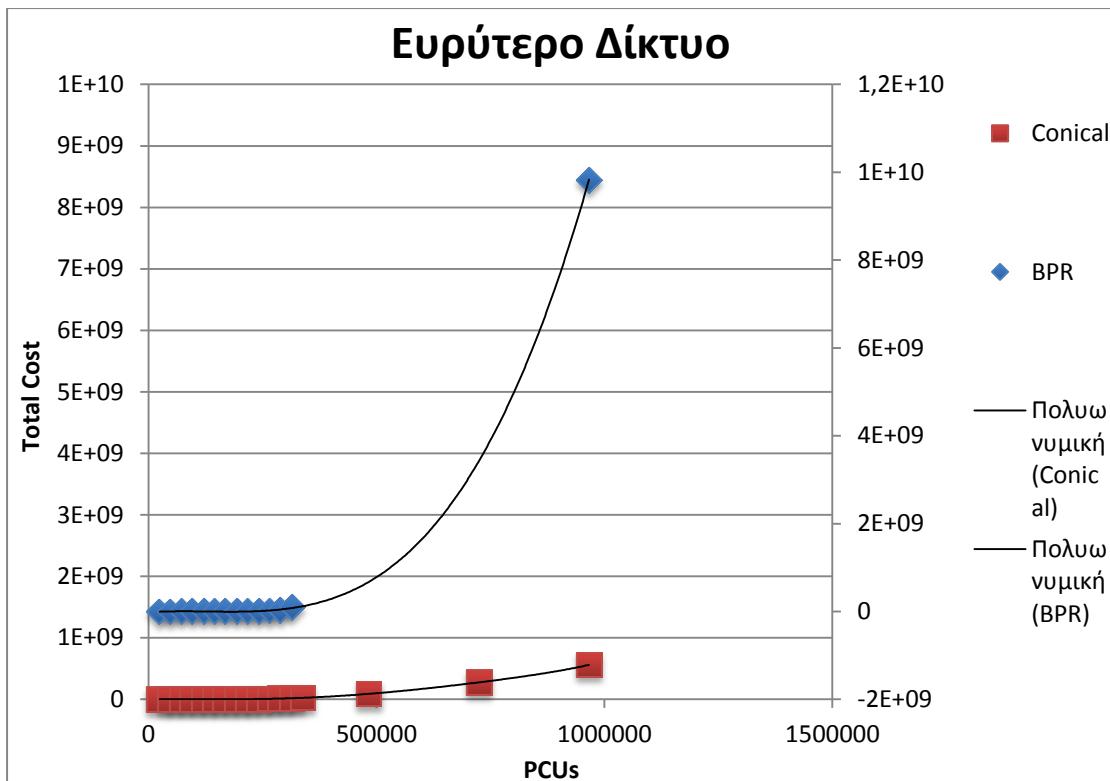
Traffic Demand Level (%)		Fraction of congested links (BPR)	Fraction of congested links (Conical)	PoA (BPR)	PoA (Conical)
BPR	Conical				
10%	10%	0%	0%	1,0000	1,0002
20%	20%	0,15%	0,12%	1,0007	1,0012
30%	30%	0,67%	0,43%	1,0039	1,0055
40%	40%	2,24%	1,44%	1,0111	1,0157
50%	50%	4,71%	3,70%	1,0205	1,0309
60%	60%	10,10%	8,68%	1,0365	1,0637
70%	70%	15,50%	14,72%	1,0604	1,0996
<b>80%</b>	<b>80%</b>	<b>21,87%</b>	<b>22,04%</b>	<b>1,0753</b>	<b>1,1091</b>
90%	90%	29,59%	30,96%	1,0665	1,0986
100%	100%	37,65%	40,03%	1,0379	1,0758
110%	110%	49,42%	49,17%	1,0177	1,0605
120%	120%	53,89%	56,53%	1,0095	1,0525
130%	130%	61,73%	62,22%	1,0067	1,0488
-	140%	-	71,88%	-	1,0460
-	200%	-	82,41%	-	1,0273
-	300%	-	89,44%	-	1,0159
400%	400%	82,66%	91,99%	1,0010	1,0125

### Συνάρτηση BPR

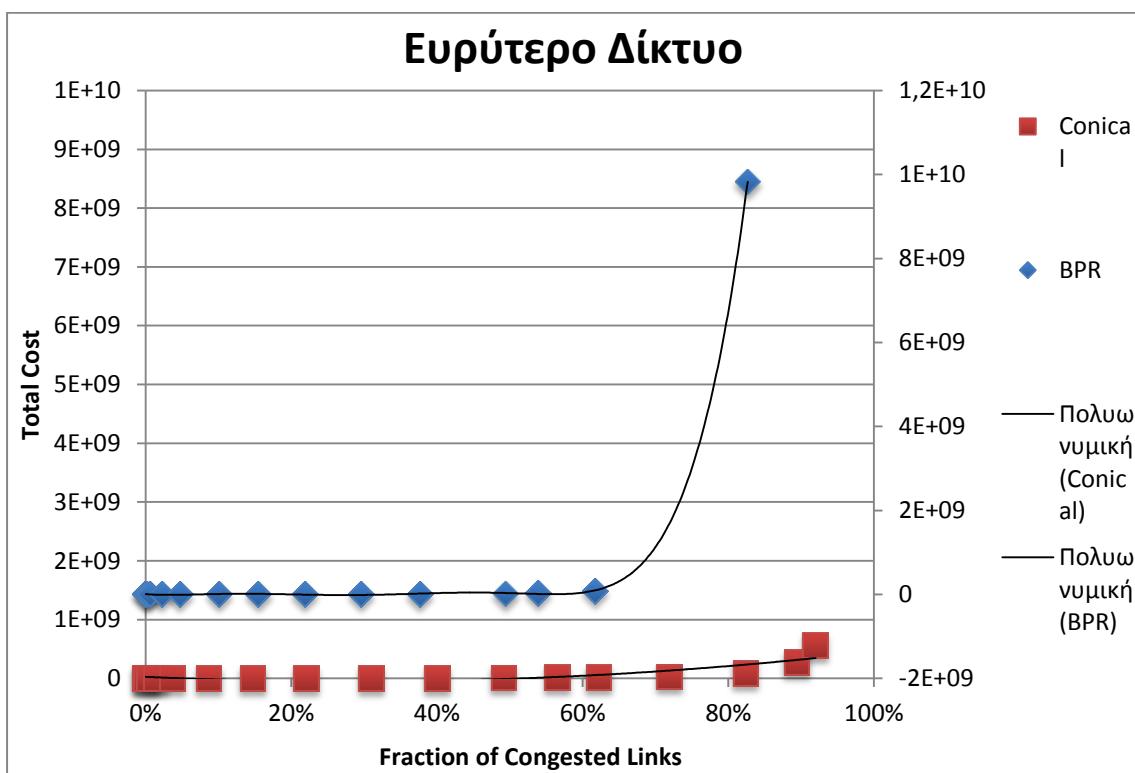
Το τίμημα της Αναρχίας μεγιστοποιείται όταν το 21,87% των συνδέσμων είναι συμφορημένο (βλέπε πίνακα 8 και διάγραμμα 28). Συμφορημένοι θεωρήθηκαν οι σύνδεσμοι με λόγο  $v/c > 0,85$ .

### Συνάρτηση Conical

Το Τίμημα της Αναρχίας μεγιστοποιείται όταν το 22,04% των συνδέσμων είναι συμφορημένο (βλέπε πίνακα 8 και διάγραμμα 28). Συμφορημένοι θεωρήθηκαν οι σύνδεσμοι με λόγο  $v/c > 0,85$ .



Διάγραμμα 29: Συνολικό κόστος συναρτήσει των Μ.Ε.Α. – «Ευρύτερο δίκτυο»



Διάγραμμα 30: Συνολικό κόστος συναρτήσει των συμφορημένων συνδέσμων – «Ευρύτερο Δίκτυο»

Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα 29 και 30 η συνάρτηση BPR είναι πολύ πιο ευαίσθητη σε υψηλούς φόρτους σε σχέση με την συνάρτηση Conical. Για φόρτους μέχρι 120000 Μ.Ε.Α. το συνολικό κόστος του δικτύου είναι περίπου το ίδιο για τις δύο συναρτήσεις, ενώ για τιμές μεγαλύτερες των 135000 Μ.Ε.Α. η διαφορά εντείνεται με την αύξηση της ζήτησης, και φτάνοντας στην ζήτηση ώρας αιχμής (966284 Μ.Ε.Α.) η διαφορά είναι της τάξεως του 94,29%.

Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα υπάρχει μεγάλη εξάρτηση του Τιμήματος της Αναρχίας από την συνάρτηση κόστους. Επιπροσθέτως, εξαρτάται από την ζήτηση που υπάρχει στο δίκτυο, και η μορφή του διαγράμματος συναρτήσει της ζήτησης γίνεται ξεκάθαρη. Για μικρά επίπεδα ζήτησης παίρνει χαμηλές τιμές (κοντά στο 1) για ενδιάμεσα επίπεδα ζήτησης γύρω στο 65% με 80% παίρνει την μέγιστη τιμή του, ενώ για πολύ μεγάλα επίπεδα ζήτησης φτάνει πάλι κοντά στο 1 πολύ πιο αργά, ειδικά για την Conical.

## 5.2 Σύνδεσμοι που «ευθύνονται» για το Τίμημα της Αναρχίας

Ως σύνδεσμοι που ευθύνονται για το Τίμημα της Αναρχίας χαρακτηρίζονται οι δρόμοι που έχουν φόρτο στην ισορροπία Nash αρκετά μεγαλύτερο από τον αντίστοιχο που προκύπτει στην βέλτιστη ισορροπία (κατηγορία 1) και εκείνη που έχουν αρκετά μικρότερο (κατηγορία 2). Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής θα θεωρηθούν εκείνοι που η διαφορά (απόλυτη) αυτή είναι μεγαλύτερη των 300 Μ.Ε.Α. Θα παρουσιαστούν μόνο οι περιπτώσεις για τις οποίες το Τίμημα της Αναρχίας είναι μέγιστο, και μόνο για τον Δακτύλιο.

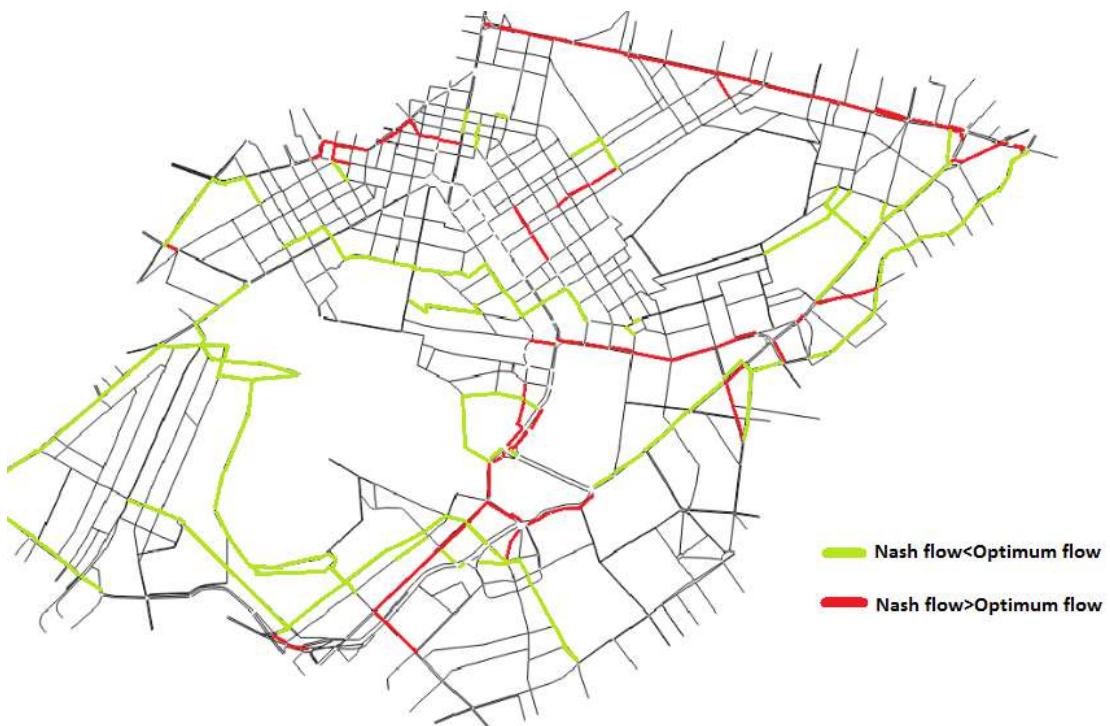
### 5.2.1 Συνάρτηση BPR

Στην πρώτη κατηγορία βρέθηκαν για την συνάρτηση BPR για τον δακτύλιο, 102 σύνδεσμοι. Στην συντριπτική πλειοψηφία, 89,22%, είναι δρόμοι με σηματοδότηση ενώ το υπόλοιπο 3,92% και το 6,86% είναι δρόμοι χωρίς σηματοδότηση και αρτηρίες, αντίστοιχα. Στην ισορροπία Nash το 58,82% των συνδέσμων είναι κορεσμένοι ( $\gamma/c > 0,85$ ) ενώ στην βέλτιστη ισορροπία το ποσοστό μειώνεται κατά 20% με το ποσοστό των συμφορημένων συνδέσμων να ανέρχεται στο 38,24%.

Στην δεύτερη κατηγορία βρέθηκαν για την συνάρτηση BPR για τον δακτύλιο, 157 σύνδεσμοι. Το 52,87%, είναι δρόμοι χωρίς σηματοδότηση ενώ το υπόλοιπο 33,12%

και το 12,73% είναι δρόμοι με σηματοδότηση και αρτηρίες, αντίστοιχα. Στην ισορροπία Nash κανένας σύνδεσμος δεν είναι κορεσμένος ( $\gamma/c > 0,85$ ) ενώ στην βέλτιστη ισορροπία το ποσοστό των κορεσμένων συνδέσμων ανέρχεται στο 14%.

Στους πίνακες του παραρτήματος φαίνονται οι 2 κατηγορίες με τους συνδέσμους κάθε μίας και τα χαρακτηριστικά τους για την συνάρτηση BPR.



**Εικόνα 40: Σύνδεσμοι που ευθύνονται για το Τίμημα της Αναρχίας - Συνάρτηση BPR**

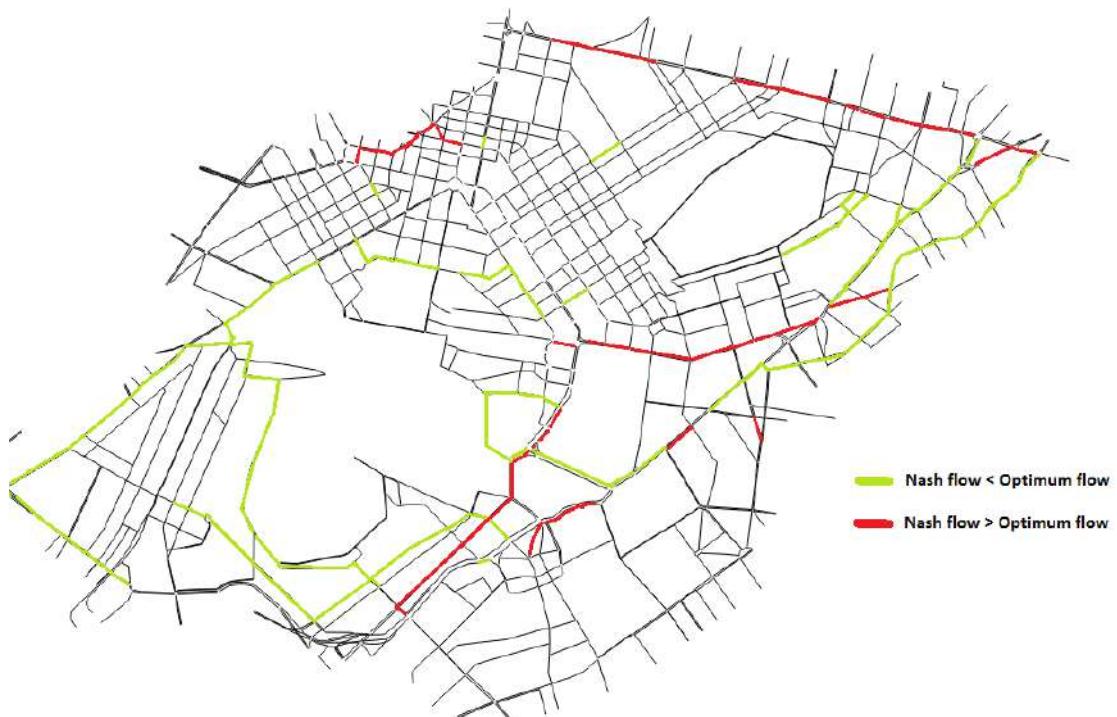
### 5.2.2 Συνάρτηση Conical

Στην πρώτη κατηγορία βρέθηκαν για την συνάρτηση Conical για τον δακτύλιο, 61 σύνδεσμοι. Στην συντριπτική πλειοψηφία, 83,6%, είναι δρόμοι με σηματοδότηση ενώ το υπόλοιπο 9,84% είναι αρτηρίες. Στην ισορροπία Nash το 47,54% των συνδέσμων είναι κορεσμένοι ( $\gamma/c > 0,85$ ) ενώ στην βέλτιστη ισορροπία το ποσοστό των συμφορημένων συνδέσμων να ανέρχεται στο 16,39%.

Στην δεύτερη κατηγορία βρέθηκαν για την συνάρτηση Conical για τον δακτύλιο, 103 σύνδεσμοι. Το 44,66%, είναι δρόμοι χωρίς σηματοδότηση ενώ το υπόλοιπο 41,75% και το 11,65% είναι δρόμοι με σηματοδότηση και αρτηρίες, αντίστοιχα.

Στην ισορροπία Nash κανένας σύνδεσμος δεν είναι κορεσμένος ( $\nu/c > 0,85$ ) ενώ στην βέλτιστη ισορροπία το ποσοστό των κορεσμένων συνδέσμων ανέρχεται στο 5,8%.

Στους πίνακες του παραρτήματος φαίνονται οι 2 κατηγορίες με τους συνδέσμους κάθε μίας και τα χαρακτηριστικά τους για την συνάρτηση Conical.



**Εικόνα 41: Σύνδεσμοι που ευθύνονται για το Τίμημα της Αναρχίας - Συνάρτηση Conical**

## 5.2 Το παράδοξο του Braess

Έγινε μία εισαγωγική διερεύνηση του φαινομένου και ελέγχθηκαν οι σύνδεσμοι χωρητικότητας μίας λωρίδας, για τον Δακτύλιο μόνο, και με φόρτο που προκύπτει από το Σενάριο Ισορροπίας Nash μεγαλύτερο από τον αντίστοιχο που προκύπτει από το Σενάριο Βέλτιστης Ισορροπίας.

### 5.2.1 Συνάρτηση BPR για επίπεδο ζήτησης 77,5% (μέγιστο Τίμημα)

Στην συνάρτηση BPR για επίπεδο ζήτησης στο 77,5% βρέθηκαν 171 σύνδεσμοι με τα πιο πάνω χαρακτηριστικά και από αυτούς τους συνδέσμους βρέθηκαν 28 δρόμοι

που πάσχουν από το παράδοξο, δηλαδή το 16,37% των συνδέσμων που ελέγχθηκαν. Το 96,43% των συνδέσμων είναι δρόμοι χωρίς σηματοδότηση με μέσο όρο μήκους 107,92μ.

Στον πίνακα 9 φαίνονται τα αποτελέσματα. Όπως φαίνεται το κλείσιμο ενός μόνο δρόμου μπορεί να επιφέρει μείωση έως και 558 λεπτά στο συνολικό χρόνο μετακίνησης και κατ' επέκταση μείωση του Price of Anarchy 0,89% δηλαδή από 1,0702 σε 1,0670.

**Πίνακας 9: Σύνδεσμοι που πάσχουν από το παράδοξο του Braess-Συνάρτηση BPR (77,5%)**

Section	Road Type	Capacity	Length	V/C Ratio	ΔΤ (min)	New PoA
552224 (6955)	44: Street	850	93,929	0,798	558,00	1,0670
552278: ΟΜΗΡΟΥ (6978)	44: Street	850	38,0747	0,968	499,80	1,0672
555128: ΚΑΛΛΙΡΟΗΣ (6685)	44: Street	850	140,751	0,549	213,00	1,0681
551804: Λασκάρεως (6737)	44: Street	850	182,86	0,313	174,60	1,0682
552070: Θεμιστοκλέους (6876)	44: Street	850	102,268	0,228	121,20	1,0684
551818: Λασκάρεως (6744)	44: Street	850	129,124	0,324	112,20	1,0684
662512: Πατριάρχου Ιωακείμ (6996)	44: Street	850	37,9577	0,280	75,00	1,0685
552314: Πατριάρχου Ιωακείμ (6996)	44: Street	850	52,4313	0,225	73,80	1,0685
552406: Γενναδίου (7031)	44: Street	850	108,113	0,024	70,20	1,0685
628573: Θεμιστοκλέους	44: Street	850	171,11	0,277	66,00	1,0685
555092: MENAIXMOY (6653)	44: Street	850	22,3434	1,037	52,8	1,0686
555350: ΜΑΡΚΟΥ ΜΟΥΣΟΥΡΟΥ (7107)	44: Street	850	203,719	0,155	47,40	1,0686
551616 (6553)	44: Street	850	50,6052	0,010	42,60	1,0686
551328 (6434)	44: Street	850	104,011	0,506	40,20	1,0686
554990: ΗΣΙΟΝΗΣ (6597)	44: Street	850	242,981	0,029	39,60	1,0686
555508: ΚΑΛΛΙΡΟΗΣ (8261)	44: Street	850	165,243	0,294	35,40	1,0686
551202: ΣΩΚΡΑΤΟΥΣ (6371)	44: Street	850	88,6374	0,607	29,40	1,0687
551436: ΔΙΠΥΛΟΥ (6482)	44: Street	850	124,168	0,027	29,40	1,0687
551128 (6338)	44: Street	850	53,6294	0,703	28,80	1,0687
551666: ΡΟΒΕΡΤΟΥ ΓΚΑΛΛΙ (6614)	44: Street	850	80,094	0,197	25,80	1,0687
554866	44: Street	850	16,0982	0,051	24,60	1,0687
555628: ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ	94: Signalized Street	1000	141,781	0,418	24,00	1,0687
551298: ΛΕΩΝΙΔΙΟΥ (6421)	44: Street	850	165,901	0,921	23,40	1,0687
551422: ΛΕΩΝΙΔΙΟΥ (6475)	44: Street	850	251,316	0,921	23,40	1,0687
555626: ΛΕΩΝΙΔΙΟΥ (6419)	44: Street	850	69,3898	0,995	15,60	1,0687
551294: ΛΕΩΝΙΔΙΟΥ (6419)	44: Street	850	52,778	0,995	15,6	1,0687
555604: Γενναδίου (7028)	44: Street	850	21,3387	0,058	15,60	1,0687
552096: ΖΩΟΔΟΧΟΥ ΠΗΓΗΣ (6890)	44: Street	850	111,162	0,019	5,40	1,0687



Εικόνα 42: Δρόμοι που «πάσχουν» από το Παράδοξο του Braess - Συνάρτηση BPR (77,5%)

### 5.2.2 Συνάρτηση Conical για επίπεδο ζήτησης 65% (μέγιστο Τίμημα)

Στην συνάρτηση Conical για επίπεδο ζήτησης στο 65% βρέθηκαν 248 σύνδεσμοι με τα πιο πάνω χαρακτηριστικά και από αυτούς τους συνδέσμους βρέθηκαν μόνο 2 δρόμοι που πάσχουν από το παράδοξο του Braess, δηλαδή το 0,81% των συνδέσμων.

Στον πίνακα 10 φαίνονται τα αποτελέσματα. Όπως φαίνεται το κλείσιμο ενός μόνο δρόμου μπορεί να επιφέρει μείωση έως και 22,8 λεπτά στο συνολικό χρόνο μετακίνησης και κατ'επέκταση μείωση του Price of Anarchy από 1,1230 σε 1,1228.

Πίνακας 10: Σύνδεσμοι που πάσχουν από το παράδοξο του Braess - Συνάρτηση Conical (65%)

Section	Road Type	Capacity	Length	V/C Ratio	ΔΤ (min)	New PoA
551956: Σαρανταπήχου (6824)	44: Street	850	378	0,382	22,80	1,1228
551842 (6757)	44: Street	850	159	0,521	9,00	1,1229



**Εικόνα 43: Δρόμοι που «πάσχουν» από το Παράδοξο του Braess - Συνάρτηση Conical (65%)**

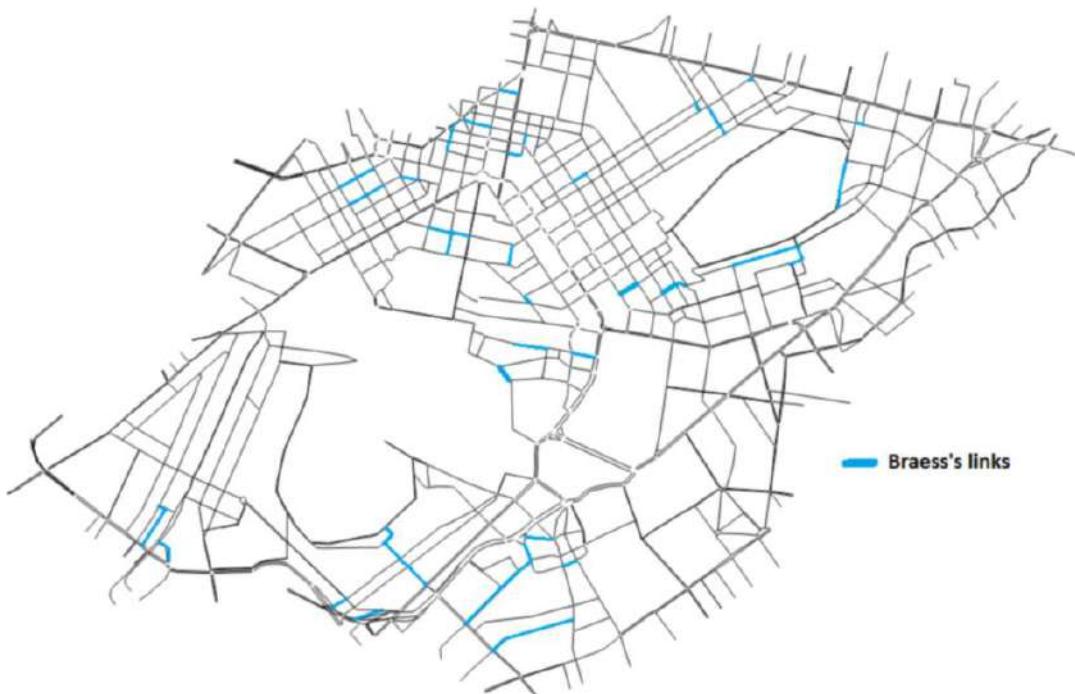
### 5.2.3 Συνάρτηση BPR για επίπεδο ζήτησης 100% (Ζήτηση αιχμής)

Στην συνάρτηση BPR για επίπεδο ζήτησης στο 100% βρέθηκαν 186 σύνδεσμοι με τα πιο πάνω χαρακτηριστικά και από αυτούς τους συνδέσμους βρέθηκαν 52 δρόμοι που πάσχουν από το παράδοξο, δηλαδή το 27,95% των συνδέσμων που ελέγχθηκαν. Το 92,31% των συνδέσμων είναι δρόμοι χωρίς σηματοδότηση με μέσο όρο μήκους 109,28μ.

Στον πίνακα 11 φαίνονται τα αποτελέσματα. Όπως φαίνεται το κλείσιμο ενός μόνο δρόμου μπορεί να επιφέρει μείωση έως και 942 λεπτά στο συνολικό χρόνο μετακίνησης και κατ' επέκταση μείωση του Τιμήματος της Αναρχίας 0,039% δηλαδή από 1,0077 σε 1,0073.

Πίνακας 11: Σύνδεσμοι που «πάσχουν» από το Παράδοξο του Braess - Συνάρτηση BPR (100%)

Section	Road Type	V/C Ratio	Length	ΔΤ (min)	New PoA
552300: ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΥ (6989)	44: Street	0,9232	90	942	1,0073
551636: ΑΔΡΙΑΝΟΥ (6563)	44: Street	0,109	100	858	1,0073
662503: ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΥ (7017)	44: Street	0,9239	85	804	1,0073
555614: Κόνιαρη (6768)	44: Street	0,1019	199	774	1,0073
642557: ΦΙΛΟΠΑΠΠΟΥ (6627)	44: Street	0,8146	123	768	1,0073
642550	44: Street	0,8146	109	768	1,0073
551256 (6402)	44: Street	0,0887	94	768	1,0073
551328 (6434)	44: Street	0,6412	104	744	1,0074
555112: ΒΡΕΣΘΕΝΗΣ (6677)	44: Street	0,1637	284	744	1,0074
632398	8: Arterial	0,1782	381	732	1,0074
555154: ΙΠΠΑΡΧΟΥ (6703)	44: Street	0,3233	497	720	1,0074
552368: ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΥ (7017)	44: Street	1,0182	63	714	1,0074
640202: ΒΡΕΣΘΕΝΗΣ (6677)	44: Street	0,1637	88	696	1,0074
551452: ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ (6489)	44: Street	0,1979	111	678	1,0074
554444: ΟΘΩΝΟΣ (12325)	44: Street	0,4749	104	648	1,0074
551174 (6358)	44: Street	0,907	16	636	1,0074
551302: ΛΕΩΝΙΔΙΟΥ (6423)	44: Street	1,0137	103	600	1,0074
555578 (6358)	44: Street	0,9069	60	570	1,0074
555674: ZINNH	44: Street	0,7796	53	564	1,0074
555104: MENAIXMOY (6659)	44: Street	0,1625	85	564	1,0074
662636: ΑΒΕΡΩΦ	44: Street	0,2116	92	546	1,0074
552384 (7024)	44: Street	0,1563	53	546	1,0074
551928: Αναπήρων Πολέμου (6810)	44: Street	0,2663	73	522	1,0075
551848: Τσόχα (6760)	44: Street	0,1641	41	486	1,0075
554842: ΧΑΡ.ΤΡΙΚΟΥΠΗ	94: Signalized Street	0,014	24	480	1,0075
551812: Βατάτζη (6741)	44: Street	0,8639	126	474	1,0075
551182 (6361)	44: Street	0,9205	49	456	1,0075
551970: Κομνηνών (6828)	44: Street	0,2337	47	432	1,0075
551368 (6449)	44: Street	0,1223	129	414	1,0075
551614: ΜΗΤΡΟΠΟΛΕΩΣ (6552)	44: Street	0,9215	211	408	1,0075
551288: ΜΕΓΑΛΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ (6416)	44: Street	1,0554	104	378	1,0075
555092: MENAIXMOY (6653)	44: Street	1,1721	22	348	1,0075
555014: ΑΘΗΝΑΔΩΡΟΥ (6590)	44: Street	0,3108	39	306	1,0075
551150: ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΟΥ (6348)	94: Signalized Street	0,8567	96	288	1,0075
551460: ΠΡΑΞΙΤΕΛΟΥΣ (6492)	44: Street	0,1177	50	288	1,0075
554990: ΗΣΙΟΝΗΣ (6597)	44: Street	0,0222	243	288	1,0075
552034: Κάνιγγος (6859)	44: Street	0,9122	45	282	1,0075
555094: ΘΕΟΦΙΛΟΠΟΥΛΟΥ (6654)	44: Street	0,9367	154	240	1,0076
640193: ΒΡΕΣΘΕΝΗΣ (6677)	44: Street	0,1637	123	240	1,0076
551144: ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΟΥ (6345)	94: Signalized Street	0,6829	36	234	1,0076
552082: ΖΩΟΔΟΧΟΥ ΠΗΓΗΣ (6882)	44: Street	0,5173	78	222	1,0076
554980: ΜΕΝΕΛΑΟΥ (6669)	44: Street	0,0056	134	216	1,0076
551282: ΜΕΓΑΛΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ (6413)	44: Street	1,1099	102	168	1,0076
551826: Βατάτζη (6748)	44: Street	0,8636	46	126	1,0076
551304: ΛΕΩΝΙΔΙΟΥ (6424)	44: Street	0,8346	104	78	1,0076
555128: ΚΑΛΛΙΡΟΗΣ (6685)	44: Street	0,369	141	72	1,0076
555150: ΙΟΛΗΣ (6701)	44: Street	0,708	74	66	1,0076
551940: Κόνιαρη (6818)	44: Street	0,1041	78	66	1,0076
555120: ΒΕΪΚΟΥ (6681)	44: Street	0,7198	74	54	1,0076
555596: ZINNH	44: Street	0,5733	138	42	1,0076
555682: Βερανζέρου (6860)	44: Street	0,8513	76	30	1,0076
551366 (6448)	44: Street	0,4418	127	30	1,0076



**Εικόνα 44: Δρόμοι που «πάσχουν» από το Παράδοξο του Braess - Συνάρτηση BPR (100%)**

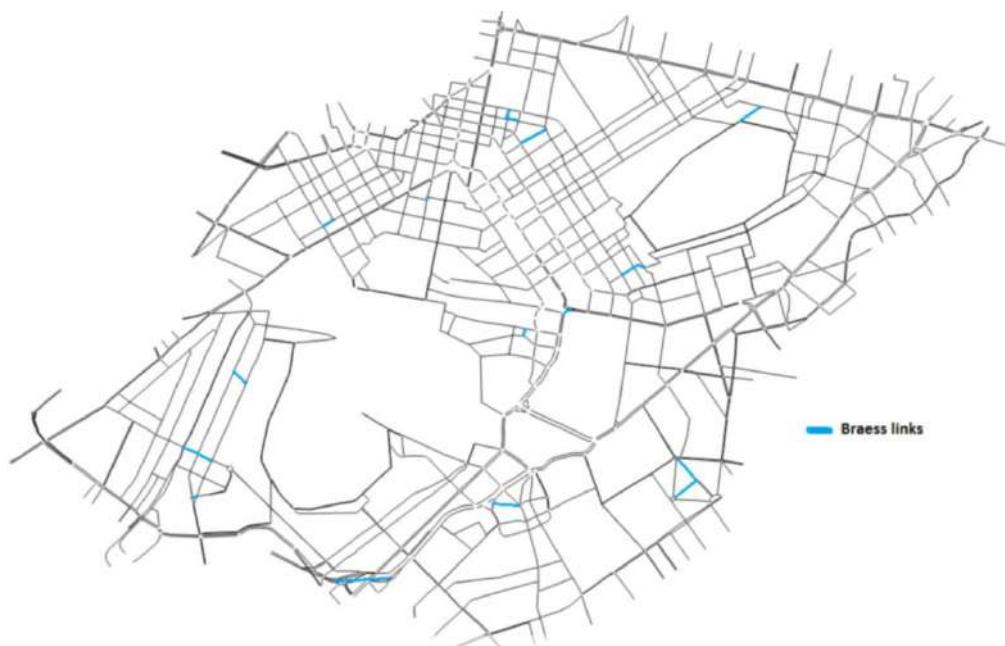
#### 5.2.4 Συνάρτηση Conical για επίπεδο ζήτησης 100% (Ζήτηση αιχμής)

Στην συνάρτηση Conical για επίπεδο ζήτησης στο 100% βρέθηκαν 249 σύνδεσμοι με τα πιο πάνω χαρακτηριστικά και από αυτούς τους συνδέσμους βρέθηκαν 19 δρόμοι που πάσχουν από το παράδοξο, δηλαδή το 7,63% των συνδέσμων που ελέγχθηκαν. Το 89,47% των συνδέσμων είναι δρόμοι χωρίς σηματοδότηση με μέσο όρο μήκους 92μ.

Στον πίνακα 11 φαίνονται τα αποτελέσματα. Όπως φαίνεται το κλείσιμο ενός μόνο δρόμου μπορεί να επιφέρει μείωση έως και 486 λεπτά στο συνολικό χρόνο μετακίνησης και κατ' επέκταση μείωση του Price of Anarchy 0,056% δηλαδή από 1,0531 σε 1,0525.

**Πίνακας 12: Σύνδεσμοι που «πάσχουν» από το Παράδοξο του Braess - Συνάρτηση Conical (100%)**

Section	Road Type	Capacity	Length	V/C Ratio	ΔΤ	New PoA
551656: ΑΧΑΙΩΝ (6608)	44: Street	850	88	0,3862	486,00	1,0525
555308: ΕΥΦΡΑΝΟΡΟΣ (7076)	94: Signalized Street	1000	157	0,2514	372,00	1,0526
554908: ΑΧΑΙΩΝ (6606)	44: Street	850	93	0,3509	276,00	1,0527
551624 (6557)	44: Street	850	42	0,155	150,00	1,0529
552044: Σολωμού (6864)	44: Street	850	62	0,5169	144,00	1,0529
555634: ΙΟΛΑΟΥ	44: Street	850	22	0,1384	108,00	1,0530
554810: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ	94: Signalized Street	1000	62	0,0286	108,00	1,0530
555566: ΚΡΗΣΙΛΑ	44: Street	850	161	0,7458	96,00	1,0530
628573: Θεμιστοκλέους	44: Street	850	171	0,1277	84,00	1,0530
662503: ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΥ (7017)	44: Street	850	85	0,3534	78,00	1,0530
554822 (6443)	44: Street	850	11	0,036	78,00	1,0530
555508: ΚΑΛΛΙΡΟΗΣ (8261)	44: Street	850	165	0,281	72,00	1,0530
551842 (6757)	44: Street	850	159	0,0099	66,00	1,0530
551782: ΤΖΩΡΤΖ (6726)	44: Street	850	56	0,5718	48,00	1,0530
658524	8: Arterial	2100	27	0,0004	36,00	1,0531
555094: ΘΕΟΦΙΛΟΠΟΥΛΟΥ (6654)	44: Street	850	154	0,9529	24,00	1,0531
551390: ΑΓΗΣΙΛΑΟΥ (6460)	44: Street	850	70	0,545	24,00	1,0531
552368: ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΥ (7017)	44: Street	850	63	0,4589	18,00	1,0531
648943	44: Street	850	99	0,0809	6,00	1,0531



**Εικόνα 45: Δρόμοι που «πάσχουν» από το παράδοξο του Braess - Συνάρτηση Conical (100%)**

# 6. Συμπεράσματα

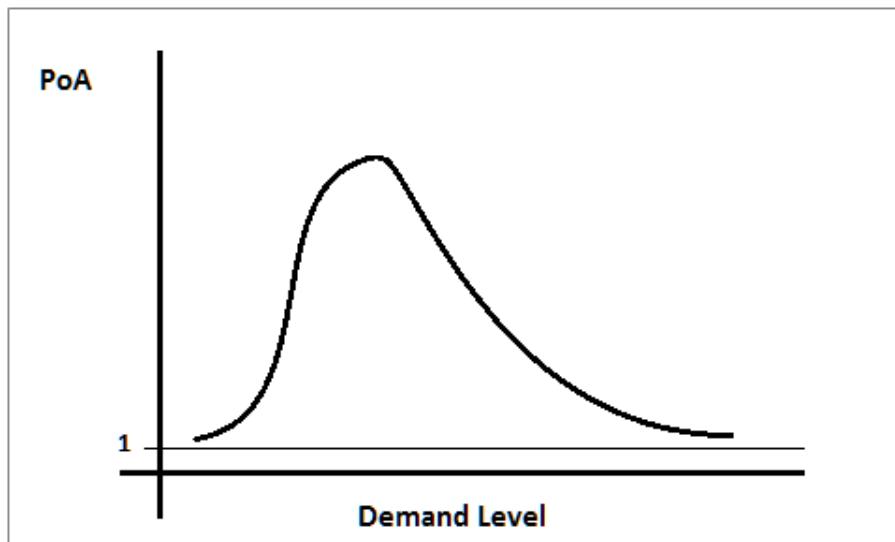
## 6.1 Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ποσοτικούση του φαινομένου της εγωιστικής επιλογής διαδρομής (selfish routing) και ο υπολογισμός του Τιμήματος της Αναρχίας (Price of Anarchy) σε πραγματικά αστικά οδικά δίκτυα, και συγκεκριμένα στο δίκτυο της Αθήνας. Το Τίμημα της Αναρχίας είναι ένα μέγεθος που μετράει την αναποτελεσματικότητα της ισορροπίας (Ισορροπία Nash) ενός δικτύου συγκρίνοντας ουσιαστικά το συνολικό κόστος που προκύπτει από την ισορροπία Nash και την εγωιστική επιλογή διαδρομής, με το ελάχιστο κόστος που μπορεί να έχει το δίκτυο, το οποίο προκύπτει από την συνεργασία των χρηστών υπό την «καθοδήγηση» μιας «κεντρικής διαχείρισης». Επίσης διερευνήθηκε το παράδοξο του Braess, η εφαρμογή του σε πραγματικά οδικά δίκτυα και η χρήση του ως στρατηγική μείωσης του Τιμήματος της Αναρχίας, το οποίο ουσιαστικά εικάζει πως κάποιες κατασκευαστικές βελτιώσεις στο δίκτυο μπορούν να οδηγήσουν σε μείωση της αποτελεσματικότητας του δικτύου.

## 6.2 Μεθοδολογία και βασικά συμπεράσματα

Ο υπολογισμός του Τιμήματος της Αναρχίας και η διερεύνηση του Παράδοξου του Braess έγινε με την χρήση ειδικού λογισμικού προσομοίωσης. Μελετήθηκαν δύο δίκτυα, ο Μικρός Δακτύλιος Αθηνών και ένα μεγαλύτερο δίκτυο, που ονομάστηκε για τις ανάγκες της διπλωματικής «Ευρύτερο Δίκτυο». Χρησιμοποιήθηκαν δύο συναρτήσεις για τον υπολογισμό των παραπάνω. Η συνάρτηση BPR και η συνάρτηση Conical, που είναι από τις πιο ευρέως χρησιμοποιημένες συναρτήσεις στην μακροσκοπική προσομοίωση. Ο υπολογισμός του Τιμήματος έγινε και για τα δύο δίκτυα, για διάφορα επίπεδα ζήτησης ως ποσοστά της ζήτησης αιχμής (επίπεδο ζήτησης που αντιστοιχεί στο 100%). Η διερεύνηση του παράδοξου του Braess έγινε για τον δακτύλιο μόνο, και για συνδέσμους με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.

Το Τίμημα της Αναρχίας βρέθηκε ότι είναι συνάρτηση της κυκλοφοριακής ζήτησης του δικτύου. Πιο συγκεκριμένα για μικρά επίπεδα ζήτησης παίρνει χαμηλές τιμές πολύ κοντά στο 1, για ενδιάμεσα επίπεδα ζήτησης γύρω στο 65% με 80% παίρνει την μέγιστη τιμή του, ενώ σε μεγάλα επίπεδα ζήτησης φτάνει πάλι κοντά στο 1. Η γραφική παράσταση του Τιμήματος της Αναρχίας σε συνάρτηση με την ζήτηση, έχει την μορφή που φαίνεται στην Εικόνα 45.



Εικόνα 46: Μορφή διαγράμματος του Τιμήματος της Αναρχίας συναρτήσει του Επιπέδου Ζήτησης

Επιπροσθέτως, το Τίμημα της Αναρχίας εξαρτάται από την συνάρτηση κόστους. Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι η συνάρτηση BPR δίνει χαμηλότερες τιμές από την συνάρτηση Conical (για τα ανάλογα επίπεδα ζήτησης), καθώς και στα δύο δίκτυα η γραφική παράσταση του Τιμήματος της Αναρχίας που αντιστοιχεί στην συνάρτηση BPR, βρίσκεται χαμηλότερα από την αντίστοιχη της συνάρτησης Conical. Επίσης, για την συνάρτηση Conical το Τίμημα μειώνεται βραδύτερα. Από τα διαγράμματα 17, 18, 19 και 25, 26, 27 για τον Δακτύλιο και για το «Ευρύτερο Δίκτυο», αντίστοιχα, εξάγεται εύκολα ότι μικρές τιμές του Τιμήματος της Αναρχίας δεν σημαίνει απαραίτητα χαμηλό επιπλέον κόστος λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς. Όπως φαίνεται και στα διαγράμματα που αναφέρθηκαν πιο πάνω, το μέγιστο επιπλέον κόστος ανά ταξίδι λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς (Selfish Routing) δεν

αντιστοιχεί στο μέγιστο Τίμημα της Αναρχίας, αλλά είναι αύξουσα συνάρτηση της κυκλοφοριακής ζήτησης. Αυτό σημαίνει ότι το Τίμημα της Αναρχίας δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για gating control στρατηγικές. Παρόλα αυτά θα αποτελούσε μία πολύ καλή μετρική αξιολόγησης σε συστήματα καθοδήγησης, καθώς μείωση του Τιμήματος έπειτα από εφαρμογή κάποιας στρατηγικής καθοδήγησης, σημαίνει ότι το δίκτυο πλησιάζει το βέλτιστο, και όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η μείωση, τόσο αποτελεσματικότερη είναι η στρατηγική καθοδήγησης.

Τέλος, όσον αφορά στο Τίμημα της Αναρχίας, υπάρχουν ενδείξεις ότι υπάρχει κάποια εξάρτηση από το μέγεθος του δικτύου καθώς και από την κατανομή της ζήτησης, γεγονός που πρέπει να μελετηθεί περισσότερο για την εξαγωγή κάποιου συμπεράσματος.

Το παράδοξο του Braess μελετήθηκε για τον Δακτύλιο μόνο, χρησιμοποιώντας και τις δύο συναρτήσεις, για τα επίπεδα ζήτησης που αντιστοιχούν στον μέγιστο Τίμημα της Αναρχίας και στην ώρα αιχμής. Το φαινόμενο είναι πιο έντονο για την συνάρτηση BPR σε σχέση με την Conical. Και για τις 2 συναρτήσεις ισχύει ότι για την ζήτηση ώρας αιχμής το φαινόμενο είναι πιο έντονο σε σχέση με το επίπεδο ζήτησης που αντιστοιχεί στον μέγιστο Τίμημα. Το παράδοξο υπάρχει και επομένως ο εντοπισμός των συνδέσμων Braess θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως στρατηγική μείωσης του Τιμήματος της Αναρχίας.

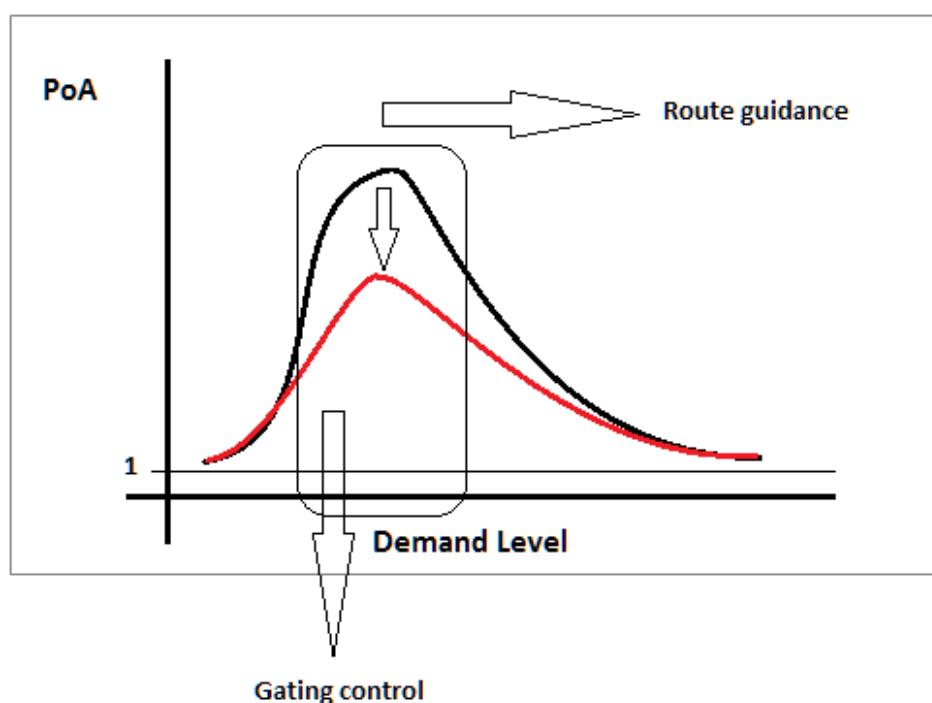
### 6.3 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Για την συγκεκριμένη έρευνα, εξ' αρχής επιβλήθηκαν κάποιοι περιορισμοί ώστε να είναι ευκολότερη η ερμηνεία και ο υπολογισμός του Τιμήματος της Αναρχίας. Λόγω αυτών των περιορισμών, η έρευνα επικεντρώθηκε σε συγκεκριμένα σημεία περισσότερο και σε άλλα όχι. Ως εκ τούτου, κρίνεται σημαντικό να επισημανθούν προτάσεις για περαιτέρω έρευνα στο συγκεκριμένο θέμα.

Αρχικά, η επιλογή των παραμέτρων έγινε σε θεωρητικό επίπεδο ώστε τα αποτελέσματα να είναι συγκρίσιμα. Θα μπορούσε να γίνει βαθμονόμηση, πρώτα σε επίπεδο συνδέσμου, και δεύτερον σε επίπεδο δικτύου των συναρτήσεων που

χρησιμοποιήθηκαν για πιο λεπτομερή και ρεαλιστικά αποτελέσματα. Επίσης θα μπορούσαν να ελεγχθούν και άλλες συναρτήσεις όπως η συνάρτηση Akcelik και η Modified Davidson.

Η μορφή του διαγράμματος του Τιμήματος της Αναρχίας ίσως δίνει κάποιες προοπτικές συσχέτισης με το Μακροσκοπικό Θεμελιώδες Διάγραμμα (Macroscopic Fundamental Diagram-MFD). Σκοπός αυτής της συσχέτισης είναι, όπως φαίνεται στην Εικόνα 46, ο συνδυασμός στρατηγικής gating control με κάποιο σύστημα καθοδήγησης (route guidance system).



Εικόνα 47: Συνδυασμός διαχείρισης δακτυλίου και συστήματος καθοδήγησης

Όσον αφορά στο παράδοξο του Braess προτείνεται να διερευνηθεί για όλα τα επίπεδα ζήτησης και για όλους τους συνδέσμους του Δακτυλίου. Επίσης θα μπορούσε να διερευνηθεί ο συνδυασμός των συνδέσμων Braess, ο οποίος θα επιφέρει μείωση του συνολικού κόστους του δικτύου, καθώς στην παρούσα διπλωματική μελετήθηκε το φαινόμενο μόνο για μεμονωμένους συνδέσμους. Αυτή η διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με την χρήση γενετικών αλγορίθμων ή νευρωνικών δικτύων που υπάρχουν στην βιβλιογραφία.

**Κενή σελίδα**



# Βιβλιογραφία

- [1] Roughgarden, T. 2005. "Selfish Routing and the Price of Anarchy." Cambridge, MA: MIT Press.
- [2] E. Koutsoupias and C. H. Papadimitriou. Worst-case equilibria. In Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, pages 404-413, 1999.
- [3] DUBEY, P. 1986. Inefficiency of Nash equilibria. *Math. Oper. Res.* 11, 1, 1–8
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Price\\_of\\_anarchy](https://en.wikipedia.org/wiki/Price_of_anarchy)
- [5] Review of Road Traffic Control Strategies, Markos Papageorgiou, Fellow, IEEE, Christina Diakaki, Vaya Dinopoulou, Apostolos Kotsialos, Yibing Wang
- [6] C. Barnhart and G. Laporte (Eds.), *Handbook in OR & MS*, Vol. 14, Chapter 11, ITS and Traffic Management
- [7] Jeffery, D.J. (1981). The potential benefits of route guidance. Technical Report LR997, Transport and Road Research Laboratory.
- [8] H. Youn, M.T. Gastner, H. Jeong, Price of anarchy in transportation networks: efficiency and optimality control, *Phys. Rev. Lett.* 12 (101) (2008) 128701.
- [9] Roughgarden, T. 2006. "On the Severity of Braess's Paradox: Designing Networks for Selfish Users is Hard." *Journal of Computer and System Sciences* 72 (5): 922–953.
- [10] Roughgarden, T., and E. Tardos. 2002. "How Bad is Selfish Routing?" *Journal of the ACM* 49 (2): 236–259.
- [11] Yang H., and M. G. H. Bell. 1998. "A Capacity Paradox in Network Design and How to Avoid it." *Transportation Research A* 32 (7): 539–545.
- [12] Korilis, Y. A., A. A. Lazar, and A. Orda. 1999. "Avoiding the Braess Paradox in Non-Cooperative Networks." *Journal of Applied Probability* 36 (1): 211–222.
- [13] Hagstrom J. H., and R. A. Abrams. 2001. "Characterizing Braess's Paradox for Traffic Networks." In *Proceedings of the fourth IEEE conference on intelligent transportation systems*, 837–842.
- [14] Abrams, R. A., and J. N. Hagstrom. 2006. "Improving Traffic Flows at No Cost, In Mathematical and Computational Models for Congestion Charging, edited by Lawphongpanich, S., D. W. Hearn, and M. J. Smith, 1–22. NewYork, USA: Springer.
- [15] Yin, Y., and H. Ieda. 2002. "An Optimal Improvement Scheme for Network Reliability." *Transportation Research Record* 1783: 1–6.

- [16] Aashtiani, H. Z., and H. Poorzahedy. 2004. "Braess' Phenomenon in the Management of Networks and Dissociation of Equilibrium Concepts." *Transportation Planning and Technology* 27 (6): 469–482.
- [17] Pas, E. I., and S. L. Principio. 1997. "Braess'Paradox: Some New Insights." *Transportation Research, Series B* 31 (3): 265–276.
- [18] Fisk, C. 1979. "More Paradoxes in the Equilibrium Assignment Problem." *Transportation Research B* 13 (4): 305–309.
- [19] Nagurney, A. 2010. "The Negation of the Braess Paradox as Demand Increases: The Wisdom of Crowds in Transportation Networks." *Europhysics Letters* 91 (4): 48002, 1–5.
- [20] Nagurney, A., D. C. Parkes, and P. Daniele. (2007). "The Internet, EvolutionaryVariational Inequalities, and the Time-Dependent Braess Paradox." *Computational Management Science* 4 (4): 355–375.
- [21] Lin,W. H., and H. K. Lo. 2009. "Investigating Braess'Paradox withTime Dependent Queues." *Transportation Science* 43 (1): 117–126.
- [22] Arnott, R., A. De Palma, and R. Lindsey. 1993. "Properties of Dynamic Traffic Equilibrium Involving Bottlenecks, Including a Paradox and Metering." *Transportation Science* 27 (2): 148–160.
- [23] Daganzo, C. F. 1998. "Queue spillovers in transportation networks with a route choice." *Transportation Science* 32 (1): 3–11.
- [24] Akamatsu, T., and B. G. Heydecker. 2003. "Detecting Dynamic Traffic Assignment Capacity Paradoxes in Saturated Networks." *Transportation Science* 37 (2): 123–138.
- [25] Park, K. 2011. "Detecting Braess Paradox Based on Stable Dynamics in General Congested Transportation Networks." *Networks and Spatial Economics* 11 (2): 207–232.
- [26] A heuristic methodology to tackle the Braess Paradox detecting problem tailored for real road networks, Saeed Asadi Bagloee, Avishai (Avi) Ceder, Madjid Tavana and Claire Bozic
- [27] Joseph Sussman, Εισαγωγή στα συστήματα μεταφορών
- [28] Wardrop, J. C. Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research," *Proceedings, Institution of Civil Engineers Part 2, 9*, pp. 325–378. 1952
- [29] M.J. Beckmann, C.R. Meguire, C.B. Winsten, *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press, New Haven, 1956.
- [30] Devarajan S (1981) A note on network equilibrium and noncooperative games. *Transp Res B15*:421–426

- [31] Eash, Ronald, Bruce N. Janson, and David Boyce *Equilibrium Trip Assignment: Advantages and Implications for Practice*, *Transportation Research Record* 728, pp. 1–8, 1979.
- [32] Friesz TL (1985) *Transportation network equilibrium, design and aggregation: key developments and research opportunities*. *Transp Res A19*:413–427
- [33] Wardrop, J. G.; Whitehead, J. I. (1952). "Correspondence. Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research". *ICE Proceedings: Engineering Divisions 1* (5): 767
- [34] Dafermos, S., and A. Nagurney. 1984. "Sensitivity Analysis for the Asymmetric Network Equilibrium Problem." *Mathematical Programming* 28 (2): 174–184
- [35] Dafermos, S. C., and F. T. Sparrow. 1969. "The traffic assignment problem for a general network." *Journal of Research of the National Bureau Standards* 72B: 91–118.
- [36] Fisk, C. 1979. "More Paradoxes in the Equilibrium Assignment Problem." *Transportation Research B* 13 (4): 305–309.
- [37] Murchland, J. D. 1970. "Braess's Paradox of Traffic Flow." *Transportation Research* 4 (4): 391–394.
- [38] Sheffi, Y. 1984. "Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods." New Jersey: Prentice-Hall.
- [39] Steinberg, R., and W. I. Zangwill. 1983. "On the Prevalence of the Braess's Paradox." *Transportation Science* 17 (3): 301–318.
- [40] Stewart, N. F. 1980. "Equilibrium vs. System-Optimal Flow: Some Examples." *Transportation Research A* 14 (2): 81–84.
- [41] *Introduction to Transportation Engineering*, Tom V. Mathew and K. V. Krishna Rao
- [42] Dafermos, Stella. C. and F.T. Sparrow *The Traffic Assignment Problem for a General Network.* J. of Res. of the National Bureau of Standards, 73B, pp. 91-118. 1969
- [43] Frank, M.; Wolfe, P. (1956). "An algorithm for quadratic programming".
- [44] Florian, Michael ed., *Traffic Equilibrium Methods*, Springer-Verlag, 1976
- [45] Aimsun 8 Macroscopic Modelling Manual, November 2013, 2005 - 2013 TSS-Transport Simulation Systems
- [46] HEINZ SPIESS, *Conical Volume-Delay Functions*, October 1989
- [47] Waclaw P. Jastrzebski, *Volume Delay Functions*
- [48] Spiess, H. (1990) *Conical Volume-Delay Functions*. *Transportation Science*, 24, 153-158.

- [49] Bureau of Public Roads (1964) *Traffic Assignment Manual*, U.S. Dept. of Commerce, Urban Planning Division, Washington D.C
- [50] Transportation Research Board (1985) *Special Report 209: Highway Capacity Manual*. National Research Council, Washington DC
- [51] Spiess, H. (1990) *Conical Volume-Delay Functions*. *Transportation Science*, 24, 153-158.
- [52] Traffic Research Corporation (1966). *Winnipeg Area Transportation Study*. Report prepared for the Streets and Transit Division of the Metropolitan Corporation of Greater Winnipeg (unpublished).
- [53] Florian M. and Nguyen S. (1976). *An Application and Validation of Equilibrium Trip Assignment Methods*. *Trans. Sci.* 10, 374-390
- [54] Calibration and Evaluation of Link Congestion Functions: Applying Intrinsic Sensitivity of Link Speed as a Practical Consideration to Heterogeneous Facility Types within Urban Network, Enock T. Mtoi\*, Ren Moses, *Journal of Transportation Technologies*, 2014, 4, 141-149
- [55] «Κυκλοφοριακή Τεχνική», I.M. Φραντζεσκάκης, I.K. Γκόλιας, M.X. Πιτσιάβα-Λατινοπούλου
- [56] [https://el.wikipedia.org/wiki/Δακτύλιος\\_Αθηνών](https://el.wikipedia.org/wiki/Δακτύλιος_Αθηνών)

# Παράρτημα

**Πίνακας 13: Σύνδεσμοι που «ευθύνονται» για το Price of Anarchy στον Δακτύλιο με Nash flow > Optimum flow (Κατηγορία 1) – Συνάρτηση BPR**

Section	Road Type	Capacity	Length	Number of Lanes	nash flow>optimum flow
555044: ΑΝΔΡΕΑ ΣΥΓΓΡΟΥ	94: Signalized Street	3000	182	3	771,46
552460: ΒΑΣ.ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α	94: Signalized Street	3000	100	3	760,85
555050: ΑΝΔΡΕΑ ΣΥΓΓΡΟΥ	94: Signalized Street	3000	141	3	732,9
554852: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ	94: Signalized Street	4000	78	4	726,17
552468: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ	94: Signalized Street	4000	119	4	726,17
551224: ΠΛ.ΚΑΡΑΙΣΚΑΚΙ	94: Signalized Street	5000	56	5	674,65
551898: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ	94: Signalized Street	3000	56	3	674,3
552336: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ	94: Signalized Street	3000	126	3	616,83
554860: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7090)	94: Signalized Street	4000	25	4	607,13
552472: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7089)	94: Signalized Street	4000	27	4	607,13
552476: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7090)	94: Signalized Street	4000	45	4	587,33
552482: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7093)	94: Signalized Street	4000	186	4	586,42
552188: ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ (6937)	94: Signalized Street	4000	41	4	567,22
552652: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7990)	94: Signalized Street	3000	35	3	565,95
552762: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8107)	94: Signalized Street	3000	63	3	564,14
552754: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8104)	94: Signalized Street	3000	134	4	564,14
551900: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (6783)	94: Signalized Street	3000	74	3	564,08
552648: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7988)	94: Signalized Street	4000	42	4	559,01
552342: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (7007)	94: Signalized Street	4000	78	4	553,68
551152: ΧΑΛΚΟΚΟΝΔΥΛΗ (6349)	94: Signalized Street	3000	92	3	549,34
551222: ΑΧΙΛΛΕΩΣ (6381)	94: Signalized Street	3000	29	3	541,57
635690: ΜΕΣΟΓΕΙΩΝ (6785)	8: Arterial	10500	171	6	524,18
552640: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7978)	94: Signalized Street	3000	95	3	519,91
552644: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7987)	94: Signalized Street	3000	247	4	519,84
555278: ΡΙΖΑΡΗ (7064)	94: Signalized Street	2000	114	2	519
552634: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7976)	94: Signalized Street	3000	122	3	516,06
555070: ΦΡΑΝΤΖΗ (6644)	94: Signalized Street	2000	45	2	515,03
552194: ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ (6940)	94: Signalized Street	4000	137	5	505,93

552770: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8117)	94: Signalized Street	3000	161	4	496,09
551492: ΦΙΛΕΛΛΗΝΩΝ (6506)	94: Signalized Street	4000	71	4	460,96
556378: ΦΕΙΔΙΠΠΙΔΟΥ (6784)	8: Arterial	8400	16	4	451,43
639519: ΜΕΣΟΓΕΙΩΝ (6784)	44: Street	3400	51	4	450,5
555164: ΦΕΙΔΙΠΠΙΔΟΥ (6784)	8: Arterial	8400	76	5	450,5
552424: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (7049)	94: Signalized Street	3000	92	3	449,69
552428: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (7050)	94: Signalized Street	3000	107	3	449,6
555390: ΑΡΔΗΤΤΟΥ (7122)	94: Signalized Street	3000	306	3	449,07
552664: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7994)	94: Signalized Street	3000	272	4	448,29
551634: ΦΙΛΕΛΛΗΝΩΝ (6562)	94: Signalized Street	4000	162	4	445,57
555206: ΠΑΠΑΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ (6815)	44: Street	1700	145	2	440,16
555232: ΠΑΠΑΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ (7038)	44: Street	1700	171	2	438,33
552474: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7089)	94: Signalized Street	4000	122	4	435,7
552792: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8133)	94: Signalized Street	3000	49	3	423,54
555394: Λεωφόρος Βουλιαγμένης (7124)	8: Arterial	6300	183	3	419,5
552344: ΒΑΣ..ΣΟΦΙΑΣ (7008)	94: Signalized Street	3000	115	3	414,44
555254: ΡΙΖΑΡΗ (7057)	94: Signalized Street	2000	130	2	405,65
551162: ΧΑΛΚΟΚΟΝΔΥΛΗ (6354)	94: Signalized Street	3000	103	3	402,66
555396: ΑΘ.ΔΙΑΚΟΥ (7125)	94: Signalized Street	2000	35	4	400,79
555322: ΑΘ.ΔΙΑΚΟΥ (7095)	94: Signalized Street	2000	132	2	400,79
555222: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (7033)	8: Arterial	6300	33	3	399,92
555184: ΜΕΣΟΓΕΙΩΝ (6792)	8: Arterial	4200	62	2	399,19
554848: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ	94: Signalized Street	2000	14	2	395
551136: ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΟΥ (6341)	94: Signalized Street	3000	14	3	389,95
552110: ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ (6897)	94: Signalized Street	2000	114	2	389,23
551142: ΚΑΜΑΤΕΡΟΥ (6344)	94: Signalized Street	2000	64	2	388,46
552124: ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ (6904)	94: Signalized Street	2000	82	2	385,61
555072: ΦΡΑΝΤΖΗ (6644)	94: Signalized Street	2000	44	2	383,73
555046: ΑΝΔΡΕΑ ΣΥΓΓΡΟΥ (6634)	94: Signalized Street	3000	182	3	376,14
555062: ΑΝΔΡΕΑ ΣΥΓΓΡΟΥ (6640)	94: Signalized Street	3000	484	3	376,13
552658: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7992)	94: Signalized Street	3000	141	3	374,83
555582: ΜΑΡΝΗ (6342)	94: Signalized Street	3000	50	3	374,11
551138: ΜΑΡΝΗ (6342)	94: Signalized Street	2000	20	2	373,12
552764: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8107)	94: Signalized Street	3000	63	3	371,33
552756: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8104)	94: Signalized Street	3000	135	3	371,33
630297: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7975)	94: Signalized Street	3000	42	3	370,58
552628: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7975)	94: Signalized Street	3000	89	3	370,58

551210: ΠΛ.ΚΑΡΑΙΣΚΑΚΙ (6376)	94: Signalized Street	4000	39	4	370,4
551214: ΚΑΡΟΛΟΥ (6377)	94: Signalized Street	2000	80	2	370,17
551208: ΠΛ.ΚΑΡΑΙΣΚΑΚΙ (6374)	94: Signalized Street	3000	57	3	370,07
552356: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (7013)	94: Signalized Street	3000	240	3	368,67
555388: ΑΡΔΗΤΤΟΥ (7121)	94: Signalized Street	3000	85	3	367,09
554806: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ	94: Signalized Street	3000	52	3	365,72
554832: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7423)	94: Signalized Street	4000	46	4	360,61
552778: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8123)	94: Signalized Street	3000	47	3	360,5
552782: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8127)	94: Signalized Street	3000	264	4	360,38
552670: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7999)	94: Signalized Street	3000	173	3	359,93
554844: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8117)	94: Signalized Street	4000	14	4	358,42
552758: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8106)	94: Signalized Street	3000	173	3	358,18
552348: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (7009)	94: Signalized Street	3000	206	3	357,22
649089: ΚΑΡΟΛΟΥ (6356)	94: Signalized Street	2000	42	2	356,09
555588: ΜΑΡΝΗ (6356)	94: Signalized Street	2000	24	2	356,09
551168: ΚΑΡΟΛΟΥ (6356)	94: Signalized Street	2000	73	2	356,09
551166: ΜΑΡΝΗ (6355)	94: Signalized Street	2000	63	2	355,38
551412: ΙΕΡΑ ΟΔΟΣ (6472)	94: Signalized Street	2000	60	2	345,25
552630: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7975)	94: Signalized Street	3000	140	3	340,17
555234: ΒΑΣ.ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ (7041)	94: Signalized Street	3000	119	3	336,74
552118: ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ (6901)	94: Signalized Street	2000	70	2	336,04
552156: ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ (6920)	94: Signalized Street	3000	107	3	334,94
552498: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7423)	94: Signalized Street	3000	23	3	334,1
555242: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7043)	8: Arterial	6300	122	3	333,67
555602: ΑΧΙΛΛΕΩΣ (6403)	94: Signalized Street	3000	17	3	333,6
551260: ΑΧΙΛΛΕΩΣ (6403)	94: Signalized Street	3000	56	3	333,6
555078: ΦΡΑΝΤΖΗ (6646)	94: Signalized Street	2000	205	2	332,66
555272: ΡΙΖΑΡΗ (7062)	94: Signalized Street	2000	52	2	331,6
555142: ΚΑΛΛΙΡΟΗΣ (6694)	94: Signalized Street	2000	87	2	328,51
555136: ΚΑΛΛΙΡΟΗΣ (6689)	44: Street	1700	66	2	327,34
552646: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7988)	94: Signalized Street	3000	42	3	326,62
552638: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7978)	94: Signalized Street	3000	95	4	324,28
552642: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7987)	94: Signalized Street	3000	246	3	324,21
551236: ΑΓΙΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (6392)	94: Signalized Street	2000	58	2	322,87
552104: ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ (6894)	94: Signalized Street	2000	189	2	317,98
555392: ΑΡΔΗΤΤΟΥ (7123)	94: Signalized Street	3000	8	3	304,12
552650: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7990)	94: Signalized Street	4000	35	4	302,79

**Πίνακας 14: Σύνδεσμοι που «ευθύνονται» για το Τίμημα της Αναρχίας στον Δακτύλιο με Nash flow < Optimum flow (Κατηγορία 2) – Συνάρτηση BPR**

Section	Road Type	Capacity	Length	Number of Lanes	nash flow<optimum flow
555246: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (7044)	94: Signalized Street	3000	33	3	-1191,8
551702: ΧΑΤΖΗΧΡΗΣΤΟΥ (6633)	44: Street	1700	89	2	-1155,91
555464: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8170)	94: Signalized Street	2000	161	2	-1037,82
551692: ΒΕΪΚΟΥ (6628)	44: Street	1700	203	2	-982,37
554854: ΒΑΣ.ΟΛΓΑΣ	94: Signalized Street	3000	36	3	-917,32
555058: ΠΕΤΜΕΖΑ (6639)	44: Street	1700	102	2	-915,48
551732: ΒΕΪΚΟΥ (6697)	44: Street	1700	172	2	-891,3
551698: ΒΕΪΚΟΥ (6631)	44: Street	1700	367	2	-862,72
555252: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7056)	8: Arterial	6300	233	3	-813,43
551684: ΒΕΪΚΟΥ (6624)	44: Street	1700	143	2	-802,63
551680: ΒΕΪΚΟΥ (6620)	44: Street	1700	143	2	-802,63
555316: ΒΑΣ.ΟΛΓΑΣ (7091)	94: Signalized Street	3000	410	3	-798,28
555460: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8162)	94: Signalized Street	2000	119	3	-790,09
555454: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8160)	94: Signalized Street	2000	119	2	-788,93
555450: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8158)	94: Signalized Street	2000	92	2	-788,93
555244: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7043)	8: Arterial	6300	123	4	-780,58
555528: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6799)	8: Arterial	8400	115	4	-762,13
555198: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6799)	8: Arterial	6300	310	4	-762,13
552186: ΣΤΑΔΙΟΥ (6936)	94: Signalized Street	4000	36	4	-706,54
555068: ΚΑΛΛΙΡΟΗΣ (6642)	94: Signalized Street	3000	32	3	-703,96
555264: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7059)	8: Arterial	6300	110	3	-642,93
555210: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (6816)	94: Signalized Street	2000	119	3	-632,07
555446: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8157)	94: Signalized Street	2000	193	3	-628,31
555292: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7072)	8: Arterial	6300	183	3	-626,81
551472: ΣΤΑΔΙΟΥ (6496)	94: Signalized Street	3000	123	3	-623,27
551580: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (6535)	94: Signalized Street	2000	132	2	-622,04
551578: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (6534)	94: Signalized Street	2000	185	3	-622,04
554898: ΠΕΡΣΕΦΟΝΗΣ (6539)	44: Street	3400	115	4	-604,5
555204: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (6814)	94: Signalized Street	2000	126	2	-585,36
555214: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (6817)	94: Signalized Street	2000	161	2	-585,27
555208: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (6816)	94: Signalized Street	2000	119	2	-584,24
555654: ΠΛ.ΜΕΡΚΟΥΡΗ	44: Street	850	51	1	-578,8
551708: ΓΕΝΝΑΙΟΥ ΚΟΛΟΚΟΤΡΩΝΗ (6662)	44: Street	850	327	1	-578,8
551660: ΑΧΑΙΩΝ (6611)	44: Street	850	100	1	-578,8
551942: Τιμολέοντος Φιλήμονος	44: Street	850	104	1	-577,48

(6819)					
551718 (6667)	44: Street	850	461	1	-576,38
552480: ΛΥΣΙΚΡΑΤΟΥΣ (7092)	44: Street	850	93	1	-569,15
551648: ΛΥΣΙΚΡΑΤΟΥΣ (6570)	44: Street	850	46	1	-569,15
551646: ΤΡΙΠΟΔΩΝ (6568)	44: Street	850	277	1	-568,2
552264: ΣΤΑΔΙΟΥ (6971)	94: Signalized Street	3000	68	3	-567,16
551640: ΦΛΕΣΣΑ (6565)	44: Street	850	175	1	-559,11
555326: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7096)	8: Arterial	6300	121	4	-553,56
551442 (6485)	44: Street	850	108	1	-552,68
555052: ΒΟΥΡΒΑΧΗ (6637)	44: Street	2550	131	3	-549,66
551428: ΠΛ. ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ (6478)	44: Street	2550	132	3	-549,12
551384: ΚΟΛΟΚΥΝΘΟΥΣ (6457)	44: Street	1700	61	2	-545,2
551476: ΣΤΑΔΙΟΥ (6498)	94: Signalized Street	3000	71	3	-541,4
551694: ΖΙΝΝΗ (6629)	44: Street	850	52	1	-536,61
551628: ΝΙΚΟΔΗΜΟΥ (6559)	44: Street	850	143	1	-530,09
555004: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (6593)	94: Signalized Street	3000	117	3	-527,47
555632 (6481)	44: Street	850	132	1	-522,64
551434 (6481)	44: Street	1700	140	2	-522,64
555298: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7073)	8: Arterial	6300	169	3	-522,2
555182: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6791)	8: Arterial	6300	205	3	-518,18
555000: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (6595)	94: Signalized Street	3000	69	3	-515,22
551632: Γ. ΣΟΥΡΗ (6561)	44: Street	1700	77	2	-514,71
554992: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (6598)	94: Signalized Street	4000	32	4	-512,8
555194: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6796)	8: Arterial	6300	114	3	-512,47
555190: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6794)	8: Arterial	8400	127	4	-512,47
648865: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (4935)	94: Signalized Street	2000	320	2	-510,96
555662: ΔΗΜΟΦΩΝΤΟΣ (6575)	44: Street	850	80	1	-503,81
554988: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (6670)	94: Signalized Street	3000	34	3	-502,96
554978: ΚΑΛΛΙΡΟΗΣ (6671)	94: Signalized Street	3000	113	3	-502,96
554896: ΗΡΑΚΛΕΙΔΩΝ (6536)	44: Street	1700	108	2	-499,1
555598: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7073)	8: Arterial	6300	26	3	-480,12
554938: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (4935)	94: Signalized Street	2000	103	2	-477,92
554952: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (6582)	94: Signalized Street	2000	242	2	-469,99
554950: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (6585)	94: Signalized Street	2000	78	2	-469,99
554942: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (6587)	94: Signalized Street	2000	61	2	-469,98
554958: ΗΡΑΚΛΕΙΔΩΝ (6578)	44: Street	1700	72	2	-468,41
551584: ΔΗΜΟΦΩΝΤΟΣ (6540)	44: Street	850	86	1	-463,77
551774: ΠΑΤΗΣΙΩΝ (6722)	94: Signalized Street	4000	45	4	-462,19
554900: ΗΡΑΚΛΕΙΔΩΝ (6538)	44: Street	2550	146	3	-452,76
555418: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8088)	94: Signalized Street	2000	171	2	-451,44
551914: Λάχιτος (6806)	44: Street	1700	56	2	-449,67
555660: ΚΥΜΑΙΩΝ	44: Street	850	181	1	-444,2

551904: ΣΟΥΤΣΟΥ (6798)	44: Street	850	87	1	-441,62
555420: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8135)	94: Signalized Street	2000	208	2	-438,46
551918: Δεινοκράτους (6807)	44: Street	850	249	1	-438,07
551450: ΕΥΡΙΠΙΔΟΥ (6488)	44: Street	850	127	1	-436,22
555094: ΘΕΟΦΙΛΟΠΟΥΛΟΥ (6654)	44: Street	850	154	1	-434,38
551586: ΝΗΛΕΩΣ (6541)	44: Street	850	179	1	-432,97
552478: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7090)	94: Signalized Street	4000	84	4	-431,22
555668: ΑΡΑΚΥΝΘΟΥ	44: Street	850	219	1	-429,41
555440: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8146)	94: Signalized Street	2000	73	2	-428,5
555666: ΣΤΗΣΙΚΛΕΟΥΣ	44: Street	850	880	1	-427,48
551454: ΔΡΑΓΑΤΣΑΝΙΟΥ (6490)	44: Street	850	168	1	-425,87
551444: ΕΥΡΙΠΙΔΟΥ (6486)	44: Street	850	113	1	-424,14
555174: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6789)	8: Arterial	8400	101	4	-424,08
555434: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8143)	94: Signalized Street	2000	139	2	-417,8
555430: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8140)	94: Signalized Street	2000	101	2	-417,79
642554: ΦΙΛΟΠΑΠΠΟΥ (6627)	44: Street	850	431	1	-417,54
551690: ΦΙΛΟΠΑΠΠΟΥ (6627)	44: Street	850	123	1	-417,54
555424: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8138)	94: Signalized Street	2000	122	2	-414,41
551892: Γέλωνος (6778)	44: Street	1700	138	2	-412,99
551908: Δεινοκράτους (6804)	44: Street	850	184	1	-412,86
555096: ΚΑΛΛΙΡΟΗΣ (6655)	94: Signalized Street	3000	42	3	-402,24
552286: ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ (6982)	94: Signalized Street	4000	80	4	-401,87
554894: ΝΗΛΕΩΣ (6537)	44: Street	1700	79	2	-401,63
551654: ΣΤΗΣΙΚΛΕΟΥΣ (6576)	44: Street	850	884	1	-398,33
551664: ΑΡΑΚΥΝΘΟΥ (6613)	44: Street	850	219	1	-398,18
551724: ΠΑΝΑΙΤΩΛΙΟΥ (6675)	44: Street	850	436	1	-398,07
551650: ΑΚΑΜΑΝΤΟΣ (6571)	44: Street	850	249	1	-396,48
551588: ΝΗΛΕΩΣ (6542)	44: Street	850	241	1	-396,47
642557: ΦΙΛΟΠΑΠΠΟΥ (6627)	44: Street	850	123	1	-396,19
642550	44: Street	850	109	1	-396,19
555674: ΖΙΝΝΗ	44: Street	850	53	1	-395,61
574219: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (4877)	34: On/Off Ramp	1800	101	4	-393,77
554916: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (4877)	34: On/Off Ramp	900	96	1	-393,77
555008: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (4888)	94: Signalized Street	3000	216	3	-393,77
554920: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (4880)	94: Signalized Street	2000	408	3	-393,27
552008: ΠΑΤΗΣΙΩΝ (6847)	94: Signalized Street	3000	46	3	-392,64
554892: ΝΗΛΕΩΣ (6572)	44: Street	850	68	1	-391,87
552250 (6965)	44: Street	850	142	1	-390,93
552034: Κάνιγγος (6859)	44: Street	850	45	1	-390,34
551936: Πέτρου Κόκκαλη (6813)	44: Street	2550	107	3	-389,11
551386: ΑΓΗΣΙΛΑΟΥ (6458)	44: Street	850	105	1	-386,3
552282: ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ (6980)	94: Signalized Street	4000	93	4	-383,24

552266: ΑΜΕΡΙΚΗΣ (6972)	44: Street	850	104	1	-380,43
551996: ΠΑΤΗΣΙΩΝ (6842)	94: Signalized Street	3000	50	3	-376,91
555120: ΒΕΪΚΟΥ (6681)	44: Street	850	74	1	-375,77
555474: ΣΠΥΡΟΥ ΜΕΡΚΟΥΡΗ (8179)	94: Signalized Street	2000	197	2	-373,52
555468: ΣΠΥΡΟΥ ΜΕΡΚΟΥΡΗ (8178)	94: Signalized Street	2000	53	2	-369,65
555176: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6790)	8: Arterial	8400	17	4	-369,29
551980: ΖΩΔΟΧΟΥ ΠΗΓΗΣ (6833)	44: Street	850	192	1	-366,75
551896: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6781)	8: Arterial	12600	10	6	-365,09
372789: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥΠΟΛΕΩΣ (7540)	94: Signalized Street	2000	286	3	-353,51
372795: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥΠΟΛΕΩΣ (7541)	94: Signalized Street	2000	124	2	-351,72
555476: ΣΠΥΡΟΥ ΜΕΡΚΟΥΡΗ (8181)	94: Signalized Street	2000	111	2	-351,72
551276: ΘΕΡΜΟΠΥΛΩΝ (6410)	44: Street	1700	156	2	-351,67
658525: ΑΧΙΛΛΕΩΣ (7539)	44: Street	850	134	1	-351,6
372787: ΑΧΙΛΛΕΩΣ (7539)	44: Street	850	33	1	-351,6
551912: Πέτρου Κόκκαλη (6805)	44: Street	2550	126	3	-348,54
552330: ΠΛ. Φιλικής Εταιρίας (7002)	44: Street	1700	44	2	-341,71
552040: Κάνγγος (6862)	44: Street	850	54	1	-340,63
551538: ΒΟΡΕΟΥ (6521)	44: Street	850	123	1	-337,3
551512 (6513)	44: Street	850	168	1	-337,3
551466: ΚΟΛΟΚΟΤΡΩΝΗ (6494)	44: Street	850	117	1	-337,3
555444: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8157)	94: Signalized Street	2000	194	3	-334,43
555378: ΚΑΡΕΑ (7117)	8: Arterial	6300	45	3	-333,56
551786: ΣΤΟΥΡΝΑΡΑ (6728)	44: Street	1700	61	2	-323,78
555412: ΚΑΡΕΑ (7133)	8: Arterial	6300	99	3	-319,41
554908: ΑΧΑΙΩΝ (6606)	44: Street	850	93	1	-318,84
551656: ΑΧΑΙΩΝ (6608)	44: Street	850	88	1	-317,6
551226: ΔΕΛΗΓΙΩΡΓΗ (6383)	94: Signalized Street	2000	101	2	-309,9
551700: ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (6632)	44: Street	1700	137	2	-309,47
551404: ΑΓΗΣΙΛΑΟΥ (6467)	44: Street	850	53	1	-308,77
551390: ΑΓΗΣΙΛΑΟΥ (6460)	44: Street	850	70	1	-308,77
551984 (6836)	44: Street	850	43	1	-306,21
552102: ΚΑΛΛΙΔΡΟΜΙΟΥ (6893)	44: Street	850	120	1	-305,37
661391: ΗΛΙΟΥΠΟΛΕΩΣ (7118)	8: Arterial	6300	115	3	-305,32
661341: ΗΛΙΟΥΠΟΛΕΩΣ (7118)	8: Arterial	6300	248	3	-305,32
555380: ΗΛΙΟΥΠΟΛΕΩΣ (7118)	8: Arterial	6300	107	3	-305,32
555404: ΒΟΥΡΒΑΧΗ (7129)	44: Street	1700	118	2	-304,06
555402: ΤΙΜΟΛΕΟΝΤΟΣ (7128)	44: Street	2550	49	3	-304,06
552766: ΖΑΧΑΡΩΦ (8108)	94: Signalized Street	2000	171	2	-302,63
555098: ΘΕΟΦΙΛΟΠΟΥΛΟΥ (6656)	44: Street	1700	6	2	-301,71

**Πίνακας 15: Σύνδεσμοι που «ευθύνονται» για το Τίμημα της Αναρχίας στον Δακτύλιο με Nash flow > Optimum flow (Κατηγορία 1) – Συνάρτηση Conical**

Section	Road Type	Capacity	Length	Number of Lanes	Nash flow>Optimum flow
555044: ΑΝΔΡΕΑ ΣΥΓΓΡΟΥ (6634)	94: Signalized Street	3000	182	3	668,72
554852: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7089)	94: Signalized Street	4000	78	4	658,27
552468: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7088)	94: Signalized Street	4000	119	4	658,27
555050: ΑΝΔΡΕΑ ΣΥΓΓΡΟΥ (6635)	94: Signalized Street	3000	141	3	630,78
551898: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (6783)	94: Signalized Street	3000	56	3	550,09
635690: ΜΕΣΟΓΕΙΩΝ (6785)	8: Arterial	10500	171	6	542,03
552460: ΒΑΣ.ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α (7084)	94: Signalized Street	3000	100	3	523,23
639519: ΜΕΣΟΓΕΙΩΝ (6784)	44: Street	3400	51	4	507,39
555164: ΦΕΙΔΙΠΠΙΔΟΥ (6784)	8: Arterial	8400	76	5	507,39
556378: ΦΕΙΔΙΠΠΙΔΟΥ (6784)	8: Arterial	8400	16	4	507,18
551224: ΠΛ.ΚΑΡΑΙΣΚΑΚΙ (6382)	94: Signalized Street	5000	56	5	499,66
554860: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7090)	94: Signalized Street	4000	25	4	499,09
552472: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7089)	94: Signalized Street	4000	27	4	499,09
552482: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7093)	94: Signalized Street	4000	186	4	489,45
552476: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7090)	94: Signalized Street	4000	45	4	489,16
552770: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8117)	94: Signalized Street	3000	161	4	430,47
552342: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (7007)	94: Signalized Street	4000	78	4	422,68
552762: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8107)	94: Signalized Street	3000	63	3	401,51
552754: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8104)	94: Signalized Street	3000	134	4	401,51
551900: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (6783)	94: Signalized Street	3000	74	3	401,48
552778: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8123)	94: Signalized Street	3000	47	3	399,57
555294: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7072)	8: Arterial	6300	183	4	398,45
552344: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (7008)	94: Signalized Street	3000	115	3	394,94
555390: ΑΡΔΗΤΤΟΥ (7122)	94: Signalized Street	3000	306	3	386,05
551152: ΧΑΛΚΟΚΟΝΔΥΛΗ (6349)	94: Signalized Street	3000	92	3	380,29
552336: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (7006)	94: Signalized Street	3000	126	3	379,34
552782: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8127)	94: Signalized Street	3000	264	4	377,44
552648: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7988)	94: Signalized Street	4000	42	4	376,7
552652: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7990)	94: Signalized Street	3000	35	3	375,07
555070: ΦΡΑΝΤΖΗ (6644)	94: Signalized Street	2000	45	2	365,68
552670: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7999)	94: Signalized Street	3000	173	3	364,17
552644: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7987)	94: Signalized Street	3000	247	4	352,76
552640: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7978)	94: Signalized Street	3000	95	3	352,76
552634: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (7976)	94: Signalized Street	3000	122	3	352,3
552764: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8107)	94: Signalized Street	3000	63	3	345,89
552756: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8104)	94: Signalized Street	3000	135	3	345,89
555206: ΠΑΠΑΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ (6815)	44: Street	1700	145	2	339,53
552792: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8133)	94: Signalized Street	3000	49	3	338,67

555062: ΑΝΔΡΕΑ ΣΥΓΓΡΟΥ (6640)	94: Signalized Street	3000	484	3	333,81
555046: ΑΝΔΡΕΑ ΣΥΓΓΡΟΥ (6634)	94: Signalized Street	3000	182	3	333,8
555232: ΠΑΠΑΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ (7038)	44: Street	1700	171	2	332,87
552348: ΒΑΣ..ΣΟΦΙΑΣ (7009)	94: Signalized Street	3000	206	3	332,62
555222: ΒΑΣ..ΣΟΦΙΑΣ (7033)	8: Arterial	6300	33	3	330,46
552356: ΒΑΣ..ΣΟΦΙΑΣ (7013)	94: Signalized Street	3000	240	3	330,07
551138: ΜΑΡΝΗ (6342)	94: Signalized Street	2000	20	2	324,38
551142: ΚΑΜΑΤΕΡΟΥ (6344)	94: Signalized Street	2000	64	2	323,77
551136: ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΟΥ (6341)	94: Signalized Street	3000	14	3	323,77
552424: ΒΑΣ..ΣΟΦΙΑΣ (7049)	94: Signalized Street	3000	92	3	323,71
552428: ΒΑΣ..ΣΟΦΙΑΣ (7050)	94: Signalized Street	3000	107	3	323,61
555394: Λεωφόρος Βουλιαγμένης (7124)	8: Arterial	6300	183	3	321,22
554844: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8117)	94: Signalized Street	4000	14	4	317,79
552758: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (8106)	94: Signalized Street	3000	173	3	317,67
555582: ΜΑΡΝΗ (6342)	94: Signalized Street	3000	50	3	314,7
555278: ΡΙΖΑΡΗ (7064)	94: Signalized Street	2000	114	2	309,43
649089: ΚΑΡΟΛΟΥ (6356)	94: Signalized Street	2000	42	2	307,12
555588: ΜΑΡΝΗ (6356)	94: Signalized Street	2000	24	2	307,12
551168: ΚΑΡΟΛΟΥ (6356)	94: Signalized Street	2000	73	2	307,12
551166: ΜΑΡΝΗ (6355)	94: Signalized Street	2000	63	2	306,69
554846: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΣ (6783)	94: Signalized Street	3000	9	3	305,51
552408 (7035)	44: Street	2550	121	4	304,17
551214: ΚΑΡΟΛΟΥ (6377)	94: Signalized Street	2000	80	2	302,44

**Πίνακας 16: Σύνδεσμοι που «ευθύνονται» για το Τίμημα της Αναρχίας στον Δακτύλιο με Nash flow < Optimum flow (Κατηγορία 2) – Συνάρτηση Conical**

Section	Road Type	Capacity	Length	Number of Lanes	Nash flow<Optimum flow
551702: ΧΑΤΖΗΧΡΗΣΤΟΥ (6633)	44: Street	1700	89	2	-826,64
555464: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8170)	94: Signalized Street	2000	161	2	-654,85
554854: ΒΑΣ.ΟΛΓΑΣ	94: Signalized Street	3000	36	3	-635,85
555058: ΠΕΤΜΕΖΑ (6639)	44: Street	1700	102	2	-628,76
551692: ΒΕΪΚΟΥ (6628)	44: Street	1700	203	2	-626,29
551580: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (6535)	94: Signalized Street	2000	132	2	-614,23
551578: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (6534)	94: Signalized Street	2000	185	3	-614,23
551684: ΒΕΪΚΟΥ (6624)	44: Street	1700	143	2	-589,96
551680: ΒΕΪΚΟΥ (6620)	44: Street	1700	143	2	-589,96
551698: ΒΕΪΚΟΥ (6631)	44: Street	1700	367	2	-572,02
555204: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (6814)	94: Signalized Street	2000	126	2	-571,52

555214: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (6817)	94: Signalized Street	2000	161	2	-571,47
555246: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (7044)	94: Signalized Street	3000	33	3	-570,47
555208: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (6816)	94: Signalized Street	2000	119	2	-569,88
552186: ΣΤΑΔΙΟΥ (6936)	94: Signalized Street	4000	36	4	-560,79
551732: ΒΕΪΚΟΥ (6697)	44: Street	1700	172	2	-549,5
555460: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8162)	94: Signalized Street	2000	119	3	-543,97
555454: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8160)	94: Signalized Street	2000	119	2	-543,68
555450: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8158)	94: Signalized Street	2000	92	2	-543,68
555244: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7043)	8: Arterial	6300	123	4	-539,37
555528: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6799)	8: Arterial	8400	115	4	-529,07
555198: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6799)	8: Arterial	6300	310	4	-529,07
554898: ΠΕΡΣΕΦΟΝΗΣ (6539)	44: Street	3400	115	4	-527,98
551472: ΣΤΑΔΙΟΥ (6496)	94: Signalized Street	3000	123	3	-518,6
555210: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (6816)	94: Signalized Street	2000	119	3	-518,31
555252: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7056)	8: Arterial	6300	233	3	-513,14
555446: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8157)	94: Signalized Street	2000	193	3	-511,33
555418: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8088)	94: Signalized Street	2000	171	2	-507,19
555420: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8135)	94: Signalized Street	2000	208	2	-499,2
551476: ΣΤΑΔΙΟΥ (6498)	94: Signalized Street	3000	71	3	-492,78
552264: ΣΤΑΔΙΟΥ (6971)	94: Signalized Street	3000	68	3	-480,91
555654: ΠΛ.ΜΕΡΚΟΥΡΗ	44: Street	850	51	1	-479,7
551708: ΓΕΝΝΑΙΟΥ ΚΟΛΟΚΟΤΡΩΝΗ (6662)	44: Street	850	327	1	-479,7
551660: ΑΧΑΙΩΝ (6611)	44: Street	850	100	1	-479,7
551718 (6667)	44: Street	850	461	1	-478
555316: ΒΑΣ.ΟΛΓΑΣ (7091)	94: Signalized Street	3000	410	3	-476,68
555440: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8146)	94: Signalized Street	2000	73	2	-471,65
555434: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8143)	94: Signalized Street	2000	139	2	-462,04
555424: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8138)	94: Signalized Street	2000	122	2	-462,04
555430: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8140)	94: Signalized Street	2000	101	2	-462,04
551942: Τιμολέοντος Φιλήμονος (6819)	44: Street	850	104	1	-453,16
551428: ΠΛ. ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ (6478)	44: Street	2550	132	3	-440,9
551442 (6485)	44: Street	850	108	1	-438,41
555000: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (6595)	94: Signalized Street	3000	69	3	-430,73
554992: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (6598)	94: Signalized Street	4000	32	4	-429,93
648865: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (4935)	94: Signalized Street	2000	320	2	-426,34
554988: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (6670)	94: Signalized Street	3000	34	3	-426,16
554978: ΚΑΛΛΙΡΟΗΣ (6671)	94: Signalized Street	3000	113	3	-426,16

552480: ΛΥΣΙΚΡΑΤΟΥΣ (7092)	44: Street	850	93	1	-425,95
551648: ΛΥΣΙΚΡΑΤΟΥΣ (6570)	44: Street	850	46	1	-425,95
551694: ΖΙΝΝΗ (6629)	44: Street	850	52	1	-425,61
551646: ΤΡΙΠΟΔΩΝ (6568)	44: Street	850	277	1	-425,53
551640: ΦΛΕΣΣΑ (6565)	44: Street	850	175	1	-416,67
555632 (6481)	44: Street	850	132	1	-414,31
551434 (6481)	44: Street	1700	140	2	-414,31
555662: ΔΗΜΟΦΩΝΤΟΣ (6575)	44: Street	850	80	1	-410,07
554896: ΗΡΑΚΛΕΙΔΩΝ (6536)	44: Street	1700	108	2	-406,13
551904: ΣΟΥΤΣΟΥ (6798)	44: Street	850	87	1	-403,04
555004: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (6593)	94: Signalized Street	3000	117	3	-397,27
551628: ΝΙΚΟΔΗΜΟΥ (6559)	44: Street	850	143	1	-396,57
554938: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (4935)	94: Signalized Street	2000	103	2	-392,4
555660: ΚΥΜΑΙΩΝ	44: Street	850	181	1	-392,33
554952: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (6582)	94: Signalized Street	2000	242	2	-392,15
554942: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (6587)	94: Signalized Street	2000	61	2	-392,15
554950: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (6585)	94: Signalized Street	2000	78	2	-392,15
551914: Λάχιτος (6806)	44: Street	1700	56	2	-388,88
555068: ΚΑΛΛΙΡΟΗΣ (6642)	94: Signalized Street	3000	32	3	-388,36
551632: Γ. ΣΟΥΡΗ (6561)	44: Street	1700	77	2	-385,5
555668: ΑΡΑΚΥΝΘΟΥ	44: Street	850	219	1	-379,59
555052: ΒΟΥΡΒΑΧΗ (6637)	44: Street	2550	131	3	-379,44
555666: ΣΤΗΣΙΚΛΕΟΥΣ	44: Street	850	880	1	-378,11
551584: ΔΗΜΟΦΩΝΤΟΣ (6540)	44: Street	850	86	1	-376,42
551450: ΕΥΡΙΠΙΔΟΥ (6488)	44: Street	850	127	1	-371,95
642554: ΦΙΛΟΠΑΠΠΟΥ (6627)	44: Street	850	431	1	-371,84
551690: ΦΙΛΟΠΑΠΠΟΥ (6627)	44: Street	850	123	1	-371,84
555182: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6791)	8: Arterial	6300	205	3	-367,42
551444: ΕΥΡΙΠΙΔΟΥ (6486)	44: Street	850	113	1	-359,9
555194: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6796)	8: Arterial	6300	114	3	-357,23
555190: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6794)	8: Arterial	8400	127	4	-357,23
551564: ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (6531)	94: Signalized Street	2000	85	2	-351,64
551558: ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (6529)	94: Signalized Street	2000	149	2	-351,39
554920: ΠΕΙΡΑΙΩΣ (4880)	94: Signalized Street	2000	408	3	-341,03
574219: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (4877)	34: On/Off Ramp	1800	101	4	-341,03
554916: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (4877)	34: On/Off Ramp	900	96	1	-341,03
555008: ΧΑΜΟΣΤΕΡΝΑΣ (4888)	94: Signalized Street	3000	216	3	-341,03
551454: ΔΡΑΓΑΤΣΑΝΙΟΥ (6490)	44: Street	850	168	1	-337,79
552008: ΠΑΤΗΣΙΩΝ (6847)	94: Signalized Street	3000	46	3	-334,05
552478: ΒΑΣ.ΑΜΑΛΙΑΣ (7090)	94: Signalized Street	4000	84	4	-327,2
551892: Γέλωνος (6778)	44: Street	1700	138	2	-326,44

551908: Δεινοκράτους (6804)	44: Street	850	184	1	-325,45
551918: Δεινοκράτους (6807)	44: Street	850	249	1	-323,68
552250 (6965)	44: Street	850	142	1	-319,42
555174: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6789)	8: Arterial	8400	101	4	-318,66
555444: ΜΙΧΑΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (8157)	94: Signalized Street	2000	194	3	-312,4
554958: ΗΡΑΚΛΕΙΔΩΝ (6578)	44: Street	1700	72	2	-312,07
551240: ΔΕΛΗΓΙΩΡΓΗ (6394)	94: Signalized Street	2000	63	2	-305,42
554900: ΗΡΑΚΛΕΙΔΩΝ (6538)	44: Street	2550	146	3	-304,72
555178: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6790)	8: Arterial	6300	17	3	-304,33
555160: ΒΑΣ.ΣΟΦΙΑΣ (6781)	8: Arterial	6300	135	3	-304,33
555298: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7073)	8: Arterial	6300	169	3	-302,52
551980: ΖΩΟΔΟΧΟΥ ΠΗΓΗΣ (6833)	44: Street	850	192	1	-301,96
555326: ΒΑΣ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ (7096)	8: Arterial	6300	121	4	-301,5
554908: ΑΧΑΙΩΝ (6606)	44: Street	850	93	1	-301,29

**Κενή σελίδα**