



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗΣ ΥΠΟΔΟΜΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπων: Λυμπέρης Κων/νος, Λέκτορας

Όνομα: Γεωργοπούλου Ναταλία

Τίτλος: «Αξιολόγηση των σχέσεων υπολογισμού των
γεωμετρικών στοιχείων χάραξης σιδηροδρομικής
γραμμής σε διάφορες χώρες.»



Αθήνα, Μάρτιος 2004

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Κατά την διάρκεια του 19^{ου} αιώνα ένα δίκτυο σιδηροδρόμου συμβόλιζε παγκοσμίως την οριστική είσοδο μιας χώρας στην μοντέρνα βιομηχανική εποχή. Αλλά και σήμερα-έχοντας πια αναπτυχθεί και καθιερωθεί παγκοσμίως οι αερομεταφορές, που παραγκώνισαν για λίγο τον σιδηρόδρομο-ένα σύγχρονο ή υπερσύγχρονο σιδηροδρομικό δίκτυο αποδεικνύει την τεχνολογική ακμή μιας χώρας.



Η ατμομηχανή εδραιώθηκε στον σιδηρόδρομο και σύντομα εξελίχθηκε ραγδαία. Από το 1913 οι ατμομηχανές άρχισαν να αντικαθίστανται από ντηζελομηχανές ή ντηζελοηλεκτρικές μηχανές. Σήμερα, ζούμε στην εποχή της ηλεκτρικής έλξης, όπου η ηλεκτρική ενέργεια που χρησιμοποιεί το τρένο προέρχεται από έναν ηλεκτρικό αγωγό που ακολουθεί τις σιδηροτροχιές.

Η επινόηση του σιδηροδρόμου βρήκε την Ελλάδα στην εποχή της συγκρότησής της σε κράτος. Η προσπάθεια για την ανάπτυξη σιδηροδρομικού δικτύου ξεκίνησε το 1881 και μέχρι τις αρχές του 20^{ου} αιώνα διαμορφώθηκε ο βασικός άξονας γραμμών που υφίστανται αμετάβλητες μέχρι τις μέρες μας. Καμία σύγχρονη τεχνολογία δεν είχε «αγγίξει» τον ελληνικό σιδηρόδρομο μέχρι πριν από λίγα χρόνια. Σήμερα, ο αστικός



σιδηρόδρομος έχει εξελιχθεί με την κατασκευή του metro και προσεχώς του τραμ, μετά από πολλά χρόνια ύπαρξης μόνο του προαστιακού σιδηρόδρομου Κηφισιάς-Πειραιά και τον Ηλεκτρικό. Με αργά αλλά σταθερά βήματα, ο ελληνικός σιδηρόδρομος εισέρχεται στον κόσμο της σύγχρονης τεχνολογίας.

Την ίδια ώρα στο εξωτερικό, η σύγχρονη τεχνολογία έχει επιφέρει θαύματα στον σιδηρόδρομο. Τραίνα που αναπτύσσουν πολύ υψηλές ταχύτητες-200 με 300m/h- και μεγάλη άνεση στον επιβάτη ταξιδεύουν απο χώρα σε χώρα της Δυτικής και της Κεντρικής Ευρώπης μέσα σε λίγες ώρες. Όσον αφορά τον αστικό σιδηρόδρομο, τα δίκτυα του metro-δίκτυα πολλών χιλιομέτρων- και του τράμ αποτελούν πραγματικότητα στις περισσότερες ευρωπαϊκές χώρες εδώ και πολλά χρόνια.

Ο σιδηρόδρομος είναι ένα από τα μεταφορικά μέσα του μέλλοντος. Τα δεδομένα κόστους ενέργειας, η δυνατότητα παροχής εξυπηρέτησης υψηλής ποιότητας και οι νέες μέθοδοι συνδυασμένης διακίνησης εμπορευμάτων δείχνουν ότι ο σιδηρόδρομος θα συνεχίσει διαρκώς αναπτυσσόμενος να προσφέρει τις υπηρεσίες του στις ανάγκες των ανθρώπων για μεταφορικό έργο.



ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα αυτής της διπλωματικής εργασίας, τον κ.Κων/νο Λυμπέρη, που με τις συμβουλές του, την καθοδήγηση και το αμέριστο ενδιαφέρον του με στήριξε στην δύσκολη αυτή περίοδο της ολοκλήρωσης αυτής της δουλειάς. Επίσης, τον κ.Γ.Κανελλαΐδη για τις εύστοχες παρατηρήσεις του. Ακόμα, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην Λιάνα Μπούρη, που χωρίς την γενναιόδωρη προσφορά της δεν θα είχε πραγματοποιηθεί ένα μεγάλο κομμάτι αυτής της εργασίας. Και τέλος, δεν θα μπορούσα να ξεχάσω την Νατάσα Γεωργοπούλου για την πολύτιμη και ουσιαστική βοήθειά της καθ' όλη την διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής και τον Δημήτρη Χαραλαμπίοπουλο για την καίρια συμβολή του.

ΣΥΝΟΨΗ

Τίτλος: «Αξιολόγηση των σχέσεων υπολογισμού των γεωμετρικών στοιχείων χάραξης σιδηροδρομικής γραμμής σε διάφορες χώρες.»

Όνομα: Γεωργοπούλου Ναταλία

Επόπτης: Λυμπέρης Κωνσταντίνος, Λέκτορας
2004

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται η αξιολόγηση των σχέσεων υπολογισμού των γεωμετρικών στοιχείων χάραξης σιδηροδρομικής γραμμής σε τέσσερις χώρες: την Ελλάδα, την Αμερική, την Αγγλία και την Γερμανία. Αναλύονται μέσω μαθηματικών σχέσεων και θεωρητικών παραδειγμάτων οι σχέσεις υπολογισμού της υπερύψωσης, ενώ αναφέρονται, αναλύονται και συγκρίνονται μεταξύ τους οι μέθοδοι εφαρμογής της υπερύψωσης σε μία σιδηροδρομική γραμμή σε όλες τις χώρες που εξετάζουμε. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η θεωρία των πρανών υπερύψωσης και των καμπύλων συναρμογής και αναλύονται μαθηματικά, απ' όπου προκύπτουν συμπεράσματα για την καταλληλότητα κάθε θεωρίας και πρακτικής. Οι θεωρίες και πρακτικές που εφαρμόζονται σε κάθε χώρα συγκρίνονται με αυτές των υπολοίπων χωρών.

Λέξεις κλειδιά: σιδηρόδρομος, χάραξη, υπερύψωση, κανονική υπερύψωση, ανεπάρκεια υπερύψωσης, πρανές υπερύψωσης, τόξο-καμπύλη συναρμογής, καμπυλότητα, κυβική παραβολή, κλωθοειδής, sinus, bloss.

ABSTRACT

Title: "Estimation of the mathematic types which calculate the geometric characters of the alignment of a railway track in several countries.

Name: Georgopoulou Natalia

Supervisor: Liberis Konstantinos
2004

In the present dissertation it is attempted to estimate the mathematic types which calculate the geometric characters of the alignment of a railway track in four countries: Greece, America, Great Britain and Germany. The calculating types of superelevation are analyzed mathematically, with the support of theoretical examples. Methods of applying superelevation at a railway track of the four countries are reported, analyzed and compared to each other. Furthermore, transition curves are theoretically analyzed with mathematic types and some conclusions are deducted about the usefulness of each type of transition curves. Transition theories and practices of the four countries are finally compared to each other.

Keywords: railway, alignment, superelevation, normal superelevation, unbalanced superelevation, spiral, transition curve or easement, cubic parabola, clothoide, sinus, bloss.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή γίνεται μία προσπάθεια να διερευνηθεί και να αξιολογηθεί το θεωρητικό υπόβαθρο της χάραξης σιδηροδρομικής γραμμής σε ορισμένες χώρες της Ευρώπης και της Αμερικής. Έτσι, συγκεντρώθηκαν σιδηροδρομικοί κανονισμοί από τις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, από την Μεγάλη Βρετανία, την Γερμανία και την Ελλάδα, καθώς και επιπλέον βιβλιογραφία από τις ίδιες χώρες, που έπαιξε ρόλο βοηθητικό.

Η διαδικασία της ανάλυσης, της αξιολόγησης και της σύγκρισης πραγματοποιήθηκε για το αντικείμενο των υπερυψώσεων, των πρανών υπερύψωσης και των τόξων συναρμογής. Πρόκειται για μία εργασία που επικεντρώνεται στα «δύσκολα» σημεία της σιδηροδρομικής χάραξης, δηλαδή στην καμπύλη αλλά και στην μετάβαση στην καμπύλη και διερευνά με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να επιτευχθεί ένας άριστος συνδυασμός υψηλής απόδοσης του σιδηροδρόμου–που μετριέται με την ταχύτητα– και βέλτιστης εξυπηρέτησης–που μετριέται με την άνεση του επιβάτη.

Από την παραπάνω εργασία προέκυψαν συμπεράσματα ως προς την καταλληλότητα και την χρησιμότητα κάθε είδους υπερύψωσης, πρανούς υπερύψωσης ή τόξου συναρμογής και σε ποιες περιπτώσεις μπορούν αυτά να εφαρμοστούν. Τέλος, από τα συμπεράσματα αυτά μπορούν να εξαχθούν προτάσεις για την βελτίωση της χάραξης μίας σιδηροδρομικής γραμμής.

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

- [1] ΟΣΕ: Νέος Κανονισμός Επιδομής Γραμμής (Ν.Κ.Ε.Γ.)
- [2] Απ.Γιώτης– Καθηγητής ΕΜΠ: Σιδηροδρομική,
Εκδοση Ε.Μ.Π. 1981
- [3] Σιδηροδρομική (Β.Προφυλλίδη)–Τόμος Α
Εκδόσεις Γιαχούδη–Γιαπούλη 1993
- [4] British Railway Track
- [5] American Track Geometry
- [6] Manual for Railway engineering,
American Railway Engineering Assosiation,1992
- [7] Fürmetz R: “Der Gleisplan” Bayverlag Gmbh
Wiesbaden und Berlin, 1985
- [8] Kohler J: “Gleisgeometrie”, traspress VEB Verlag für
Verkehrswesen
- [9] Schramm G: “Gestaltung der Überhöhungsrampen“,
Eisenbahningenieur 26 ,1975
- [10] Unudruck fur Grundvurleistung 2003, Lehrstuhl fur Bau
von Landverkehrswegen TU Munchen

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Πρόλογος	2
Σύνοψη	3
Περίληψη	4
Βιβλιογραφία	5
Περιεχόμενα	6
Συμβολισμοί	14
Εισαγωγή	17

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α. ΥΠΕΡΥΨΩΣΗ

1. Η υπερύψωση με βάση τον Νέο Κανονισμό Επιδομής του ΟΣΕ	18
1.1 Γενικά–Δυνάμεις που ασκούνται στο όχημα	18
1.2 Περίπτωση ισορροπίας	22
1.3 Περίπτωση ταχέων συρμών $V > V_{σχ}$	25
1.4 Περίπτωση βραδέων συρμών $V < V_{σχ}$	28
1.5 Περίπτωση $V = 0$	30
1.6 Παραδείγματα κατανόησης των εννοιών ανεπάρκεια/πλεόνασμα της υπερύψωσης	32
1.7 Σχέση μεταξύ των V, R, h, b	34
1.7.1 Υπολογισμός των V_{max} και V_{min} επιτρεπομένων συναρτήσει R και h	35
1.8 Εφαρμοζόμενη υπερύψωση	36
1.8.1 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.1	38
1.8.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.2	41
1.8.3 Υπολογισμός της κανονικής υπερύψωσης	44
1.8.4 Γραφική απόδειξη της σχέσης για την κανονική υπερύψωση	45
2. Οι Αμερικάνοι για την υπερύψωση	75
3. Οι Βρετανοί για τις υπερύψώσεις	82

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β. ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ

1. Οι Γερμανικοί κανονισμοί για τις καμπύλες συναρμογής	86
1.1 Εισαγωγή	86
1.1.1 Το πρανές υπερύψωσης	86
1.1.2 Το τόξο συναρμογής	89
1.2 Γραμμική αύξηση της υπερύψωσης–καμπυλότητας	93
1.2.1 Το ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης	93
1.2.2 Το τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας	99
Ομόρροπα τόξα	108

1.3 Αύξηση της υπερύψωσης-καμπυλότητας με της μορφή τετραγωνικής παραβολής.....	112
1.3.1 Το πρηνές υπερύψωσης με αύξηση της υπερύψωσης με τη μορφή τετραγωνικής παραβολής	112
Παράδειγμα 1.3.1.1	116
1.3.2 Το τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής	119
Ομόρροπα τόξα	125
1.4 Το πρηνές υπερύψωσης και το τόξο συναρμογής με αύξηση της Υπερύψωσης-καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής Το πρηνές υπερύψωσης και το τόξο συναρμογής Bloss	131
1.4.1 Το πρηνές υπερύψωσης με αύξηση της υπερύψωσης με της μορφή κυβικής παραβολής-Bloss.....	131
1.4.2 Το τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής-Bloss.....	134
1.5 Το πρηνές υπερύψωσης και το τόξο συναρμογής Sinus.....	137
2. Νέος Κανονισμός Επιδομής Γραμμής.....	140
2.1 Το πρηνές υπερύψωσης	140
2.2 Γενικά για τις καμπύλες συναρμογής	148
2.2.1 Είδη καμπυλών που χρησιμοποιούνται στα τόξα συναρμογής.....	152
2.2.1.1 Κυβική παραβολή	152
2.2.1.1.1 Τόξα συναρμογής μικρού μήκους κυβικής παραβολής.....	154
2.2.1.1.2 Τόξα συναρμογής μεγάλου μήκους κυβικής παραβολής.....	158
2.2.2 Συναρμογή δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων.....	160
2.2.3 Συναρμογή μεταξύ ομόρροπων κυκλικών τόξων.....	163
2.2.4 Βασικά στοιχεία πολυγωνικής της χάραξης	170
3. Οι Βρετανοί για τις καμπύλες συναρμογής.....	172
3.1 Ευθυγραμμία-κυκλικό τόξο	172
3.2 Αντίρροπες καμπύλες	178
3.3 Ομόρροπες καμπύλες.....	179
4. Οι Αμερικάνοι για τις καμπύλες συναρμογής	180
4.1 Γενικά.....	180
4.2 Αντίρροπες καμπύλες	188
4.3 Ομόρροπες καμπύλες	189

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ

1. Σύγκριση μεθόδων εφαρμογής της υπερύψωσης που προτείνονται

στους κανονισμούς	190
1.1 Ως προς τις μεθόδους εφαρμογής της υπερύψωσης στην γραμμή.....	190
1.1.1 Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ.....	190
1.1.2 Αμερικάνικοι κανονισμοί.....	191
1.1.3 Βρετανικοί κανονισμοί.....	195
1.2 Ως προς τις μέγιστες τιμές της κατασκευαστικής υπερύψωσης, της ανεπάρκειας και του πλεονάσματος της υπερύψωσης.....	201
1.3 Ως προς τον τρόπο έκφρασης της υπερύψωσης.....	201
2. Σύγκριση των πρανών και των τόξων συναρμογής ως προς την χρησιμότητά τους.....	204
2.1 Σύγκριση του p -πρανούς, με το ευθύγραμμο πρανές	204
2.1.1 Ως προς τη διαφορά των υπερυψώσεων	204
2.1.2 Ως προς τις κλίσεις των πρανών.....	211
2.1.3 Ως προς τις εκτροπές f	212
2.1.4 Ως προς τις οριακές τιμές των κλίσεων και μήκους συναρμογής	213
2.2 Σύγκριση του πρανούς $\sinus$ με το p -πρανές.....	214
2.2.1 Ως προς τη διαφορά των υπερυψώσεων	214
2.2.2 Ως προς τις κλίσεις.....	217
2.2.3 Ως προς τις εκτροπές f	218
2.2.4 Ως προς τις οριακές τιμές των κλίσεων και μήκους συναρμογής	218
2.3 Σύγκριση του πρανούς Bloss με το p -πρανές.....	219
2.3.1 Ως προς τη διαφορά των υπερυψώσεων	219
2.3.2 Ως προς τις κλίσεις.....	223
2.3.3 Ως προς τις εκτροπές f	223
2.3.4 Ως προς τις οριακές τιμές των κλίσεων και μήκους συναρμογής	224
2.4 Σύγκριση του πρανούς Bloss με το πρανές $\sinus$	226
2.4.1 Ως προς τη διαφορά των υπερυψώσεων	226
2.4.2 Ως προς τις κλίσεις.....	228
2.4.3 Ως προς τις εκτροπές f	229
2.4.4 Ως προς τις οριακές τιμές των κλίσεων και μήκους συναρμογής	229

2.5 Γενικά συμπεράσματα από την σύγκριση των πρανών υπερύψωσης που προτείνονται στα εγχειρίδια ως προς την χρησιμότητά τους	231
3. Σύγκριση για τα όρια που θεσπίζονται ως προς τις κλίσεις των πρανών υπερύψωσης και τα μήκη των τόξων συναρμογής.....	232
3.1 Οι Γερμανικοί κανονισμοί.....	232
3.1.1 Γραμμική αύξηση της υπερύψωσης-καμπυλότητας.....	232
3.1.1.1 Το ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης	232
3.1.1.2 Το τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας	235
Ομόρροπα τόξα	238
3.1.2 Αύξηση της υπερύψωσης-καμπυλότητας με της μορφή τετραγωνικής παραβολής.....	239
3.1.2.1 Το πρανές υπερύψωσης με αύξηση της υπερύψωσης με της μορφή τετραγωνικής παραβολής-p-πρανές	239
3.1.2.2 Το τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής	242
Ομόρροπα τόξα	245
3.1.3 Το πρανές υπερύψωσης και το τόξο συναρμογής με αύξηση της υπερύψωσης-καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής Το πρανές υπερύψωσης και το τόξο συναρμογής Bloss	245
3.1.3.1 Το πρανές υπερύψωσης με αύξηση της υπερύψωσης με της μορφή κυβικής παραβολής-Bloss	245
3.1.3.2 Το τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής-Bloss	246
3.1.4 Το πρανές υπερύψωσης και το τόξο συναρμογής Sinus	247
3.1.5 Πίνακες για τις κλίσεις των πρανών υπερύψωσης και τα μήκη των τόξων συναρμογής.....	248
3.2 Ν.Κ.Ε.Γ του ΟΣΕ.....	252
3.2.1 Ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης	252
3.2.2 Τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας	255
Αντίρροπα τόξα	256
Ομόρροπα τόξα	257
3.3 Βρετανικοί κανονισμοί.....	259
3.3.1 Ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης	259
3.3.2 Τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας	261
Αντίρροπα τόξα.....	261
Ομόρροπα τόξα	261
3.4 Αμερικάνικοι κανονισμοί	262
3.4.1 Ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης	262
3.4.2 Τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας	263

Αντίρροπα τόξα.....	266
Ομόρροπα τόξα	267
3.5 Συγκεντρωτικοί πίνακες	268

Δ. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ-ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. Ανακεφαλαίωση.....	278
1.1 Υπερυψώσεις	278
1.2 Πρανή υπερύψωσης-Καμπύλες ή τόξα συναρμογής	283
2. Γενικά συμπεράσματα.....	288
2.1 Συμπέρασμα 1 ^ο	288
2.2 Συμπέρασμα 2 ^ο	290
2.3 Συμπέρασμα 3 ^ο	290
2.4 Συμπέρασμα 4 ^ο	290
2.5 Συμπέρασμα 5 ^ο	290
2.6 Συμπέρασμα 6 ^ο	291

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α. ΥΠΕΡΥΨΩΣΗ

Σχήμα 1.1.1	19
Σχήμα 1.2.1	22
Σχήμα 1.3.1	26
Σχήμα 1.4.1	28
Σχήμα 1.5.1	31
Σχήμα 2.1	76
Σχήμα 2.2	77
Σχήμα 2.3	77
Σχήμα 3.1	82
Σχήμα 3.2	83

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β: ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ

Σχήμα 1.1.1.1	87
Σχήμα 1.1.1.2	88
Σχήμα 1.1.2.1	90

Σχήμα 1.2.1.1	94
Σχήμα 1.2.2.1	100
Σχήμα 1.2.2.2	105
Σχήμα 1.2.2.3	110
Σχήμα 1.2.2.4	110
Σχήμα 1.3.1.1	113
Σχήμα 1.3.2.1	120
Σχήμα 1.3.2.2	120
Σχήμα 1.3.2.3	127
Σχήμα 1.3.2.4	127
Σχήμα 1.4.1.1	131
Σχήμα 1.4.2.1	135
Σχήμα 1.5.1	138
Σχήμα 2.1.1	14
Σχήμα 2.1.2	141
Σχήμα 2.1.3	142
Σχήμα 2.1.4	142
Σχήμα 2.1.5	143
Σχήμα 2.1.6	143
Σχήμα 2.2.1	149
Σχήμα 2.2.2	149
Σχήμα 2.2.3	150
Σχήμα 2.2.1.1.1	157
Σχήμα 2.2.2.1	161
Σχήμα 2.2.2.2	162
Σχήμα 2.2.3.1	165
Σχήμα 2.2.3.2	165
Σχήμα 2.2.4	171
Σχήμα 3.1.1	174
Σχήμα 3.1.2	175
Σχήμα 3.3.1	179
Σχήμα 4.1.1	180
Σχήμα 4.1.2	182
Σχήμα 4.1.3	183
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ	
Σχήμα 2.1.1.1	206
Σχήμα 2.1.1.2	210

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α. ΥΠΕΡΥΨΩΣΗ

Διάγραμμα 1.8.1	40
Διάγραμμα 1.8.2	43
Διάγραμμα 1.8.4.1.1	48
Διάγραμμα 1.8.4.1.2	49
Διάγραμμα 1.8.4.1.3	51
Διάγραμμα 1.8.4.1.4	52
Διάγραμμα 1.8.4.1.5	54
Διάγραμμα 1.8.4.1.6	55
Διάγραμμα 1.8.4.2.1	57
Διάγραμμα 1.8.4.2.2	58
Διάγραμμα 1.8.4.2.3	60
Διάγραμμα 1.8.4.2.4	61
Διάγραμμα 1.8.4.2.5	63
Διάγραμμα 1.8.4.2.6	64
Διάγραμμα 1.8.4.3.1	66
Διάγραμμα 1.8.4.3.2	67
Διάγραμμα 1.8.4.3.3	69
Διάγραμμα 1.8.4.3.4	70
Διάγραμμα 1.8.4.3.5	72
Διάγραμμα 1.8.4.3.6	73

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ

Πίνακας 2.2.1.1	215
Πίνακας 2.3.1.1	220
Πίνακας 2.4.1.1	227
Πίνακας 3.1.5.1	248
Πίνακας 3.1.5.2	249
Πίνακας 3.1.5.3	250
Πίνακας 3.1.5.4	250
Πίνακας 3.1.5.5	251

Πίνακας 3.1.5.6	251
Πίνακας 3.2.1.1	254
Πίνακας 3.2.2.1	256
Πίνακας 3.3.1.1	260
Πίνακας 3.4.1.1	263
Πίνακας 3.4.1.2	265
Πίνακας 3.5.1	268
Πίνακας 3.5.2	269
Πίνακας 3.5.3	270
Πίνακας 3.5.4	271
Πίνακας 3.5.5	272
Πίνακας 3.5.6	274
Πίνακας 3.5.7	275
Πίνακας 3.5.8	277

Σ Υ Μ Β Ο Λ Ι Σ Μ Ο Ι

1. Στον Ν.Κ.Ε.Γ.

m	μάζα σώματος σε kgr
g	επιτάχυνση της βαρύτητας σε $\frac{m}{sec^2}$
G	βάρος σώματος σε $kgr \cdot \frac{m}{sec^2}$
F	φυγόκεντρη δύναμη σε $kgr \cdot \frac{m}{sec^2}$
V_A	αντίδραση τροχού στην εξωτερική σιδηροτροχιά σε $kgr \cdot \frac{m}{sec^2}$
V_B	αντίδραση τροχού στην εξωτερική σιδηροτροχιά σε $kgr \cdot \frac{m}{sec^2}$
X	συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο όχημα $kgr \cdot \frac{m}{sec^2}$
T	συνισταμένη των δυνάμεων που είναι παράλληλες στο επίπεδο των σιδ/χιών σε $kgr \cdot \frac{m}{sec^2}$
R	ακτίνα κυκλικού τόξου σε m
r	ακτίνα σε τυχαίο σημείο καμπύλης σε m
K	καμπυλότητα κυκλικού τόξου σε m^{-1}
k	καμπυλότητα σε τυχαίο σημείο καμπύλης σε m^{-1}
v	ταχύτητα σε $\frac{m}{sec}$
V	ταχύτητα σε $\frac{km}{h}$
$V_{ισ}$	ταχύτητα ισορροπίας σε $\frac{km}{h}$
V_{ox}	ταχύτητα σχεδιασμού σε $\frac{km}{h}$
V_{max}	η μέγιστη ταχύτητα που εμφανίζεται σε ένα σιδ/κό δίκτυο σε $\frac{km}{h}$
V_{min}	η ελάχιστη ταχύτητα που εμφανίζεται σε ένα σιδ/κό δίκτυο σε $\frac{km}{h}$
b_F	φυγόκεντρη επιτάχυνση σε $\frac{m}{sec^2}$
b	παραμένουσα πλευρική επιτάχυνση προς το εξωτερικό της καμπύλης σε $\frac{m}{sec^2}$
b'	παραμένουσα πλευρική επιτάχυνση προς το εξωτερικό της καμπύλης σε $\frac{m}{sec^2}$
s	απόσταση μεταξύ των σιδηροτροχιών σε m
h	υπερύψωση σε mm
h_θ	θεωρητική υπερύψωση σε mm
h_k	κανονική υπερύψωση σε mm

$h_{\max}$ ή $\max h$	μέγιστη κατασκευαστική υπερύψωση σε mm
a	ανεπάρκεια της υπερύψωσης σε mm
$a_{\max}$ ή $\max a$	μέγιστη ανεπάρκεια της υπερύψωσης σε mm
π	πλεόνασμα της υπερύψωσης σε mm
$\pi_{\max}$ ή $\max \pi$	μέγιστο πλεόνασμα της υπερύψωσης σε mm
C	τίναγμα σε $\frac{m}{\sec^3}$
i	κλίση πρανούς υπερύψωσης σε $\frac{mm}{m}$
r_h	ρυθμός μεταβολής υπερύψωσης σε $\frac{mm}{\sec}$
l	απόσταση τυχαιού σημείου της καμπύλης από την αρχή της σε m
L	μήκος τόξου συναρμογής σε m
μ	ρυθμός μεταβολής ανεπάρκειας της υπερύψωσης σε $\frac{mm}{m}$
x, y	συντεταγμένες τυχαιού σημείου του τόξου συναρμογής
τ	η γωνία που σχηματίζει η κοινή εφαπτομένη του κυκλικού τόξου και του τόξου συναρμογής με την ευθυγραμμία σε rad
f	εκτροπή σε m (μετατόπιση του κυκλικού τόξου σε σχέση με την ευθυγραμμία)

2. Στους αμερικάνικους κανονισμούς

F_C	φυγόκεντρη δύναμη σε $kgr \cdot \frac{m}{\sec^2}$
g	επιτάχυνση της βαρύτητας σε $\frac{ft}{\sec^2}$
w	βάρος σε <i>pounds</i>
W	βάρος σε <i>tons</i>
v	ταχύτητα σε $\frac{ft}{\sec}$
V	ταχύτητα σε $\frac{miles}{h}$
$V_{\max}$	μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα σε $\frac{miles}{h}$ για εφαρμοζόμενη υπερύψωση E_a
R	ακτίνα σε <i>ft</i>
D	μοίρες γωνίας
e	υπερύψωση σε <i>inches</i>
e_C	θεωρητική υπερύψωση σε <i>inches</i>
E_a	εφαρμοζόμενη υπερύψωση σε <i>inches</i>
a	ανεπάρκεια υπερύψωσης σε <i>inches</i>
L_s	μήκος τόξου συναρμογής σε <i>ft</i>
r_e	ρυθμός μεταβολής υπερύψωσης σε $\frac{inches}{h}$

f εκτροπή σε ft

3. Στους Βρετανικούς κανονισμούς

E υπερύψωση σε mm (θεωρητική)
 B απόσταση μεταξύ των σιδηροτροχιών σε m
 W βάρος σε $kgf \cdot m/sec^2$
 g επιτάχυνση της βαρύτητας σε m/sec^2
 R ακτίνα καμπύλης σε m
 V ταχύτητα σε km/h
 f εκτροπή σε m

4. Στους Γερμανικούς κανονισμούς

x απόσταση τυχαίου σημείου του πρανούς υπερύψωσης από την αρχή του σε m
 $\tan \alpha$ κλίση του πρανούς υπερύψωσης
 r ακτίνα κυκλικού τόξου σε m
 r_x ή r_z ακτίνα σε τυχαίο σημείο καμπύλης σε m
 K καμπυλότητα κυκλικού τόξου σε m^{-1}
 K_x ή K_z καμπυλότητα σε τυχαίο σημείο καμπύλης σε m^{-1}
 $V_{\max}$ ή $\max V$ η μέγιστη ταχύτητα που εμφανίζεται σε ένα σιδ/κό δίκτυο σε km/h
 V ταχύτητα σε km/h
 V_{GZ} ταχύτητα αργών-εμπορικών συρμών σε km/h
 u υπερύψωση σε mm
 u_F ανεπάρκεια της υπερύψωσης σε mm
 u_u πλεόνασμα της υπερύψωσης σε mm
 l_r μήκος του πρανούς υπερύψωσης σε m
 l_u μήκος του τόξου συναρμογής σε m
 τ ή ϕ η γωνία που σχηματίζει η κοινή εφαπτομένη του κυκλικού τόξου και του τόξου συναρμογής με την ευθυγραμμία σε rad
 x, y συντεταγμένες τυχαίου σημείου του τόξου συναρμογής
 f εκτροπή σε m

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στον σιδηρόδρομο επιδιώκεται η κατασκευή όσο το δυνατόν μεγαλύτερων ευθυγραμμιών. Παρ' όλα αυτά, διάφοροι λόγοι επιβάλλουν την χάραξη καμπυλών. Η εργασία αυτή επικεντρώνεται στα «δύσκολα» σημεία της καμπύλης και της μετάβασης στην καμπύλη, τόσο για την ασφαλή πορεία των οχημάτων, όσο και για την εξυπηρέτηση των επιβατών.

Τα γεωμετρικά στοιχεία για τα οποία πραγματοποιείται διερεύνηση, ανάλυση και σύγκριση είναι η υπερύψωση, το πρηνές υπερύψωσης και οι καμπύλες συναρμογής. Για το σκοπό αυτό συγκεντρώθηκαν σιδηροδρομικοί κανονισμοί από τέσσερεις χώρες-Ελλάδα, Η.Π.Α., Μ.Βρετανία και Γερμανία-και επιπλέον βιβλιογραφία από τις ίδιες χώρες, που βοήθησε στην περεταίρω ανάλυση.

Τα δεδομένα κάθε κανονισμού, με την υποστήριξη της αντίστοιχης βιβλιογραφίας, αναλύθηκαν ξεχωριστά με την βοήθεια μαθηματικών αποδείξεων και όπου ήταν απαραίτητο σχημάτων και διαγραμμάτων. Αυτό έγινε γιατί η επιστημονική προσέγγιση στο θεωρητικό υπόβαθρο της χάραξης, καθώς και η πρακτική της χάραξης κάθε χώρας ήταν διαφορετική. Έγινε προσπάθεια για την απόδειξη των σχέσεων υπολογισμού που αναφέρονταν στην βιβλιογραφία, χωρίς τις περισσότερες φορές να αποδεικνύονται.

Στην συνέχεια, πραγματοποιήθηκε σύγκριση των κανονισμών. Αυτή ήταν σε πολλές περιπτώσεις δυσχερής-και ειδικά το κομμάτι της σύγκρισης και «αντιστοίχισης» των διαφόρων κανονισμών- λόγω των διαφορετικών μεγεθών και μονάδων μέτρησης που χρησιμοποιούνται σε κάθε χώρα. Γι' αυτό το λόγο θεωρήθηκε αναγκαίο σε ορισμένες περιπτώσεις να γίνει αναγωγή των μαθηματικών τύπων και των μονάδων σε ένα κοινό παρονομαστή, έτσι ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση.

Από την παραπάνω εργασία προέκυψαν συμπεράσματα ως προς την καταλληλότητα και την χρησιμότητα κάθε γεωμετρικού στοιχείου της χάραξης, ως προς τις δυνατότητες βελτίωσης της χάραξης μίας σιδηροδρομικής γραμμής και με ποιους τρόπους και γενικά ως προς τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατόν να επιτευχθεί ένας άριστος συνδυασμός υψηλής απόδοσης του σιδηροδρόμου και βέλτιστης εξυπηρέτησης του επιβάτη.

*** ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι αποδείξεις και οι περεταίρω αναλύσεις που παρατίθενται κάτω από τα πλαισιωμένα προβλήματα, έχουν επιχειρηθεί από την συντάκτρια αυτής της διπλωματικής.

Α.ΥΠΕΡΥΨΩΣΗ

1. Η υπερύψωση με βάση τον Νέο Κανονισμό Επιδομής Γραμμής του ΟΣΕ

1.1 Γενικά-Δυνάμεις που ασκούνται στο όχημα

Η οριζοντιογραφία μιας σιδηροδρομικής γραμμής αποτελείται από ευθυγραμμίες και καμπύλες. Σε αντίθεση με την οδοποιΐα, στον σιδηρόδρομο επιδιώκεται όσο το δυνατόν η ύπαρξη μεγαλύτερων ευθυγραμμιών. Ωστόσο, ανάλογα με την τοπογραφία και το ανάγλυφο, προκύπτει η ανάγκη χάραξης καμπύλων για την αποφυγή φυσικών εμποδίων, όπως λόγου χάρη για την αποφυγή ενός ορεινού όγκου. Ευνόητα, η κατασκευή καμπύλων επιβάλλεται και από την ένωση των διαφορετικών κατευθύνσεων που προκύπτουν κατά την σιδηροδρομική σύνδεση δύο περιοχών.

Στην περίπτωση των σιδηροδρομικών οχημάτων, κατά την κίνησή τους σε καμπύλη τροχιά, παράγεται μία οριζόντια αντίδραση H της εξωτερικής σιδηροτροχιάς στον ηγούμενο τροχό του φορείου, που λειτουργεί ως κατευθυντήρια δύναμη, ως αντίδραση στην πίεση των τροχών στην εξωτερική σιδηροτροχιά κατά την κίνησή του στην καμπύλη.

Η δύναμη αυτή είναι ίση και αντίθετη με την δύναμη που εμφανίζεται και επιδρά σε κάθε σώμα που είναι αναγκασμένο να κινηθεί σε καμπύλη τροχιά, δηλαδή την φυγόκεντρο δύναμη.

Η φυγόκεντρος δύναμη ισούται κατά τα γνωστά:

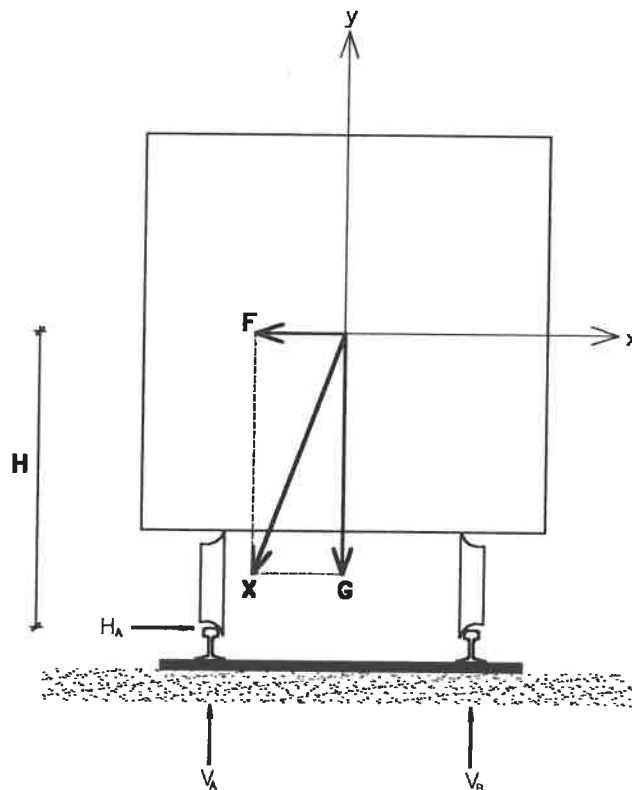
$$F = \frac{m \cdot v^2}{R} \dots \dots \dots (1.1.1)$$

όπου: $m =$ η μάζα του σώματος (kg)

$v =$ η ταχύτητα του σώματος (m/sec)

$R =$ η ακτίνα της καμπύλης (m)

Στο σιδηροδρομικό όχημα, κατά την κίνησή του σε καμπύλη τροχιά ασκούνται το βάρος του G , η φυγόκεντρη F , οι κατακόρυφες αντιδράσεις των σιδηροτροχιών V_A, V_B και η οριζόντια αντίδραση της εξωτερικής σιδηροτροχιάς H_A (σχήμα 1.1.1).



Σχήμα 1.1.1

Ισορροπία σιδηροδρομικού οχήματος σε γραμμή με μη υπερυψωμένη σιδηροτροχιά

x, y : ορθογώνιο σύστημα αξόνων

F : φυγόκεντρος δύναμη σε $\text{kgr} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

G : βάρος σιδηροδρομικού οχήματος σε $\text{kgr} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

X : συνισταμένη φυγόκεντρης και βάρους σε $\text{kgr} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

H : απόσταση κ.β. οχήματος από κεφαλή σιδηροτροχιάς σε m

H_A : οριζόντια αντίδραση σιδηροτροχιάς επί τροχού σε $\text{kgr} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

V_A, V_B : κατακόρυφες αντιδράσεις σιδηροτροχιών επί τροχών σε $\text{kgr} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

Στο σχήμα 1.1.1 έχει σχεδιαστεί η συνισταμένη X των G, F . Η δύναμη αυτή έχει κατεύθυνση προς την εξωτερική σιδηροτροχιά, πράγμα που σημαίνει ότι προκαλείται

Γεωργοπούλου Ναταλία

μεγαλύτερο φορτίο στην εξωτερική απ' ότι στην εσωτερική σιδηροτροχιά.

Από την σχέση 1.1.1 όσο η ταχύτητα V του οχήματος αυξάνεται ή η ακτίνα R μειώνεται, η φυγόκεντρος αυξάνεται συνεχώς, με αποτέλεσμα η συνισταμένη X να κατεμβύνεται όλο και περισσότερο προς την εξωτερική σιδηροτροχιά. Όταν το άνωσμα της συνισταμένης, για κάποια τιμή των V, R πάψει να βρίσκεται στο διάστημα ανάμεσα στις σιδηροτροχιές και υπερβεί την εξωτερική σιδηροτροχιά, τότε το φορτίο στη εσωτερική σιδηροτροχιά γίνεται μηδενικό [04] δηλαδή επέρχεται αποφόρτιση της εσωτερικής σιδηροτροχιάς.

Η φυγόκεντρος δύναμη, όμως, όπως κάθε δύναμη, προσδίδει επιτάχυνση b_F στο όχημα η οποία εξαρτάται τόσο από την τιμή της παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης όσο και από την διάρκεια και τη συχνότητα με τις οποίες γίνεται αισθητή στο ανθρώπινο σώμα, καθορίζονται ανώτατα όρια της παραμένουσας-μη εξισορροπούμενης πλευρικής επιτάχυνσης b .

Λόγοι ανθρώπινης φυσιολογίας δηλαδή επιβάλλουν ότι η εγκάρσια επιτάχυνση γ που δέχεται το ανθρώπινο σώμα δεν πρέπει να υπερβαίνει σε καμία περίπτωση την τιμή $g/10$ δηλαδή $1m/sec^2$, ενώ η παραμένουσα πλευρική επιτάχυνση δεν πρέπει να υπερβαίνει ένα ποσοστό της εγκάρσιας αυτής επιτάχυνσης γ , και συγκεκριμένα δεν πρέπει να υπερβαίνει την τιμή $b = \frac{2}{3}\gamma$. [03]

Σύμφωνα με τον νέο κανονισμό επιδομής γραμμής του ΟΣΕ το ανώτατο όριο για την παραμένουσα πλευρική επιτάχυνση b είναι $b = 0.7m/sec^2$. Στους μητροπολιτικούς σιδηρόδρομους γίνεται δεκτό $b = 0.8m/sec^2$. [01]

Προκύπτει, επομένως, ότι η ταχύτητα δεν μπορεί να αυξηθεί πάνω από κάποια τιμή, που συνήθως είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα που μπορεί να αναπτυχθεί από τα σιδηροδρομικά οχήματα.

Ανακεφαλαιωτικά, λόγω της φυγόκεντρης δύναμης δημιουργούνται τα παρακάτω προβλήματα [03]:

- μείωση της άνεσης του επιβάτη

- σημαντικές εγκάρσιες δυνάμεις που μπορεί να δημιουργήσουν συνθήκες εκτροχιασμού
- αύξηση εγκάρσιων επιπονήσεων τόσο του υλικού επιδομής όσο και του τροχαίου υλικού με συνέπεια σημαντικές φθορές
- αύξηση κραδασμών και δονήσεων

Για άμβλυνση των παραπάνω δυσμενών συνεπειών υπάρχουν οι εξής δυνατότητες:
–χρήση της μεγαλύτερης δυνατής ακτίνας καμπυλότητας R , πράγμα που δεν είναι εύκολα εφικτό λόγω τοπογραφικών περιορισμών που συχνά δεν επιτρέπουν κατασκευή μεγάλων ακτινών χωρίς την υποστήριξη με δαπανηρά έργα (γέφυρες, σήραγγες, κτλ)

–επιβολή μείωσης της ταχύτητας του συρμού, που αποτελεί φυσικά της έσχατη λύση, αφού επικρατεί η τάση και η προσπάθεια να αυξάνεται η ταχύτητα των συρμών.

–εγκάρσια υπερύψωση της εξωτερικής σιδηροτροχιάς ως προς την εσωτερική, ώστε να εξισορροπηθούν οι φυγόκεντρες επιπονήσεις. Με την εγκάρσια υπερύψωση αμβλύνονται αρκετά τα εγκάρσια φαινόμενα, χωρίς τις περισσότερες φορές να εξαλειφθούν τελείως, καθώς οι τιμές της εγκάρσιας υπερύψωσης δεν πρέπει να υπερβαίνουν ορισμένες τιμές πάνω από τις οποίες προκαλείται σημαντική φθορά του τροχαίου υλικού και του υλικού επιδομής, ενώ προπάντων απειλείται η ευστάθεια του συρμού.[03]

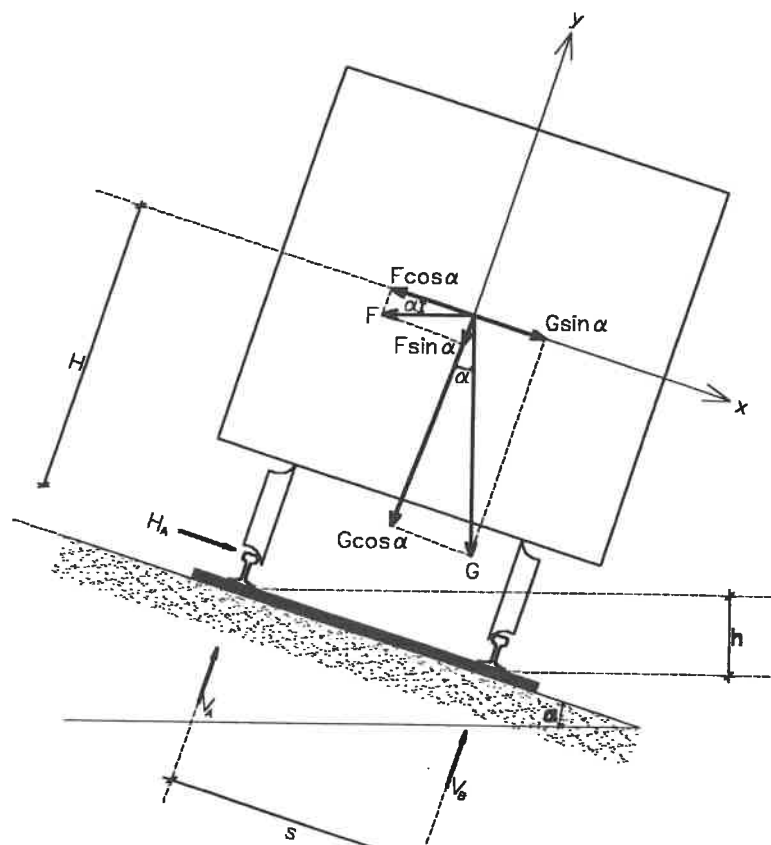
Μια άλλη περίπτωση που αναφέρεται στο γερμανικό εγχειρίδιο [8] της βιβλιογραφίας είναι η εξ' ολοκλήρου βύθιση της εσωτερικής σιδηροτροχιάς σε σχέση με την εξωτερική, ή η κατά το ήμισυ ανύψωση της εξωτερικής και η κατά το ήμισυ βύθιση της εσωτερικής σιδηροτροχιάς, έτσι ώστε και πάλι να υλοποιηθεί η κεκλιμένη επιφάνεια που απαιτείται. Όμως μια οποιαδήποτε βύθιση σιδηροτροχιάς θα σήμαινε μείωση του πάχους του έρματος και επομένως μη-επαρκή ανάληψη των φορτίων και των τάσεων των τροχών. Έτσι, η λύση αυτή κρίνεται αναποτελεσματική και μη-εφαρμόσιμη και απορρίπτεται από όλες τις βιβλιογραφίες που αναλύονται στην παρούσα εργασία.

1.2 Περίπτωση ισορροπίας

(θεωρητική υπερύψωση- ταχύτητα ισορροπίας)

Εφαρμόζοντας υπερύψωση της εξωτερικής σιδηροτροχιάς παράγεται η οριζόντια συνιστώσα του βάρους η οποία αντισταθμίζει την φυγόκεντρο δύναμη. Αναλυτικά:

Έστω ένα όχημα ταχύτητας v (m/sec) κινούμενο επί κυκλικής τροχιάς ακτίνας R και υπερύψωσης h , και σύστημα αξόνων διερχόμενο από το κ.β. του οχήματος με τον άξονα των x παράλληλο προς το επίπεδο των σιδηροτροχιών, ενώ τον άξονα των y κάθετο. Επίσης γίνεται δεκτό ότι το κ.β. του οχήματος ισαπέχει από τις δυο σιδηροτροχιές, δηλαδή ομοιόμορφη κατανομή του βάρους (σχήμα 1.2.1).



Σχήμα 1.2.1

Ισορροπία σιδηροδρομικού οχήματος σε γραμμή με υπερυψωμένη σιδηροτροχιά χωρίς παραμένονσα πλευρική επιτάχυνση

x, y : ορθογώνιο σύστημα αξόνων

F : φυγόκεντρος δύναμη σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

G : βάρος σιδηροδρομικού οχήματος σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

X : συνισταμένη φυγόκεντρης και βάρους σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

H : απόσταση κ.β. οχήματος από κεφαλή σιδηροτροχιάς σε m

H_A : οριζόντια αντιδράση σιδηροτροχιάς επί τροχού σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

V_A, V_B : κατακόρυφες αντιδράσεις σιδηροτροχιών επί τροχών σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

h : υπερύψωση εξωτερικής σιδηροτροχιάς σε mm

s : απόσταση σιδηροτροχιών σε m

α : γωνία που σχηματίζει το κεκλιμένο επίπεδο των κεφαλών των σιδηροτροχιών με το οριζόντιο επίπεδο

Η ανάλυση γίνεται με την προϋπόθεση ότι λόγω της υπάρχουσας υπερύψωσης εξουδετερώνεται η φυγόκεντρος δύναμη ή η οριζόντια συνιστώσα του βάρους αντισταθμίζει πλήρως την φυγόκεντρο δύναμη, δηλαδή με την προϋπόθεση ισορροπίας. Εφόσον το όχημα ισορροπεί, ικανοποιούνται οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας-η συνισταμένη X είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν οι κεφαλές των σιδηροτροχιών μετά την ανύψωση της εξωτερικής σιδ/χιάς:

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow G \sin \alpha = F \cos \alpha \dots \dots \dots (1.2.1)$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow G \cos \alpha + F \sin \alpha = V_A + V_B \dots \dots \dots (1.2.2)$$

$$\text{Αλλά, } \sin \alpha = \frac{h}{s}$$

Επίσης, η γωνία α είναι πολύ μικρή, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ότι το συνημίτονό της ίσο με τη μονάδα: $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \alpha \rightarrow 1$

Έτσι, οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$(1.2.1) \rightarrow G \cdot \frac{h}{s} = F \Leftrightarrow mg \cdot \frac{h}{s} = m \cdot \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow h = \frac{s \cdot v^2}{R \cdot g} \dots \dots \dots (1.2.3)$$

$$(1.2.2) \rightarrow G + F \cdot \frac{h}{s} = V_A + V_B \dots \dots \dots (1.2.4)$$

όπου m η μάζα του σιδηροδρομικού οχήματος σε kg και g η επιτάχυνση της βαρύτητας σε m / sec^2 .

Αντικαθιστώντας $v(m/sec) = V(km/h) * \frac{1000}{3600} = \frac{V}{3.6}(km/h)$

$$g = 9.81m/sec^2, s = 1500mm$$

$$(1.2.3) \Rightarrow h = \frac{1500V^2}{R \cdot 9,81 \cdot 3,6^2} \Leftrightarrow h = 11.8 \frac{V^2}{R} \dots\dots\dots(1.2.5) \quad (\text{το } h \text{ σε mm})$$

Για κάθε όχημα, λοιπόν, που εισέρχεται σε κυκλικό τόξο ακτίνας R με μια συγκεκριμένη ταχύτητα V, υπάρχει μία υπερύψωση $h = 11.8 \frac{V^2}{R}$ για την οποία η φυγόκεντρη δύναμη εξισορροπείται πλήρως από τη συνιστώσα του βάρους, δηλαδή για την οποία υφίσταται ισορροπία, χωρίς καμία παραμένουσα πλευρική επιτάχυνση προς το εξωτερικό της καμπύλης.

Η υπερύψωση αυτή ονομάζεται θεωρητική υπερύψωση για την ταχύτητα V και ο τύπος της δίνεται στον Νέο Κανονισμό Επιδομής Γραμμής του ΟΣΕ.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗ (mm): $h = 11.8 \frac{V^2}{R}$

Στην περίπτωση αυτή οι κατακόρυφες αντιδράσεις των σιδηροτροχιών είναι ίσες, που σημαίνει ότι στην περίπτωση ισορροπίας που μελετάμε οι δύο σιδηροτροχιές αναλαμβάνουν εξ ίσου το φορτίο του οχήματος, χωρίς να επιβαρύνεται περισσότερο καμία απ' τις δύο.

Αντίστροφα, ο τύπος $h = 11.8 \frac{V^2}{R}$ δείχνει ότι για γνωστές τις τιμές της υπερύψωσης h και της ακτίνας R μιας καμπύλης, υπάρχει μόνο μία τιμή της ταχύτητας V με την οποία μπορεί να περάσει ένας συρμός ώστε να λάβει χώρα ισορροπία με μηδενική νη εξισσοροπούμενη πλευρική επιτάχυνση.

Η ταχύτητα αυτή είναι η $V = \sqrt{11.8Rh} \dots\dots\dots(1.2.6)$ και καλείται ταχύτητα ισορροπίας $V_{ισ}$.

Η ταχύτητα αυτή είναι η $V = \sqrt{11.8Rh}$(1.2.6) και καλείται ταχύτητα ισορροπίας $V_{ισ}$.

$$\text{ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (km/h): } V = \sqrt{11.8Rh}$$

Ανάλογα, αν είναι γνωστή η ταχύτητα V ενός συρμού, υπάρχει μόνο ένας συνδυασμός, ένα γινόμενο $Rh = 11.8V^2$(1.2.7) γεωμετρικών χαρακτηριστικών καμπύλης ώστε ο συρμός να περάσει απ' αυτήν σε ισορροπία ($b=0$).

1.3 Περίπτωση ταχέων συρμών $V > V_{σχ}$ (περίπτωση όπου η ταχύτητα V ενός συρμού απαιτεί θεωρητική υπερύψωση μεγαλύτερη απ' αυτήν που υφίσταται στη γραμμή.

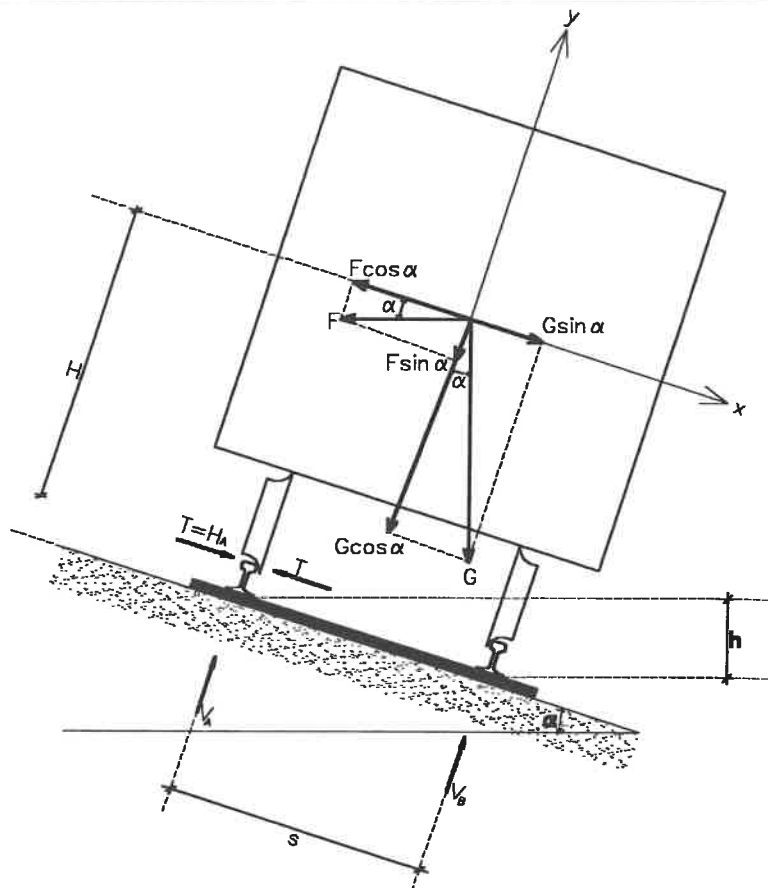
Αποδείχθηκε στην παράγραφο 1.2 ότι για δεδομένες τιμές των γεωμετρικών χαρακτηριστικών R, h μιας καμπύλης υπάρχει μόνο μία τιμή $V_{ισ}$ της ταχύτητας ώστε να επιτευχθεί πλήρης ισορροπία.

Οι ταχείς συρμοί, όμως, (σχήμα 1.3.1), διέρχονται συνήθως από τις καμπύλες με ταχύτητες μεγαλύτερες από την εκάστοτε ταχύτητα με την οποία έχει υπολογιστεί η υπερύψωση, δηλαδή με ταχύτητες μεγαλύτερες από την ταχύτητα σχεδιασμού ($V > V_{σχ}$).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στο στάδιο αυτό έγινε η υπόθεση ότι η εφαρμοζόμενη υπερύψωση στην γραμμή ακολουθεί τον τύπο της θεωρητικής υπερύψωσης, για μια ταχύτητα σχεδιασμού που έχει επιλεγεί, δηλαδή $h = 11.8 \frac{V_{σχ}^2}{R}$. Αν και η εφαρμοζόμενη υπερύψωση με βάση τον Νέο Κανονισμό Επιδομής Γραμμής του ΟΣΕ ακολουθεί τον τύπο της κανονικής υπερύψωσης και όχι της θεωρητικής, η υπόθεση αυτή δεν είναι άτοπη για την ανάλυση που θα γίνει αμέσως παρακάτω.

Αν $h_{θεωρ}$ η θεωρητική υπερύψωση του οχήματος ταχύτητας V και $V_{σχ}$ η ταχύτητα με την οποία έχει η υπολογιστεί η υπερύψωση h που εφαρμόστηκε στην γραμμή, τότε ισχύει:

$$h_{θεωρ} = 11.8 \frac{V^2}{R} > 11.8 \frac{V_{σχ}^2}{R} = h$$



Σχήμα 1.3.1

Ισορροπία σιδηροδρομικού οχήματος σε γραμμή με υπερυψωμένη σιδηροτροχιά με παραμένονσα πλευρική επιτάχυνση προς το εξωτερικό της καμπύλης

x, y : ορθογώνιο σύστημα αξόνων

F : φυγόκεντρος δύναμη σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

G : βάρος σιδηροδρομικού οχήματος σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

X : συνισταμένη φυγόκεντρης και βάρους σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

H : απόσταση κ.β. οχήματος από κεφαλή σιδηροτροχιάς σε m

H_A : οριζόντια αντίδραση σιδηροτροχιάς επί τροχού σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

V_A, V_B : κατακόρυφες αντιδράσεις σιδηροτροχιών επί τροχών σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

T : δύναμη κατά την οποία το βάρος του οχήματος υπολείπεται της φυγόκεντρου δύναμης σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

h : υπερύψωση εξωτερικής σιδηροτροχιάς σε mm

s : απόσταση σιδηροτροχιών σε m

α : γωνία που σχηματίζει το κεκλιμένο επίπεδο των κεφαλών των σιδηροτροχιών με το οριζόντιο επίπεδο

Εστω ότι το βάρος υπολείπεται της φυγόκεντρου κατά μία δύναμη $T = m \cdot b$. Τότε θα ισχύει:

$$T = Z \cos \alpha - G \sin \alpha \Leftrightarrow mb = m \frac{v_{\alpha}^2}{R} - mg \frac{h}{s} \Leftrightarrow b = \frac{v_{\alpha}^2}{R} - g \frac{h}{s} \dots \dots \dots (1.3.1)$$

Στη σχέση (1.3.1) το b είναι η φυγόκεντρος επιτάχυνση που δεν αντισταθμίζεται από την επιτάχυνση της συνιστώσας του βάρους και ονομάζεται παραμένουσα ή μη-εξισορροπούμενη πλευρική επιτάχυνση προς το εξωτερικό της καμπύλης.

Η εξίσωση (1.3.1) στη συνέχεια γίνεται:

$$(1.3.1) \rightarrow b = \frac{V_{\alpha}^2}{3.6^2 \cdot R} - 9.81 \frac{h}{1500} = \frac{V_{\alpha}^2}{3.6^2 R} - \frac{h}{153} \Leftrightarrow 153b = 11.8 \frac{V_{\alpha}^2}{R} - h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = 11.8 \frac{V_{\alpha}^2}{R} - 153b \dots \dots \dots (1.3.2)$$

Για λόγους, άνεσης των επιβατών, έχουν θεσπιστεί ανώτατες τιμές της παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης. Σύμφωνα με τον Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ είναι $\max b = 0.7 \text{ m/sec}^2$

Η ποσότητα $\alpha = 153b$ ονομάζεται ανεπάρκεια της υπερύψωσης με ανώτατη τιμή $\max \alpha = 153 \cdot 0.7 = 105 \text{ mm}$.

Είναι φανερό δε, από την (1.3.2) ότι $a = h_{\theta\epsilon\omega\rho} - h$. Η $h_{\theta\epsilon\omega\rho}$ είναι η θεωρητική υπερύψωση που απαιτεί το όχημα που εισέρχεται στην καμπύλη για την επίτευξη ισορροπίας, και h η υπερύψωση που έχει εφαρμοστεί στην καμπύλη.

ΥΠΕΡΥΨΩΣΗ ΟΤΑΝ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ ΑΝΕΠΑΡΚΕΙΑ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ:

$$h = 11.8 \frac{V_{\alpha}^2}{R} - a$$

Στην παράγραφο 1.6 παρατίθεται παράδειγμα για την καλύτερη ερμηνεία της έννοιας της ανεπάρκειας.

V_A, V_B : κατακόρυφες αντιδράσεις σιδηροτροχιών επί τροχών σε $\text{kgf} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

T' : δύναμη κατά την οποία η φυγόκεντρος δύναμη υπολείπεται του βάρους του οχήματος σε $\text{kgf} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

h : υπερύψωση εξωτερικής σιδηροτροχιάς σε mm

s : απόσταση σιδηροτροχιών σε m

α : γωνία που σχηματίζει το κεκλιμένο επίπεδο των κεφαλών των σιδηροτροχιών με το οριζόντιο επίπεδο

Αν $h_{\text{θεωρ}}$ η θεωρητική υπερύψωση του οχήματος ταχύτητας V και $V_{\sigma\kappa}$ η ταχύτητα με την οποία έχει η υπολογιστεί η υπερύψωση h που εφαρμόστηκε στην γραμμή, τότε ισχύει:

$$h_{\text{θεωρ}} = 11,8 \frac{V^2}{R} < 11,8 \frac{V_{\sigma\kappa}^2}{R} = h$$

Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ένα ποσοστό του βάρους το οποίο δεν εξισορροπείται από την φυγόκεντρο κατά την κίνηση του συρμού. Έστω ότι η παραμένουσα αυτή δύναμη ισούται με $T' = m \cdot b'$. Ισχύει:

$$T' = G \sin \alpha - Z \cos \alpha \Leftrightarrow mb' = mg \frac{h}{s} - m \frac{v_{\sigma\kappa}^2}{R} \Leftrightarrow b' = g \frac{h}{s} - \frac{v_{\sigma\kappa}^2}{R} \dots \dots \dots (1.4.1)$$

Στην σχέση (1.4.1) το b' είναι η παραμένουσα πλευρική επιτάχυνση προς τα εσωτερικά της καμπύλης που προκαλείται από την περίσσεια του βάρους σε σχέση με την φυγόκεντρο.

Η εξίσωση (1.4.1) στη συνέχεια γίνεται:

$$(1.4.1) \rightarrow b' = 9,81 \frac{h}{1500} - \frac{V_{\sigma\kappa}^2}{3,6^2 \cdot R} = \frac{h}{153} - \frac{V_{\sigma\kappa}^2}{3,6^2 R} \Leftrightarrow 153b' = h - 11,8 \frac{V_{\sigma\kappa}^2}{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = 11,8 \frac{V_{\sigma\kappa}^2}{R} + 153b' \dots \dots \dots (1.4.2)$$

Η ποσότητα $\pi = 153b'$ ονομάζεται πλεόνασμα της υπερύψωσης με ανώτατη τιμή $\max \pi = 100 \text{mm}$.

Η ποσότητα $\pi=153b'$ ονομάζεται πλεονάσμα της υπερύψωσης με ανώτατη τιμή $\max \pi=100\text{mm}$.

Είναι φανερό δε, από την (1.4.2) ότι $\pi = h - h_{\theta\epsilon\omega\rho}$. Η $h_{\theta\epsilon\omega\rho}$ είναι όπως είδαμε η θεωρητική υπερύψωση που απαιτεί το όχημα που εισέρχεται στην καμπύλη για την επίτευξη ισορροπίας, και h η υπερύψωση που έχει εφαρμοστεί στην καμπύλη.

ΥΠΕΡΥΨΩΣΗ ΟΤΑΝ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ

$$h = 11.8 \frac{V_{\sigma\tau}^2}{R} + \pi$$

Στην παράγραφο 1.6 παρατίθεται παράδειγμα για την καλύτερη ερμηνεία της έννοιας του πλεονάσματος.

1.5 Περίπτωση $V=0$ (ακίνητου συρμού)

Δυσμενέστερη, ακόμη και απ' την περίπτωση των βραδέων συρμών είναι η περίπτωση που ένας συρμός, για κάποιο λόγο, όπως μια μηχανική βλάβη, ακινητοποιηθεί στην καμπύλη (σχήμα 1.5.1). Πολλές φορές η κατάσταση επιδεινώνεται από την ύπαρξη ανεμοπίεσης ή φορτίου στον συρμό.

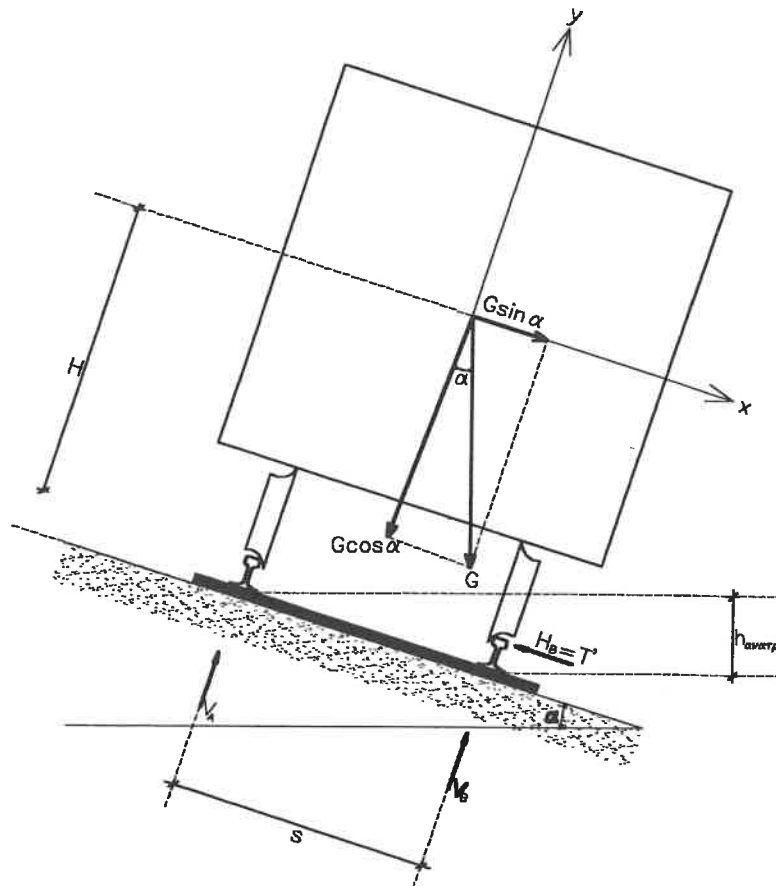
Στην περίπτωση ακινητοποίησης είναι φυσικά $F = \frac{mv^2}{R} = 0$ οπότε οι εξισώσεις ισορροπίας γίνονται:

$$\Sigma X = 0 \Leftrightarrow G \sin a = H_B \Leftrightarrow mg \frac{h}{s} = H_B$$

$$\Sigma Y = 0 \Leftrightarrow V_A + V_B = G \cos a$$

$$\Sigma M_{\substack{\text{εσωτ} \\ \text{σιδηροτρ.}}} = V_A \cdot s + G \sin a \cdot H = \frac{G \cos a \cdot s}{2} \dots \dots \dots (1.5.1)$$

Όπως φαίνεται κι από το σχήμα, η συνισταμένη των δυνάμεων, εφόσον δεν υφίσταται φυγόκεντρος, είναι το βάρος. Όταν το άνυσμα του βάρους «πέφτει» μέσα στο διάστημα το μεταξύ των σιδηροτροχιών, το όχημα ισορροπεί. Όταν όμως η υπερύψωση αυξηθεί υπέρμετρα, η οριζόντια συνιστώσα $G \sin a$ μεγαλώνει και η κατεύθυνση του βάρους μεταφέρεται προς την εσωτερική σιδηροτροχιά, μέχρι να την ξεπεράσει και να προκαλέσει ανατροπή του οχήματος προς τα εσωτερικά της καμπύλης.



Σχήμα 1.5.1

Ισορροπία ακίνητου σιδηροδρομικού οχήματος σε γραμμή με υπερυψωμένη σιδηροτροχιά

x, y : ορθογώνιο σύστημα αξόνων

G : βάρος σιδηροδρομικού οχήματος σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

H : απόσταση κ.β. οχήματος από κεφαλή σιδηροτροχιάς σε m

H_B : οριζόντια αντίδραση σιδηροτροχιάς επί τροχού σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

V_A, V_B : κατακόρυφες αντιδράσεις σιδηροτροχιών επί τροχών σε $\text{kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2$

h : υπερύψωση εξωτερικής σιδηροτροχιάς σε mm

s : απόσταση σιδηροτροχιών σε m

α : γωνία που σχηματίζει το κεκλιμένο επίπεδο των κεφαλών των σιδηροτροχιών με το οριζόντιο επίπεδο

Με την ανατροπή παύει να υπάρχει επαφή του τροχού με την εξωτερική σιδηροτροχιά, άρα $V_A=0$. Οπότε:

$$(1.5.1) \rightarrow G \sin \alpha \cdot H = \frac{G \cdot s}{2} \Leftrightarrow \frac{h_{\text{ανατροπ}}}{s} \cdot H = \frac{s}{2} \Leftrightarrow h_{\text{ανατροπ}} = \frac{s^2}{2H} \dots \dots \dots (1.5.2)$$

Μπορούμε να υπολογιστεί μια ενδεικτική τιμή της $h_{\text{ανατροπ}}$ με βάση την τελευταία σχέση. Θέτοντας $s=1500\text{mm}$ και $H=2.5\text{m}$, προκύπτει: $h_{\text{ανατροπ}}=450\text{mm}$.

Η τιμή αυτή της υπερύψωσης ανατροπής προέκυψε βέβαια χωρίς τον υπολογισμό της ύπαρξης εγκάρσιας ανεμοπίεσης ή φορτίου στο όχημα. Το φορτίο αυξάνει το βάρος του οχήματος, αυξάνοντας έτσι και την συνιστώσα του βάρους, ενώ η ανεμοπίεση προσθέτει ακόμα μία δύναμη που τείνει να ανατρέψει το όχημα.

Για να διασφαλίσει την ισορροπία των οχημάτων στις γραμμές του, λαμβάνοντας υπόψη και την ανεμοπίεση και το φορτίο, ο ΟΣΕ προβλέπει στον Ν.Κ.Ε.Γ. ότι η ανώτατη κατασκευαστική υπερύψωση βάσει των παραπάνω απαιτήσεων είναι $\max h_{\text{κατ}}=160\text{mm}$.

1.6 Παραδείγματα κατανόησης των εννοιών ανεπάρκεια/ πλεόνασμα υπερυψώσεως

1.6.1 Ανεπάρκεια

- Ένας συρμός που κινείται με ταχύτητα 120km/h απαιτείται να εγγραφεί σε τόξο ακτίνας 1500m . Θα χρειαστεί υπερύψωση $h = 11.8 \frac{V^2}{R} = 11.8 \frac{120^2}{1500} = 115\text{mm}$ τη οποία μπορεί να εξασφαλιστεί κατασκευαστικά αφού $h_{\text{max}}^{\text{kat}} = 160\text{mm}$.
- Ένας συρμός που κινείται με ταχύτητα 160km/h απαιτεί να εγγραφεί σε τόξο ακτίνας 1500m . Θα χρειαστεί υπερύψωση $h = 11.8 \frac{V^2}{R} = 11.8 \frac{160^2}{1500} = 200\text{mm}$.

Όμως $h_{\text{max}}^{\text{kat}} = 160\text{mm}$, δηλαδή μόνο 160mm μπορεί να δοθεί κατασκευαστικά, πράγμα που σημαίνει ότι αν δεν γινόταν δεκτή η περίπτωση της παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης, δεν θα μπορούσε να εγγραφεί στο τόξο.

Υπάρχει λοιπόν το περιθώριο των $0,7\text{m/sec}^2$ παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης, που μεταφράζεται σε 105mm ανεπάρκειας υπερύψωσης. Στην περίπτωση αυτή από τα 105mm θα χρειαστούν μόνο τα $200-160=40\text{mm}$, δηλαδή

ο συρμός θα εγγραφεί (δεδομένου ότι κατασκευάζεται η μέγιστη κατασκευαστική υπερύψωση 160mm) με πλευρική επιτάχυνση

$$153b = a = 40mm \Leftrightarrow b = \frac{40}{153} = 0.26m/sec^2 < 0.7m/sec^2 \text{ που είναι αποδεκτή τιμή.}$$

Φυσικά, η υπερύψωση που τελικά θα κατασκευαστεί θα είναι ακόμα μικρότερη από 160mm, που είναι το ανώτατο όριο, και έτσι η ανεπάρκεια της υπερύψωσης θα μεγαλώσει.

Γίνεται φανερό από το παραπάνω παράδειγμα ότι κατά την μελέτη χάραξης μιας καμπύλης μπορούμε να «εκμεταλλευτούμε» τα 160mm της μέγιστης κατασκευαστικής επιτάχυνσης συν τα 105mm του «περιθωρίου» της πλευρικής επιτάχυνσης. Συνολικά, λοιπόν, μπορούν χρησιμοποιηθούν 160mm+105mm=265mm θεωρητικής υπερύψωσης. Όταν όμως ένας οποιοσδήποτε συρμός με οποιαδήποτε ταχύτητα εισέρθει σε καμπύλη με δεδομένη υπερύψωση, π.χ. 145mm, μπορεί να εκμεταλλευτεί μέχρι 145mm+105mm=250mm θεωρητικής υπερύψωσης. Αν η ταχύτητά του απαιτεί μεγαλύτερη θεωρητική υπερύψωση ($h = 11.8 \frac{V^2}{R}$), οι συνέπειες στην άνεση των επιβατών θα είναι δυσμενείς.

- Αντίστοιχα, ένας συρμός με ταχύτητα 100km/h για να εγγραφεί σε τόξο ακτίνας 1500m θα απαιτούσε υπερύψωση $h = 11.8 \frac{V^2}{R} = 11.8 \frac{100^2}{1500} = 80mm$. Δεδομένου όμως ότι $ma_{\chi\alpha} = 105mm$ θα μπορούσε να μην κατασκευαστεί καθόλου υπερύψωση στην καμπύλη και όλη την απαιτούμενη υπερύψωση να αναλάβει η πλευρική επιτάχυνση $b = \frac{80}{153} = 0.52m/sec^2 < 0.7m/sec^2$ που είναι μια αποδεκτή τιμή.

Σημείωση: Από τα παραπάνω μπορεί εσφαλμένα να υποτεθεί ότι όπου δεν απαιτείται κατασκευαστικά η υπερύψωση, δεν θα απαιτείται ενδεχομένως και το τόξο συναρμογής στην μετάβαση από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο ή ανάμεσα σε δύο κυκλικά τόξα. Αυτό θα εξεταστεί παρακάτω, εφόσον το τόξο συναρμογής είναι πάντοτε απαραίτητο για την αντιμετώπιση του τινάγματος και για την ομαλή αύξηση ή μείωση της καμπυλότητας και της ακτίνας.

1.6.2 Πλεόνασμα

- Σε μια καμπύλη ακτίνας 1000m έχει κατασκευαστεί υπερύψωση 150mm. Ένα σιδηροδρομικό όχημα απαιτείται να εγγραφεί στην καμπύλη με ταχύτητα 80km/h. Ο συρμός αυτός θα χρειαζόταν υπερύψωση $h = 11.8 \frac{V^2}{R} = 11.8 \frac{80^2}{1500} = 75mm$. Υπάρχει λοιπόν ένα πλεόνασμα υπερύψωσης $150mm - 75mm = 75mm$ το οποίο όμως δεν υπερβαίνει το όριο $max\pi = 100mm$ οπότε ακόμα δεν παρουσιάζονται δυσμενείς συνέπειες στην άνεση των επιβατών. Η πλευρική επιτάχυνση προς τα εσωτερικά της καμπύλης είναι, σ' αυτή την περίπτωση $b' = \frac{75}{153} = -0.49m/sec^2 < 0.65m/sec^2$ δεκτή.
- Στο παραπάνω παράδειγμα, αν ο συρμός κινούνταν με 40km/h το πλεόνασμα θα ήταν $150mm - 11.8 \frac{40^2}{1000} = 150 - 20 = 130mm > 100mm$. Δηλαδή θα εμφανίζονταν τιμές πλευρικής επιτάχυνσης προς τα εσωτερικά της καμπύλης, με αποτέλεσμα την ενόχληση των επιβατών, καθώς επίσης και υπέρμετρη φθορά της εσωτερικής σιδηροτροχιάς.

Σημείωση: Όσον αφορά το πλεόνασμα, πρέπει να τονιστεί ότι το ανώτατο όριο των 100mm λαμβάνεται κατά την κίνηση του συρμού.

1.7 Σχέση μεταξύ V,R,h,b

Υπάρχει μια άρρηκτη σχέση μεταξύ των τεσσάρων αυτών μεγεθών, δηλαδή της ταχύτητας V, της ακτίνας της καμπύλης R, της υπερύψωσης h και της παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης b. Τα όρια κατά τον προσδιορισμό τους καθορίζουν οι ανώτατες τιμές του b (θετικές όταν πρόκειται για ταχείς συρμούς τους οποίους αφορά η ανεπάρκεια και αρνητικές όταν πρόκειται για βραδείς συρμούς τους οποίους αφορά το πλεόνασμα της υπερύψωσης). Με βάση αυτά τα όρια καθορίζονται οι τιμές των υπολοίπων μεγεθών, πάντα συναρτήσει η μία της άλλης.

1.7.1 Υπολογισμός των $V_{\max}$ και $V_{\min}$ επιτρεπόμενων συναρτήσει των γεωμετρικών στοιχείων μιας καμπύλης R και h

Σημείωση: Οι σχέσεις που ακολουθούν βασίζονται στον Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ και έχουν αποδειχθεί.

Έστω κυκλικό τόξο ακτίνας R και υπερύψωσης h. Από το τόξο αυτό θα διέρχονται οχήματα διαφορετικών ταχυτήτων από τους οποίους οι ταχείς θα υφίστανται την επίδραση πλευρικής επιτάχυνσης προς τα εξωτερικά της καμπύλης, πάντως μέσα στα αποδεκτά όρια. Αντίστοιχα, οι βραδείς συρμοί θα υφίστανται την επίδραση πλευρικής επιτάχυνσης προς τα εσωτερικά της καμπύλης. Έτσι:

-για τους ταχείς συρμούς:

$$\alpha = h_{\theta_{\text{εωρ}}} - h = 11.8 \frac{V^2}{R} - h \leq \max \alpha \Leftrightarrow V \leq \sqrt{\frac{R(h + \max \alpha)}{11.8}} \dots \dots \dots (1.7.1)$$

-για τους βραδείς συρμούς

$$\pi = h - h_{\theta_{\text{εωρ}}} = h - 11.8 \frac{V^2}{R} \leq \max \pi \Leftrightarrow V \geq \sqrt{\frac{R(h - \max \pi)}{11.8}} \dots \dots \dots (1.7.2)$$

Δηλαδή, η μέγιστη και η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να διέλθει ένας συρμός από καμπύλη με γεωμετρικά χαρακτηριστικά R και h είναι αντίστοιχα:

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{R(h + \max \alpha)}{11.8}} \quad \text{και} \quad V_{\min} = \sqrt{\frac{R(h - \max \pi)}{11.8}}$$

Και αν αντικατασταθούν οι οριακές τιμές $\max \alpha = 105 \text{ mm}$ και $\max \pi = 100 \text{ mm}$:

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{R(h + 105)}{11.8}} \dots \dots \dots (1.7.3) \quad \text{και} \quad V_{\min} = \sqrt{\frac{R(h - 100)}{11.8}} \dots \dots \dots (1.7.4)$$

Για $h = 0 \Leftrightarrow V_{\max} = 2.98\sqrt{R}$ είναι η ταχύτητα που μπορεί να αποκτήσει ένα όχημα σε γραμμή χωρίς καθόλου κατασκευαστική υπερύψωση, ή αλλιώς είναι η ταχύτητα που μπορεί να «αντέξει» η ανεπάρκεια της υπερύψωσης.

Για $h = 160\text{mm} \Leftrightarrow V_{\max} = 4.74\sqrt{R}$ είναι η ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει το όχημα σε ένα κυκλικό τόξο με την μέγιστη κατασκευαστική υπερύψωση των 160mm και εκμεταλλευόμενο την μέγιστη τιμή της ανεπάρκειας της υπερύψωσης 105mm, εκμεταλλευόμενο δηλαδή συνολική υπερύψωση 265mm.

Τέλος, η ελάχιστη ακτίνα εγγραφής ενός συρμού που κινείται με την μέγιστη ταχύτητα μέσα σε καμπύλη δεδομένης ακτίνας και υπερύψωσης, προκύπτει από την σχέση (1.7.3):

$$(1.7.3) \rightarrow R_{\min} = \frac{11.8V_{\max}^2}{(h + 105)} \dots\dots\dots (1.7.4)$$

1.8 Εφαρμοζόμενη υπερύψωση

Κατά την χάραξη μιας σιδηροδρομικής γραμμής και συγκεκριμένα κατά την μελέτη χάραξης των καμπύλων αντιμετωπίζεται το αντίστροφο πρόβλημα απ' αυτό που αντιμετωπίστηκε στην παράγραφο (1.7.1), δηλαδή επιδιώκεται, για ένα φάσμα ταχυτήτων των οχημάτων να επιλεγούν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της καμπύλης R και h ώστε όλα τα οχήματα να διέρχονται με ασφάλεια.

Στις σιδηροδρομικά συστήματα με όμοια λειτουργικά χαρακτηριστικά των συρμών (μετρό και τραμ), άρα και ίδιες ταχύτητες οχημάτων, είναι δυνατόν η μελέτη χάραξης να γίνει με μία μόνο ταχύτητα, την κοινή των συρμών και άρα να εφαρμοστεί στο δίκτυο η θεωρητική υπερύψωση που απαιτεί αυτή η ταχύτητα.

Στην περίπτωση όμως των υπεραστικών σιδηροδρόμων, όπου υπάρχει λειτουργία πολλών κατηγοριών οχημάτων, ζητείται να αντιμετωπισθεί το παραπάνω ζήτημα.

Για τα όρια των μέγιστων και ελάχιστων ταχυτήτων, που αντιστοιχούν στους επιβατικούς και εμπορευματικούς συρμούς, ο Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ προβλέπει τις παρακάτω 3 κατηγορίες:

Για $V_{\max} \leq 100 \text{ km/h}$ $\rightarrow V_{\min} = 60 \text{ km/h}$
για $100 \leq V_{\max} \leq 140 \text{ km/h}$ $\rightarrow V_{\min} = 70 \text{ km/h}$
για $140 \leq V_{\max} \leq 200 \text{ km/h}$ $\rightarrow V_{\min} = 80 \text{ km/h}$

Γίνεται ή υπόθεση ότι σε μία γραμμή υφίσταται η εκδοχή της κατηγορίας γ : έχει προβλεφθεί ότι από την θεωρούμενη καμπύλη θα διέλθουν οχήματα με ταχύτητες 80, 100, 120 και 160 km/h. Με δεδομένη ακτίνα καμπύλης R , τι τιμή της υπερύψωσης θα πρέπει να εφαρμοστεί ώστε όλα τα σιδηροδρομικά οχήματα να διέλθουν ασφαλώς;

Θα πρέπει να είναι κάποια υπερύψωση h , έτσι ώστε:

–για τα οχήματα που διέρχονται με την μεγαλύτερη ταχύτητα να μην υπερβαίνεται το όριο της $\max \alpha = 105 \text{ mm}$ (ή $b = 0.7 \text{ m/sec}^2$), δηλαδή να ικανοποιείται η ανισότητα

$$\alpha = h_{\theta}^{V_{\max}} - h \leq \max \alpha \Leftrightarrow h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha \leq h$$

–για τα οχήματα που διέρχονται με την ελάχιστη ταχύτητα να μην υπερβαίνεται το όριο του $\max \pi = 100 \text{ mm}$ (ή $b' = 0.65 \text{ m/sec}^2$), δηλαδή να ικανοποιείται η ανισότητα

$$\pi = h - h_{\theta}^{V_{\min}} \leq \max \pi \Leftrightarrow h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi \geq h$$

Τελικά η εφαρμοζόμενη υπερύψωση θα πρέπει να ικανοποιεί την διπλή ανισότητα (όπου $\max \alpha = 105 \text{ mm}$ και $\max \pi = 100 \text{ mm}$)

$$h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha \leq h \leq h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$$

(1.8.1)

1.8.1 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.1 [7]

Για τον εντοπισμό της επιτρεπόμενης περιοχής τιμών της εφαρμοζόμενης υπερύψωσης, παριστάνεται γραφικά η μεταβολή των τιμών των $h_{\theta}^{V_{\max}}, h_{\theta}^{V_{\min}}, h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$ σε συνάρτηση με την ακτίνα R στο παρακάτω διάγραμμα.

Στο διάγραμμα 1.8.1 θεωρήθηκε $V_{\max}=160\text{km/h}$, $V_{\min}=80\text{km/h}$, $\max \alpha=105\text{mm}$ και $\max \pi=100\text{mm}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι} \quad h_{\theta}^{V_{\max}} &= 11.8 \frac{V_{\max}^2}{R} \\ h_{\theta}^{V_{\min}} &= 11.8 \frac{V_{\min}^2}{R} \end{aligned} \quad \text{μορφής } y = \frac{a}{x} \text{ υπερβολές}$$

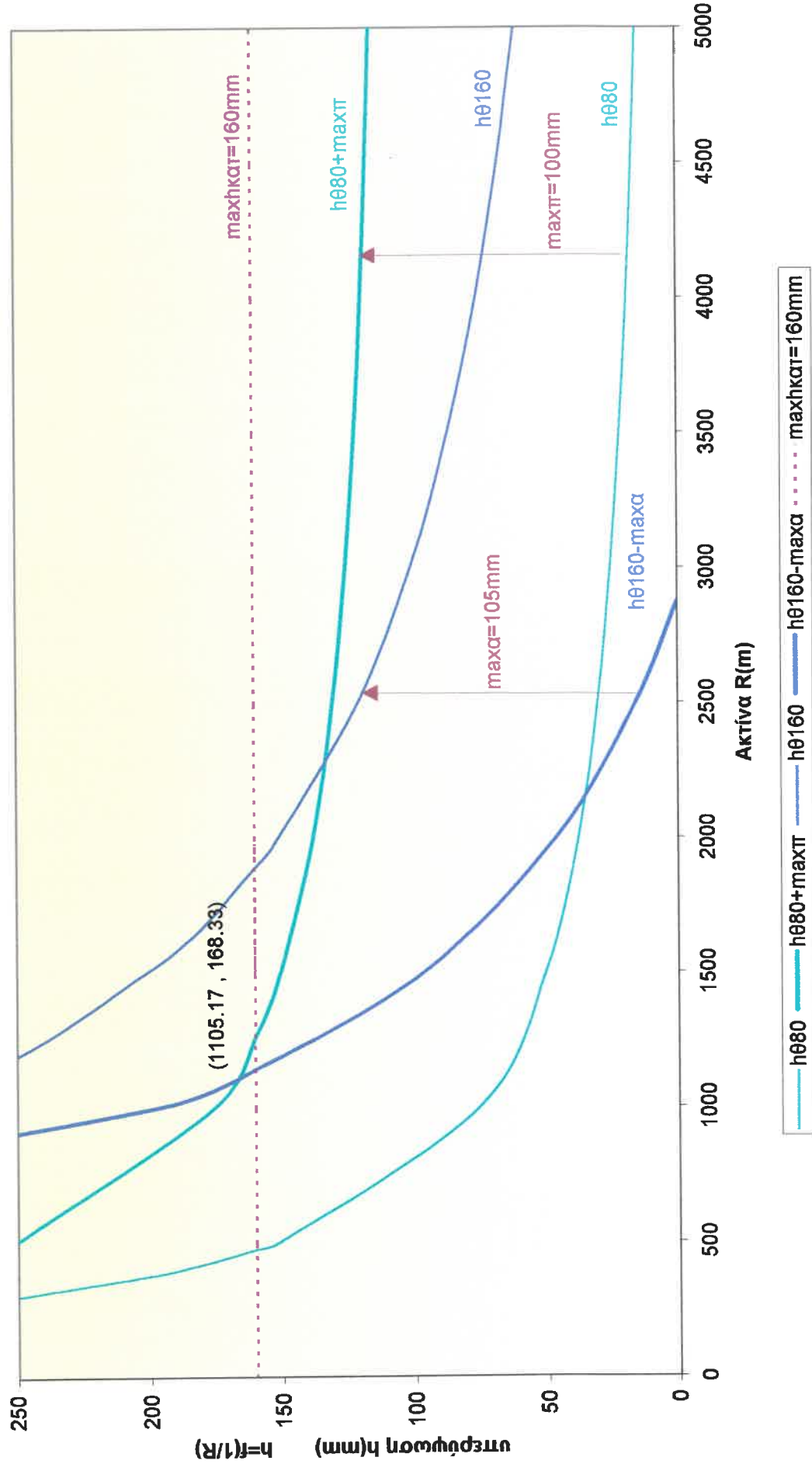
$$\begin{aligned} \text{Και} \quad h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha &= 11.8 \frac{V_{\max}^2}{R} - \max \alpha \\ h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi &= 11.8 \frac{V_{\min}^2}{R} + \max \pi \end{aligned} \quad \text{μορφής } y = \frac{a}{x} + b \text{ υπερβολές που διέρχονται από}$$

το σημείο $(\frac{a}{b}, b)$

Η κατακόρυφη απόσταση- για κάθε τιμή της R- των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}}$ και $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha$ είναι ίση με την ανεπάρκεια $\max \alpha=105\text{mm}$, ενώ των $h_{\theta}^{V_{\min}}$ και $h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$ είναι το πλεόνασμα $\max \pi=100\text{mm}$.

Η επιτρεπτή περιοχή της h με βάση την ανισότητα (1.8.1) είναι η περιοχή ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$, με οριακές τιμές της h τις τιμές που βρίσκονται πάνω στις γραφικές παραστάσεις για κάθε R.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.1 Υπερύψωση για μικτή κυκλοφορία $V_{max}=160\text{km/h}$ και $V_{min}=80\text{km/h}$



1.8.1.1 Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 1, υπάρχει κάποιο σημείο τομής των $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$, του οποίου η τετμημένη R είναι και η ελάχιστη ακτίνα για την οποία βρίσκομαι ακόμα μέσα στην επιτρεπτή περιοχή της εφαρμοζόμενης υπερύψωσης.

Προφανώς, για το σημείο αυτό $(R_{\min}, h_{R_{\min}})$, που είναι σημείο τομής, θα ισχύει

$$h_{R_{\min}} = h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha = h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi \dots \dots \dots (1.8.1.1.1)$$

$$\Leftrightarrow 11.8 \frac{V_{\max}^2}{R} - \max \alpha = 11.8 \frac{V_{\min}^2}{R} + \max \pi \Leftrightarrow \max \alpha + \max \pi = 11.8 \frac{V_{\max}^2 - V_{\min}^2}{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_{\min} = 11.8 \frac{V_{\max}^2 - V_{\min}^2}{\max \alpha + \max \pi} \dots \dots \dots (1.8.1.1.2)$$

Για την τιμή της Rmin που προέκυψε παραπάνω:

$$\begin{aligned} (1.8.1.1.1) \rightarrow h_{R_{\min}} &= h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha = 11.8 \frac{V_{\max}^2}{R} - \max \alpha = 11.8 V_{\max}^2 \left(\frac{\max \alpha + \max \pi}{11.8 (V_{\max}^2 - V_{\min}^2)} \right) - \max \alpha = \\ &= \frac{V_{\max}^2 (\max \alpha + \max \pi)}{V_{\max}^2 - V_{\min}^2} = \frac{V_{\max}^2 \cdot \max \alpha + V_{\max}^2 \cdot \max \pi - V_{\max}^2 \cdot \max \alpha + V_{\min}^2 \cdot \max \alpha}{V_{\max}^2 - V_{\min}^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow h_{R_{\min}} = \frac{V_{\max}^2 \cdot \max \pi + V_{\min}^2 \cdot \max \alpha}{V_{\max}^2 - V_{\min}^2} \dots \dots \dots (1.8.1.1.3) \end{aligned}$$

Προφανώς ισχύει $h_{R_{\min}} \leq h_{\max}^{corr} = 160mm$ δηλαδή $h_{\max} = 160mm$ σε κάθε περίπτωση.

1.8.1.2 Μετασχηματισμός της σχέσης (1.8.1.1.2) με την βοήθεια της σχέσης (1.8.1.1.3)

$$(1.8.1.1.3) \rightarrow h_{R_{\min}} \cdot V_{\max}^2 - h_{R_{\min}} \cdot V_{\min}^2 = V_{\max}^2 \cdot \max \pi + V_{\min}^2 \cdot \max \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{\min}^2 (h_{R_{\min}} + \max \alpha) = V_{\max}^2 (h_{R_{\min}} - \max \pi) \Leftrightarrow V_{\min}^2 = V_{\max}^2 \frac{h_{R_{\min}} - \max \pi}{h_{R_{\min}} + \max \alpha} \dots \dots (1.8.1.2.1)$$

Οπότε η (1.8.1.1.2) γίνεται:

$$R_{\min} = 11.8 \cdot \frac{V_{\max}^2 - V_{\max}^2 \frac{h_{R_{\min}} - \max \pi}{h_{R_{\min}} + \max \alpha}}{\max \alpha + \max \pi} = 11.8 \frac{V_{\max}^2 \cdot h_{R_{\min}} + V_{\max}^2 \cdot \max \alpha - V_{\max}^2 \cdot h_{R_{\min}} + V_{\max}^2 \cdot \max \pi}{h_{R_{\min}} + \max \alpha} =$$

$$\frac{V_{\max}^2 \cdot (\max \alpha + \max \pi)}{(\max \alpha + \max \pi)(h_{R_{\min}} + \max \alpha)} \Leftrightarrow R_{\min} = \frac{V_{\max}^2}{h_{R_{\min}} + \max \alpha} \dots \dots \dots (1.8.1.2.2)$$

Η ελάχιστη τιμή της $R_{\min}$ για κάθε $V_{\max}$ προκύπτει από την παραπάνω σχέση για $\max \alpha = 105 \text{ mm}$ και $\max h = 160 \text{ mm}$: $R_{\min} = \frac{V_{\max}^2}{265}$

1.8.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.2 [7]

Για την διευκόλυνση της μελέτης και την επίλυση του προβλήματος μετατράπηκε ο άξονας των τετμημένων από ακτίνα R σε καμπυλότητα $K = 1000/R$. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται γραμμικοποίηση του διαγράμματος 1 στο διάγραμμα 2:

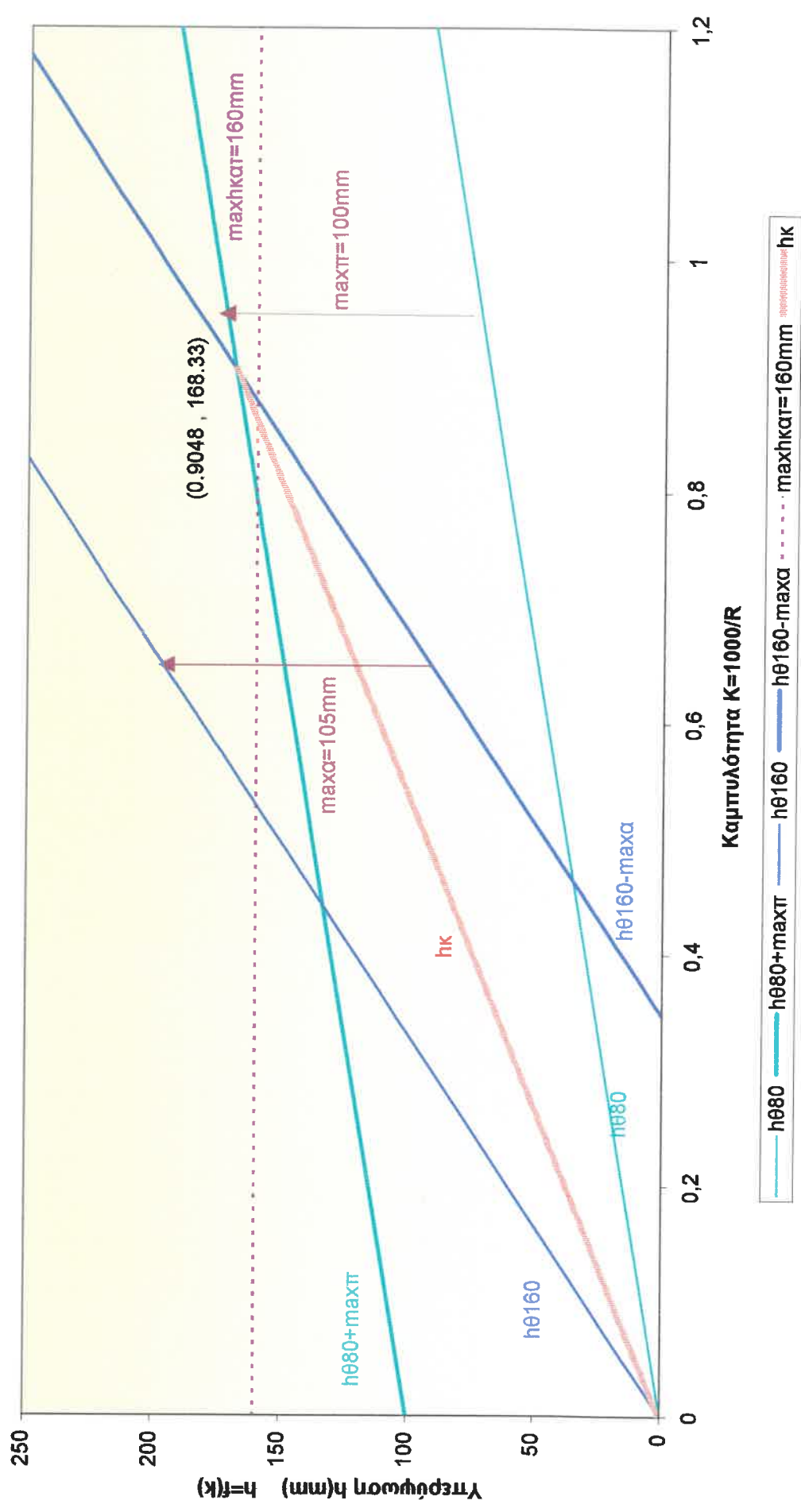
$$h_{\theta}^{\max} = 11.8 \frac{V_{\max}^2}{R} = 11.8 \frac{V_{\max}^2}{1000/K} = \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K$$

$$h_{\theta}^{\min} = 11.8 \frac{V_{\min}^2}{R} = 11.8 \frac{V_{\min}^2}{1000/K} = \frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K$$

μορφής $y = ax$ ευθείες διερχόμενες από την

αρχή των αξόνων (0,0)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.2 Καθορισμός της κανονικής υπέρψωσης h_k για μικτή κυκλοφορία $V_{max}=160\text{km/h}$ και $V_{min}=80\text{km/h}$



$$h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha = \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K - \max \alpha$$

μορφής $y = ax + b$ ευθείες που διέρχονται από το

$$h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi = \frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K + \max \pi$$

σημείο $(-\frac{b}{a}, b)$

Με τον τρόπο αυτό όλες οι υπερβολές μετατρέπονται σε ευθείες. Οι ευθείες $h_{\theta}^{V_{\max}}$ και $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha$ είναι παράλληλες και απέχουν κατακόρυφη απόσταση ίση με την ανεπάρκεια $\max \alpha = 105\text{mm}$, ενώ οι ευθείες $h_{\theta}^{V_{\min}}$ και $h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$ απέχουν κατακόρυφη απόσταση ίση με το πλεόνασμα $\max \pi = 100\text{mm}$ και είναι μεταξύ τους παράλληλες για κάθε τιμή της καμπυλότητας K .

Στο παραπάνω διάγραμμα θεωρήθηκε $V_{\max} = 160\text{km/h}$, $V_{\min} = 80\text{km/h}$, $\max \alpha = 105\text{mm}$ και $\max \pi = 100\text{mm}$.

Όπως και στο διάγραμμα 1.8.1, η επιτρεπτή περιοχή της h με βάση την ανισότητα (1.8.1) είναι η περιοχή ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha$, $h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$, με οριακές τιμές της h τις τιμές που βρίσκονται πάνω στις γραφικές παραστάσεις για κάθε R .

Επίσης, το σημείο τομής των δύο γραφικών παραστάσεων, που δίνει την μέγιστη καμπυλότητα, άρα την ελάχιστη ακτίνα του σημείου που βρίσκεται ακόμα μέσα στην επιτρεπόμενη περιοχή της h , είναι το $(R_{\min}, h_{R_{\min}})$ με τιμές της τετμημένης και της τεταγμένης όπως υπολογίστηκαν προηγουμένως. Η μέγιστη τιμή της καμπυλότητας, άρα η ελάχιστη τιμή της ακτίνας $R_{\min}$ δίνεται πάλι για $\max h = 160\text{mm}$.

1.8.3 Υπολογισμός της κανονικής υπερύψωσης

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζεται την εφαρμοζόμενη υπερύψωση. Έχει ήδη εντοπιστεί η επιτρεπτή περιοχή από την οποία θα επιλεγεί αυτή την υπερύψωση για κάθε R(ή K), αφού κάθε τιμή της R ευρισκόμενη εντός των ορίων που ορίζει η ανισότητα (1.8.1) καθιστά ασφαλή την διέλευση και του ταχύτερου αλλά και του βραδύτερου συρμού.

Η επιλογή της h θα γίνει λαμβάνοντας υπόψην ποια κίνηση-εμπορική ή επιβατική-επικρατεί στο δίκτυο. Περισσότερο βραδεία κίνηση οδηγεί προς το κάτω όριο της περιοχής, ενώ περισσότερο ταχεία προς το άνω όριο.

Γίνεται αποδεκτό γενικά ότι η κυκλοφορία είναι μεικτή, χωρίς να υπερισχύει καμία από την επιβατική ή την εμπορική λειτουργία.

Σημείωση: Αυτή η υπόθεση γίνεται και στους Γερμανικούς κανονισμούς, όπου χρησιμοποιείται επίσης η κανονική υπερύψωση.

Σύμφωνα με την παραπάνω παραδοχή, η γραφική παράσταση της κανονικής υπερύψωσης είναι η ευθεία που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο σημείο τομής $(R_{\min}, h_{R_{\min}})$, όπως φαίνεται στο σχήμα του διαγράμματος 1.8.2. Η ευθεία αυτή δίνει την τιμή της υπερύψωσης που πρέπει να εφαρμοστεί για κάθε R, δηλαδή δίνει την τιμή της κανονικής υπερύψωσης για κάθε R.

Για $K < K_{\max}$ ή $R > R_{\min}$, λόγω ομοίων τριγώνων προκύπτει ο λόγος:

$$\frac{h_K}{K} = \frac{h_{R_{\min}}}{1000/R_{\min}} \quad \text{ή} \quad \frac{h_K}{1000/R} = \frac{h_{R_{\min}}}{1000/R_{\min}} \Leftrightarrow h_K = \frac{h_{R_{\min}} \cdot R_{\min}}{R}$$

με την βοήθεια της σχέσης (1.8.1.2.2): $R_{\min} = 11.8 \frac{V_{\max}^2}{h_{R_{\min}} + \max a}$ που υπολογίστηκε

προηγουμένως, ο παραπάνω λόγος γίνεται:

$$h_K = \frac{h_{R_{\min}}}{R} \cdot 11.8 \frac{V_{\max}^2}{h_{R_{\min}} + \max a} \Leftrightarrow h_K = \frac{h_{R_{\min}}}{h_{R_{\min}} + \max a} \cdot 11.8 \frac{V_{\max}^2}{R} \Leftrightarrow h_K = \frac{h_{R_{\min}}}{h_{R_{\min}} + \max a} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}}$$

Και αν αντικατασταθεί η h_{Rmin} με την τιμή $max h = 160mm$:

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗ (mm):
$$h_k = \frac{h_{max}}{h_{max} + max a} \cdot h_{\theta}^{V_{max}} \dots\dots\dots(1.8.3.1)$$

$$h_{max} = 160mm, max a = 105mm \xrightarrow{(1.8.3.1)} h_k = \frac{160}{160+105} h_{\theta}^{V_{max}} \Leftrightarrow h_k = \frac{160}{265} \cdot 11.8 \frac{V_{max}^2}{R} \Leftrightarrow$$

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ(mm):
$$h_k = 7.12 \frac{V_{max}^2}{R} \dots\dots\dots(1.8.3.2)$$

Παρατηρείται ότι στους τύπους της κανονικής υπερύψωσης στην τιμή της ταχύτητας υπεισέρχεται η μέγιστη ταχύτητα.

1.8.4 Γραφική απόδειξη της σχέσης για την κανονική υπερύψωση

Αποδείχθηκε μαθηματικά ότι η κανονική υπερύψωση για μεικτή κυκλοφορία σε ένα φάσμα ταχυτήτων V_{max} έως V_{min} είναι $\underline{h_k = 7.12 \frac{V_{max}^2}{R}}$, που σημαίνει ότι αυτή η τιμή θα

παραμένει ίδια όσο ίδια θα παραμένει η μέγιστη ταχύτητα διέλευσης, ακόμα κι αν η ελάχιστη ταχύτητα μεταβάλλεται διαρκώς. Αλλιώς διατυπωμένο, σε δύο τουλάχιστον γραφικές παραστάσεις $h-K$, όπως αυτή του διαγράμματος 1.8.2 που παρουσιάστηκε παραπάνω, με ίδια V_{max} αλλά δύο διαφορετικές V_{min} , η γραφική παράσταση της κανονικής υπερύψωσης h_k (ευθεία) θα είναι η ίδια.

Με σκοπό την γραφική απόδειξη των παραπάνω έγιναν τα διαγράμματα $h-R$ και $h-K$ όπως προηγουμένως, για:

$V_{max}=160km/h$ και $V_{min}=100,80,60km/h$

$V_{max}=120km/h$ και $V_{min}=80,70,60km/h$

$V_{max}= 80km/h$ και $V_{min}=60,50,40km/h$

Για το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$ σε όλα τα διαγράμματα h-R χρησιμοποιείται η σχέση (1.8.1.1.2): $R_{\min} = 11.8 \frac{V_{\max}^2 - V_{\min}^2}{\max \alpha + \max \pi}$ για την

τετμημένη ενώ η τεταγμένη βρίσκεται:

$$h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi = 11.8 \frac{V_{\min}^2}{R} + 100 \quad \text{ή}$$

$$h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha = 11.8 \frac{V_{\max}^2}{R} - 105$$

Όσον αφορά το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$ στα διαγράμματα h-K χρησιμοποιείται η σχέση $K = \frac{1000}{R_{\min}} = \frac{1000}{11.8} \cdot \frac{\max \alpha + \max \pi}{V_{\max}^2 - V_{\min}^2}$ για την

τετμημένη, ενώ η τεταγμένη είναι:

$$\frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K + \max \pi \quad \text{ή}$$

$$\frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K - \max \alpha$$

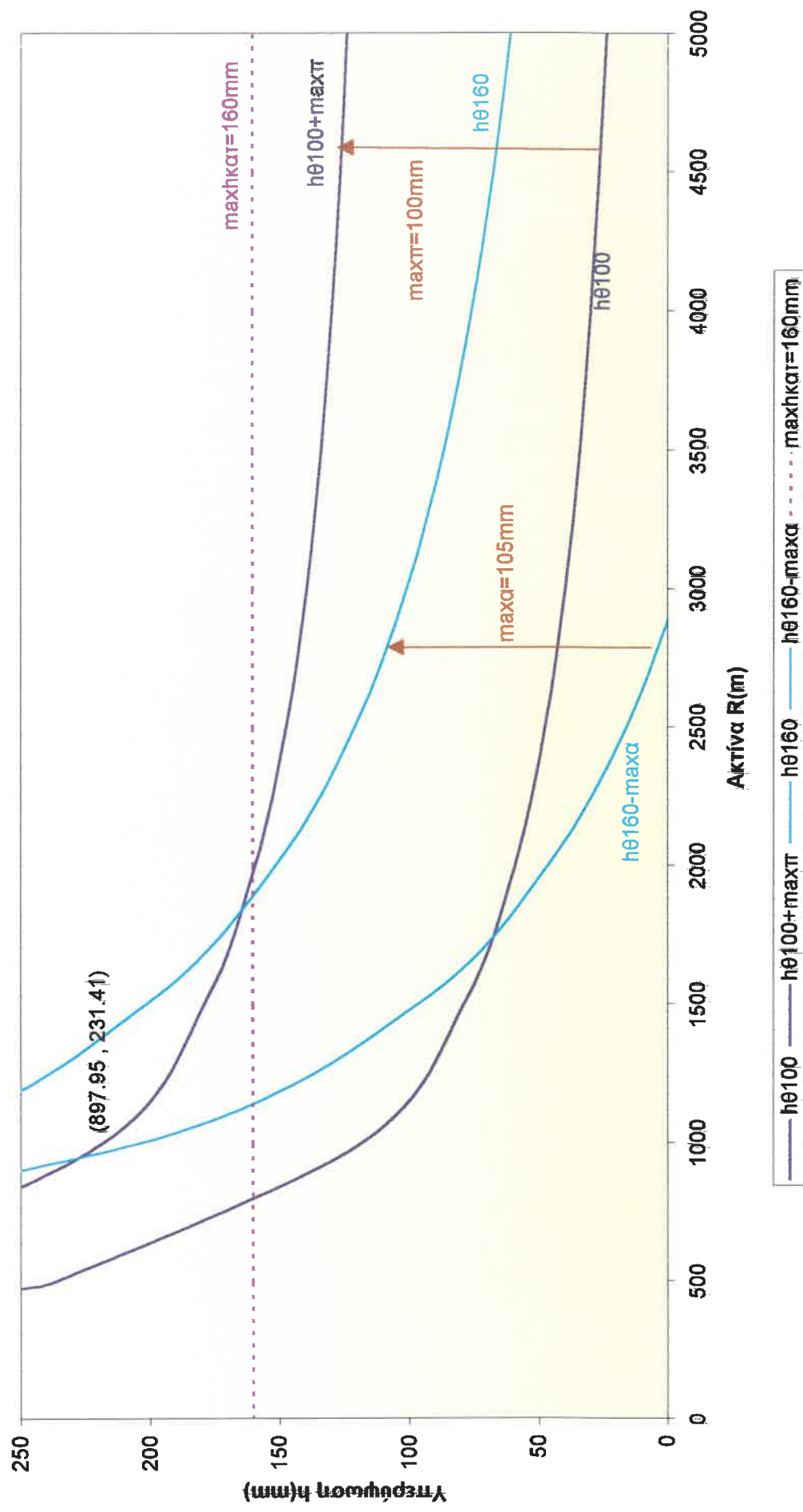
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Πρέπει να σημειωθεί εκ των προτέρων ότι η ανάλυση κατά την παρακάτω σύγκριση είναι καθαρά θεωρητική, με σκοπό να εξετασθεί η εγκυρότητα του τύπου της κανονικής υπερύψωσης. Οι τιμές που δίνονται από τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων, όπως θα δούμε παρακάτω, πολλές φορές δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην πράξη, γιατί υπερβαίνεται η μέγιστη τιμή της κατασκευαστικής υπερύψωσης 160mm. Έτσι αναλυτικά:

1.8.4.1 Σύγκριση διαγραμμάτων 2 (h-K) με $V_{\max}=160\text{km/h}$ [7]

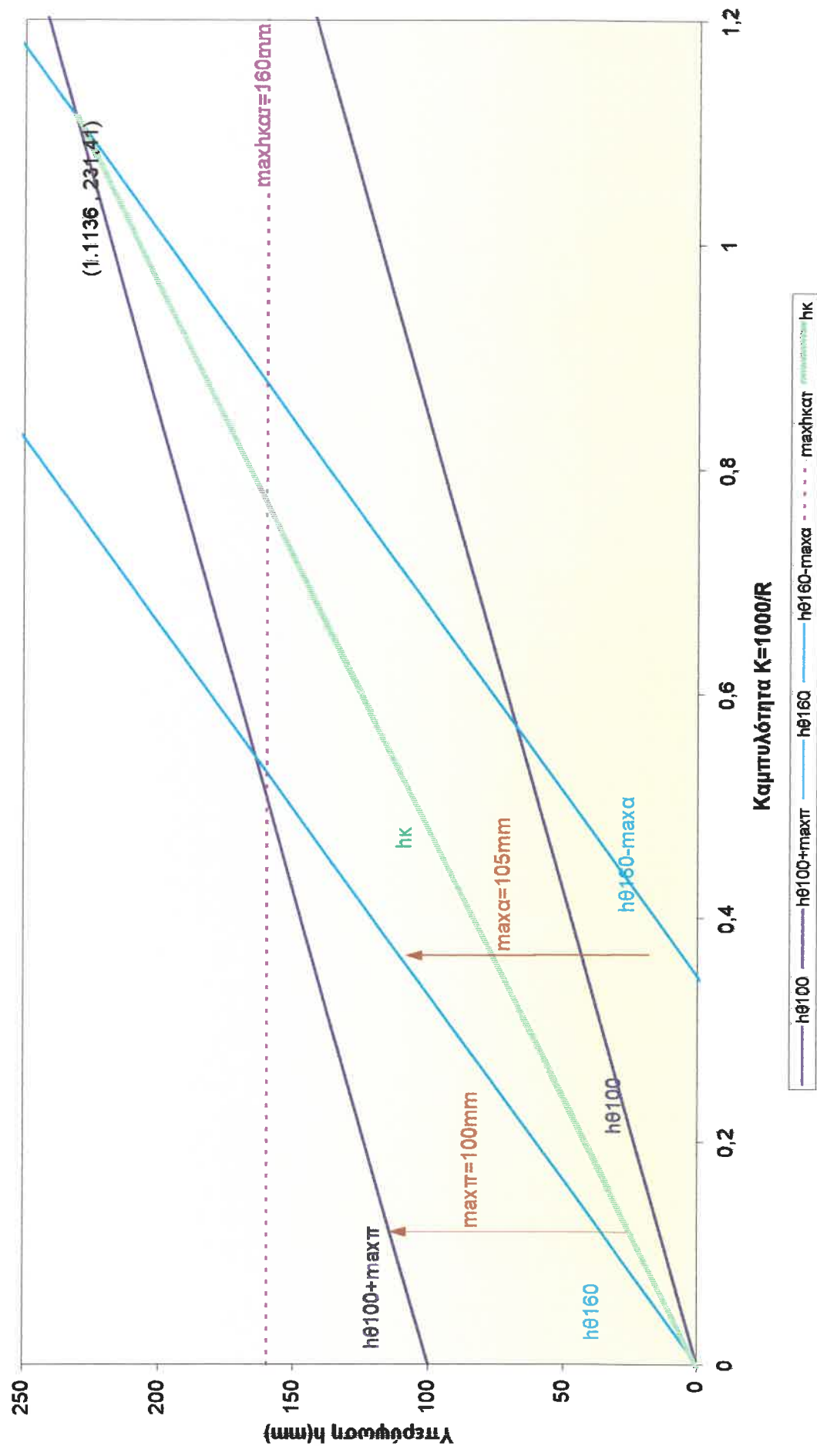
$$\underline{-V_{\max}=160\text{km/h}, V_{\min}=100\text{km/h}}$$

Σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$:

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.1.1 Υπερύψωση για μικτή κυκλοφορία $V_{max}=160\text{km/h}$ και $V_{min}=100\text{km/h}$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.1.2 Καθορισμός της κανονικής υπερύψωσης h_k για μικτή κυκλοφορία $V_{max}=160\text{km/h}$ και $V_{min}=100\text{km/h}$ "



Τετμημένη: $K = \frac{1000}{11.8} * \frac{105 + 100}{160^2 - 100^2} = 1.1136$

Τεταγμένη:

$$\frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K + \max \pi = \frac{11.8}{1000} 100^2 * 1.1136 + 100 = 231.41$$

ή

$$\frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K - \max = \frac{11.8}{1000} 160^2 * 1.1136 - 105 = 231.41$$

Το σημείο (1.1136 , 231.41) επαληθεύεται στην εξίσωση της κανονικής υπερύψωσης

$$(1.8.3.1) \quad h_k = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}} = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 K \quad \text{δηλαδή:}$$

$$h_k = \frac{231.41}{231.41 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 160^2 * 1.1136 = 231.41$$

Ενώ δεν επαληθεύεται στην προσεγγιστική σχέση (1.8.3.2)

$$h_k = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R} \Leftrightarrow h_k = \frac{7.12}{1000} 160^2 * 1.1136 = 202.98$$

Αυτό σημαίνει ότι η σχέση (1.8.3.2) της κανονικής υπερύψωσης είναι προσεγγιστική και επαληθεύεται ακριβώς μόνο από το σημείο εκείνο πάνω στην γραφική παράσταση της h_k όπου η τεταγμένη του είναι ίση με την μέγιστη κατασκευαστική υπερύψωση. Άλλωστε, αυτή η σχέση προέκυψε υπό την παραδοχή ότι $h_{\max} = 160mm$.

Η κλίση της ευθείας h_k είναι:

$$\tan \phi = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 = \frac{231.41}{231.41 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 160^2 = 207.975$$

$$\text{άρα } \phi = \arctan 207.975 = 89.724^\circ$$

Η κλίση της $h_k = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 K$ είναι ως γνωστόν ο συντελεστής που

πολλαπλασιάζει το K , που εδώ έχει το ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής, εξού και

$$\text{παραπάνω } \tan \phi = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2$$

$$-V_{\max}=160\text{km/h}, V_{\min}=80\text{km/h}$$

Σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max a, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$:

Τετμημένη:

$$K = \frac{1000}{11.8} * \frac{105+100}{160^2 - 80^2} = 0.9048$$

Τεταγμένη:

$$\frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K + \max \pi = \frac{11.8}{1000} 80^2 * 0.9048 + 100 = 168.33$$

ή

$$\frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K - \max a = \frac{11.8}{1000} 160^2 * 0.9048 - 105 = 168.33$$

Το σημείο (0.9048 , 168.33) επαληθεύεται στην εξίσωση (1.8.3.1) της κανονικής υπερύψωσης $h_K = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}} = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 K$ δηλαδή:

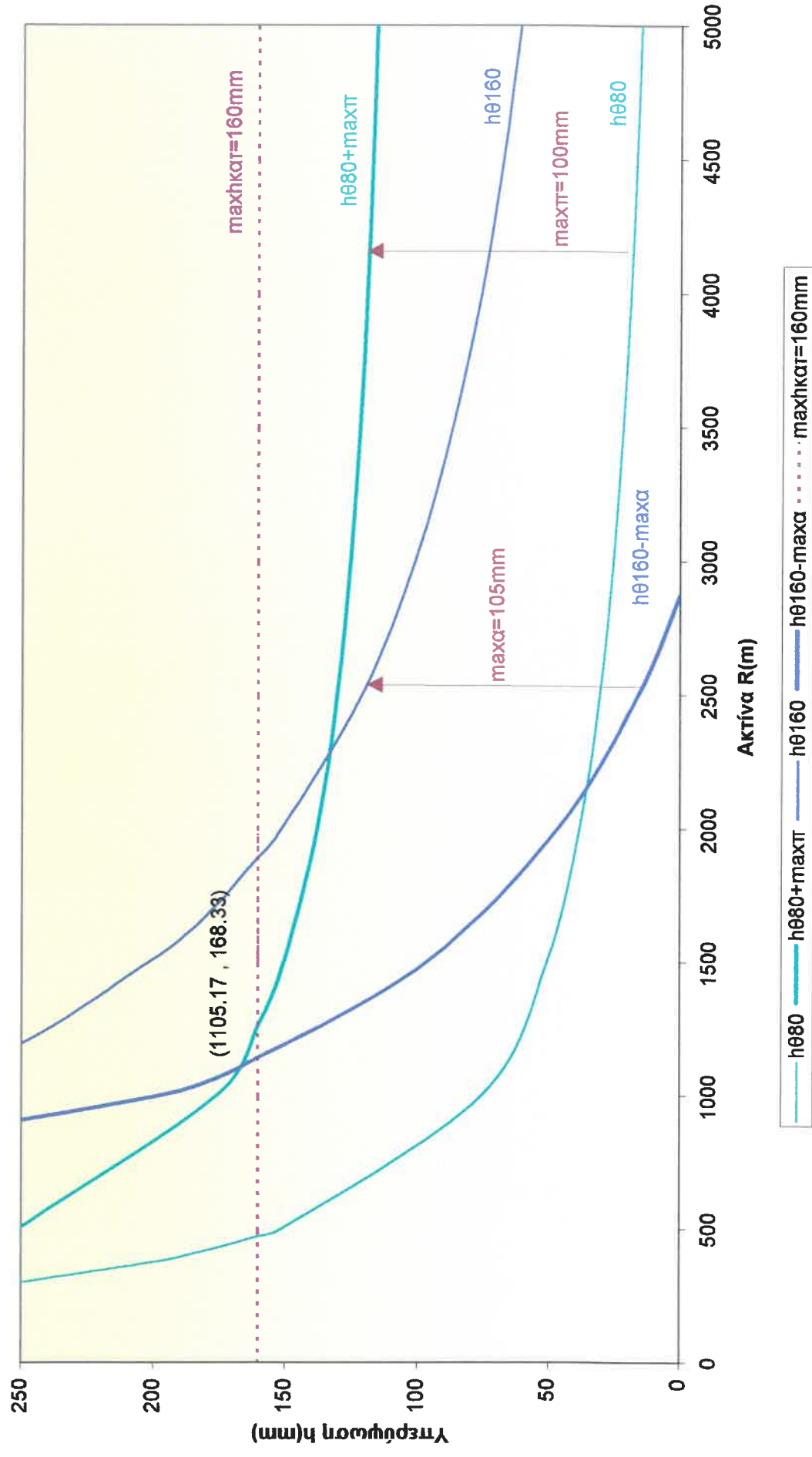
$$h_K = \frac{168.33}{168.33 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 160^2 * 0.9048 = 168.33$$

Η κλίση της ευθείας h_K είναι:

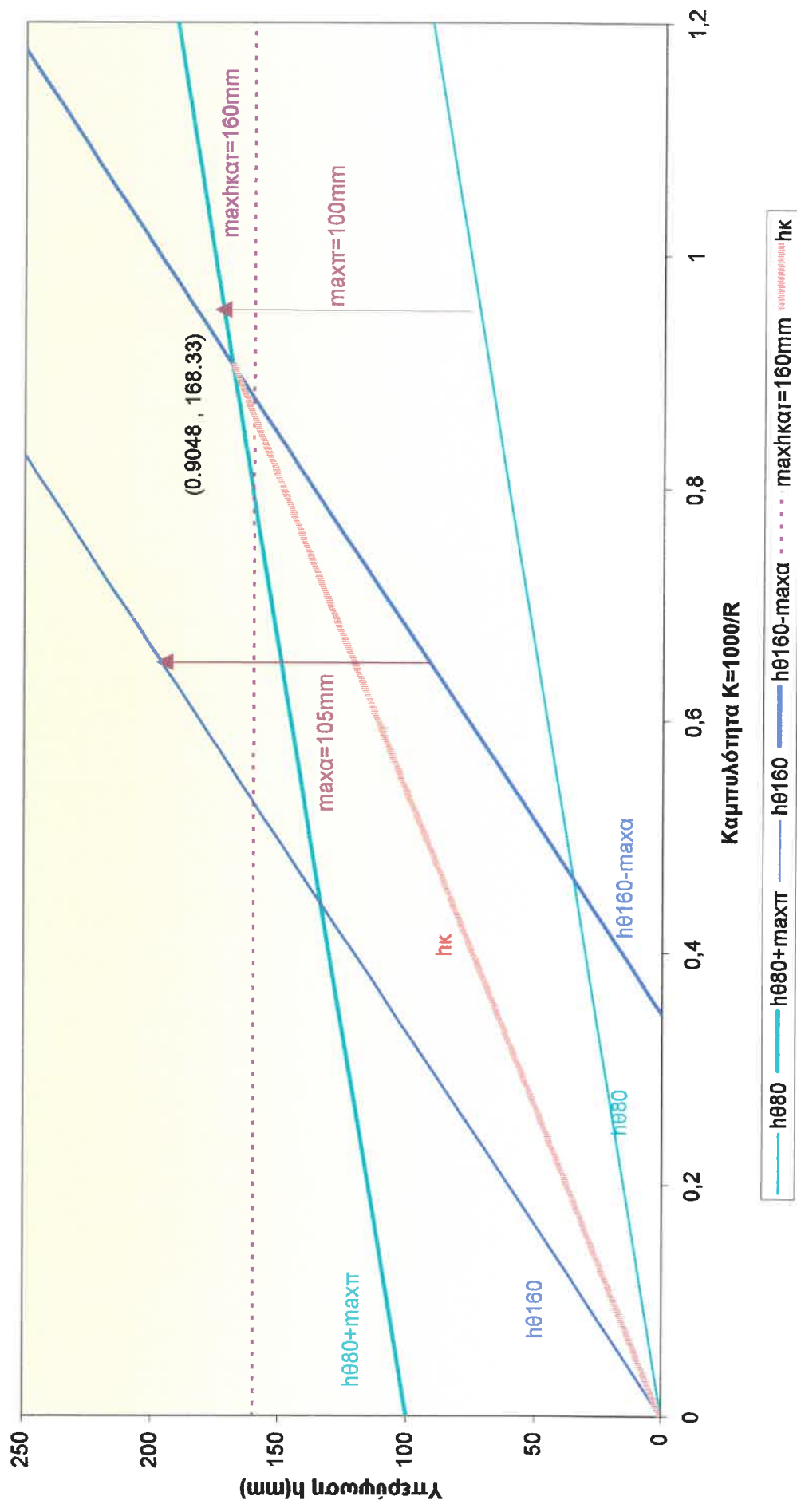
$$\tan \phi = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 = \frac{168.33}{168.33 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 160^2 = 186.035$$

$$\text{άρα } \phi = \arctan 186.035 = 89.692^\circ$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.1.3 Υπερύψωση για μικτή κυκλοφορία $V_{\max}=160\text{km/h}$ και $V_{\min}=80\text{km/h}$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.1.4 Καθορισμός της κανονικής υπέρψωσης h_k για μικτή κυκλοφορία
 $V_{max}=160\text{km/h}$ και $V_{min}=80\text{km/h}$



$$-V_{\max}=160\text{km/h}, V_{\min}=60\text{km/h}$$

Σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max a, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$:

Τετμημένη:

$$K = \frac{1000}{11.8} * \frac{105 + 100}{160^2 - 60^2} = 0.7896$$

εταγμένη:

$$\frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K + \max \pi = \frac{11.8}{1000} 60^2 * 0.7896 + 100 = 133.54$$

ή

$$\frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K - \max a = \frac{11.8}{1000} 160^2 * 0.7896 - 105 = 133.54$$

Το σημείο (0.7896 , 133.54) επαληθεύεται στην εξίσωση (1.8.3.1) της κανονικής υπερύψωσης $h_K = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}} = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 K$ δηλαδή:

$$h_K = \frac{133.54}{133.54 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 160^2 * 0.7896 \cong 133.54$$

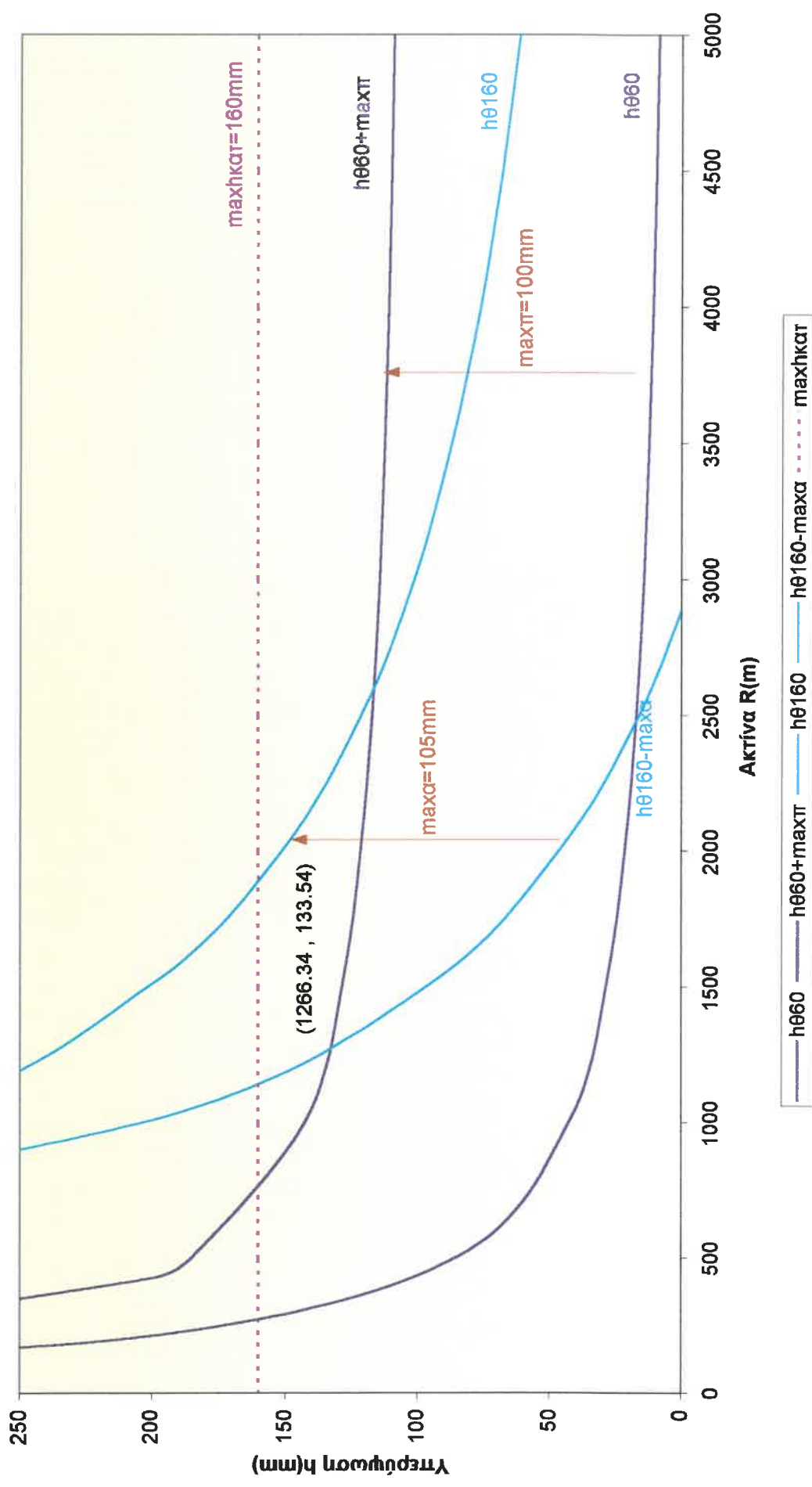
Η κλίση της ευθείας h_K είναι:

$$\tan \phi = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 = \frac{133.54}{133.54 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 160^2 = 169.111$$

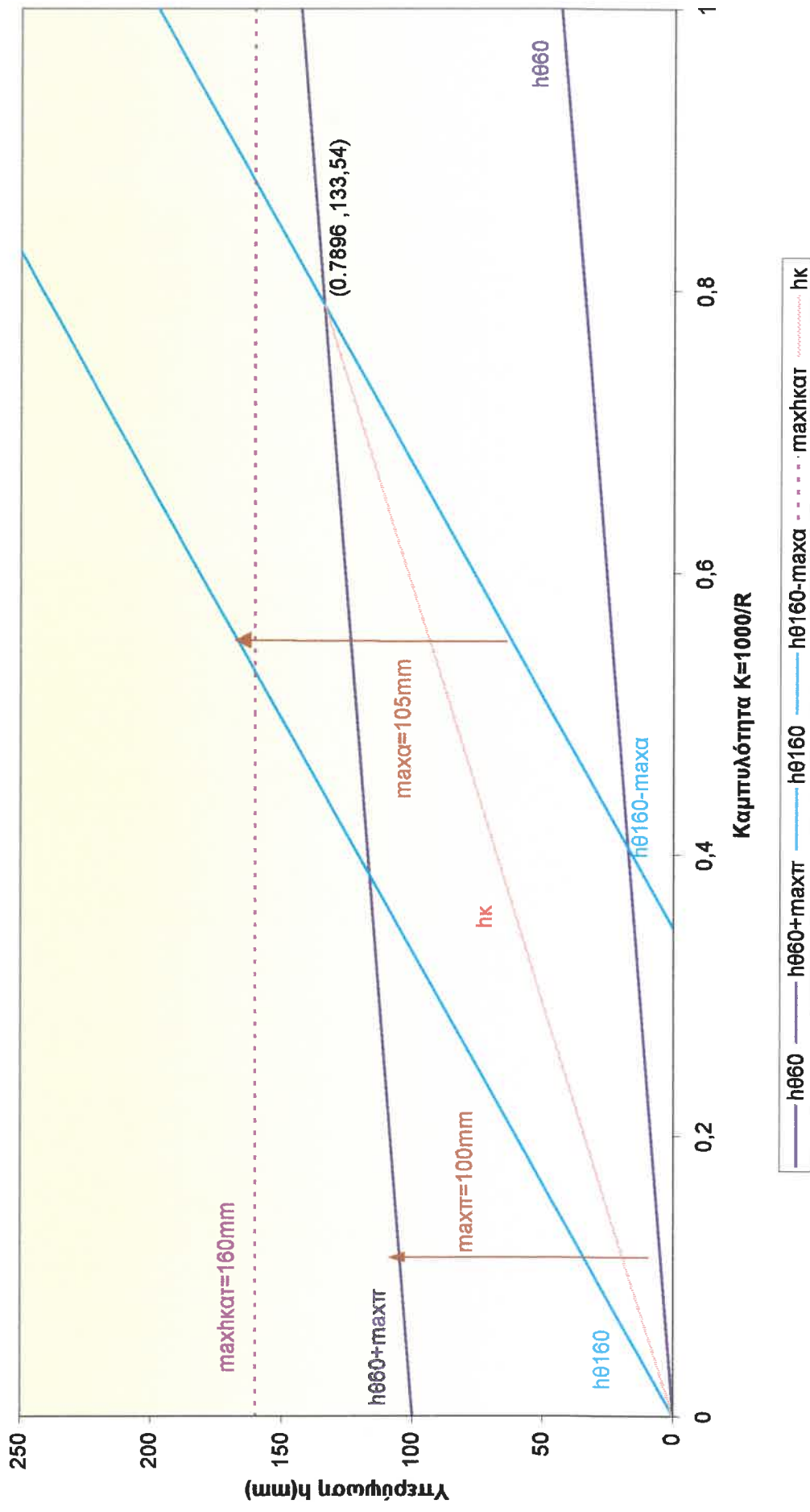
$$\acute{\alpha}\rho\alpha \phi = \arctan 169.111 = 89.66^\circ$$

Συμπέρασμα: από την σύγκριση των τριών γωνιών που είναι περίπου ίσες, προκύπτει το συμπέρασμα ότι πρόκειται για την ίδια ευθεία h_K . Αποδείχθηκε λοιπόν γραφικά ότι για ενιαία $V_{\max}=160\text{km/h}$ προέκυψε ίδια h_K .

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.1.5 Υπερύψωση για μικτή κυκλοφορία $V_{\max}=160\text{km/h}$ και $V_{\min}=60\text{km/h}$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 8.1.4.1.6 Καθορισμός της κανονικής υπέρψωσης h_k για μικτή κυκλοφορία
 $V_{max}=160\text{km/h}$ και $V_{min}=60\text{km/h}$



1.8.4.2 Σύγκριση διαγραμμάτων 2 (h-K) με $V_{\max}=80\text{km/h}$ [7]

$$-V_{\max}=80\text{km/h}, V_{\min}=60\text{km/h}$$

Σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max a, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$:

Τετμημένη:

$$K = \frac{1000}{11.8} * \frac{105+100}{80^2 - 60^2} = 6.2$$

Τεταγμένη:

$$\frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K + \max \pi = \frac{11.8}{1000} 60^2 * 6.2 + 100 = 363.57$$

ή

$$\frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K - \max a = \frac{11.8}{1000} 80^2 * 6.2 - 105 = 363.57$$

Το σημείο (6.2 , 363.57) επαληθεύεται στην εξίσωση (1.8.3.1) της κανονικής υπερύψωσης $h_K = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}} = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 K$ δηλαδή:

$$h_K = \frac{363.57}{363.57+105} \cdot \frac{11.8}{1000} 80^2 * 6.2 \cong 363.57$$

ενώ δεν επαληθεύεται στην προσεγγιστική σχέση (1.8.3.2) της κανονικής υπερύψωσης

$$h_K = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R} \Leftrightarrow h_K = \frac{7.12}{1000} 80^2 * 6.2 = 282.52$$

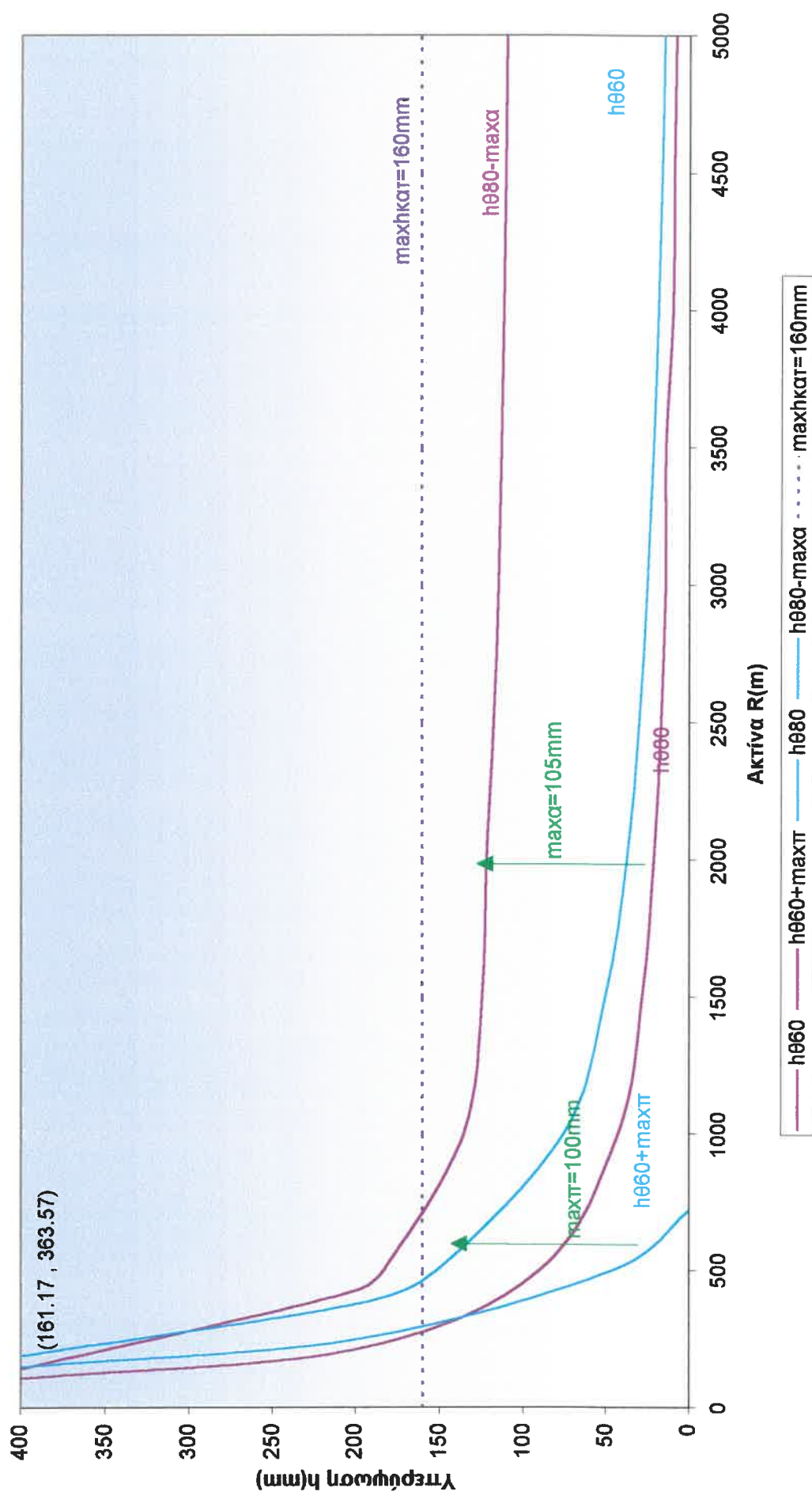
εφόσον πρόκειται για μία προσεγγιστική σχέση και επαληθεύεται ακριβώς μόνο από το σημείο εκείνο πάνω στην γραφική παράσταση της h_K όπου η τεταγμένη του είναι ίση με την μέγιστη κατασκευαστική υπερύψωση. Άλλωστε, αυτή η σχέση προέκυψε υπό την παραδοχή ότι $h_{\max} = 160\text{mm}$.

Η κλίση της ευθείας h_K είναι:

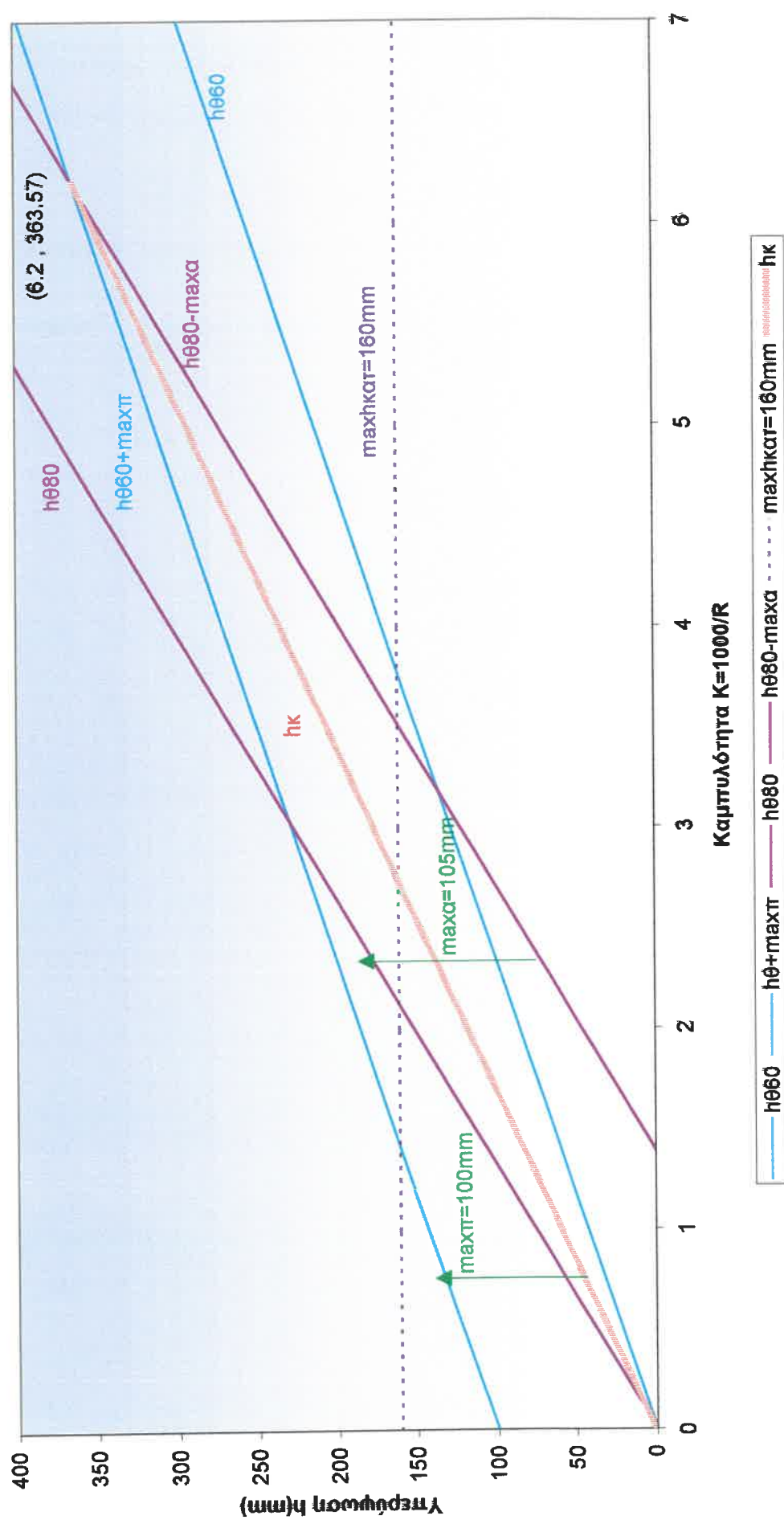
$$\tan \phi = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 = \frac{363.57}{363.57+105} \cdot \frac{11.8}{1000} 80^2 = 58.597$$

$$\text{Άρα } \phi = \arctan 58.597 = 89.022^\circ$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.2.1 Υπερύψωση για μικτή κυκλοφορία $V_{max}=80\text{km/h}$ και $V_{min}=60\text{km/h}$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.2.2 Καθορισμός της κανονικής υπερύψωσης h_k για μικτή κυκλοφορία
 $V_{max}=80\text{km/h}$ και $V_{min}=60\text{km/h}$



$$-V_{\max}=80\text{km/h}, V_{\min}=50\text{km/h}$$

Σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max a, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$:

Τετμημένη:

$$K = \frac{1000}{11.8} * \frac{105 + 100}{80^2 - 50^2} = 4.45$$

Τεταγμένη:

$$\frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K + \max \pi = \frac{11.8}{1000} 50^2 * 4.45 + 100 = 231.41$$

ή

$$\frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K - \max a = \frac{11.8}{1000} 80^2 * 4.45 - 105 = 231.41$$

Το σημείο (4.45 , 231.41) επαληθεύεται στην εξίσωση (1.8.3.1) της κανονικής υπερύψωσης $h_K = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}} = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 K$ δηλαδή:

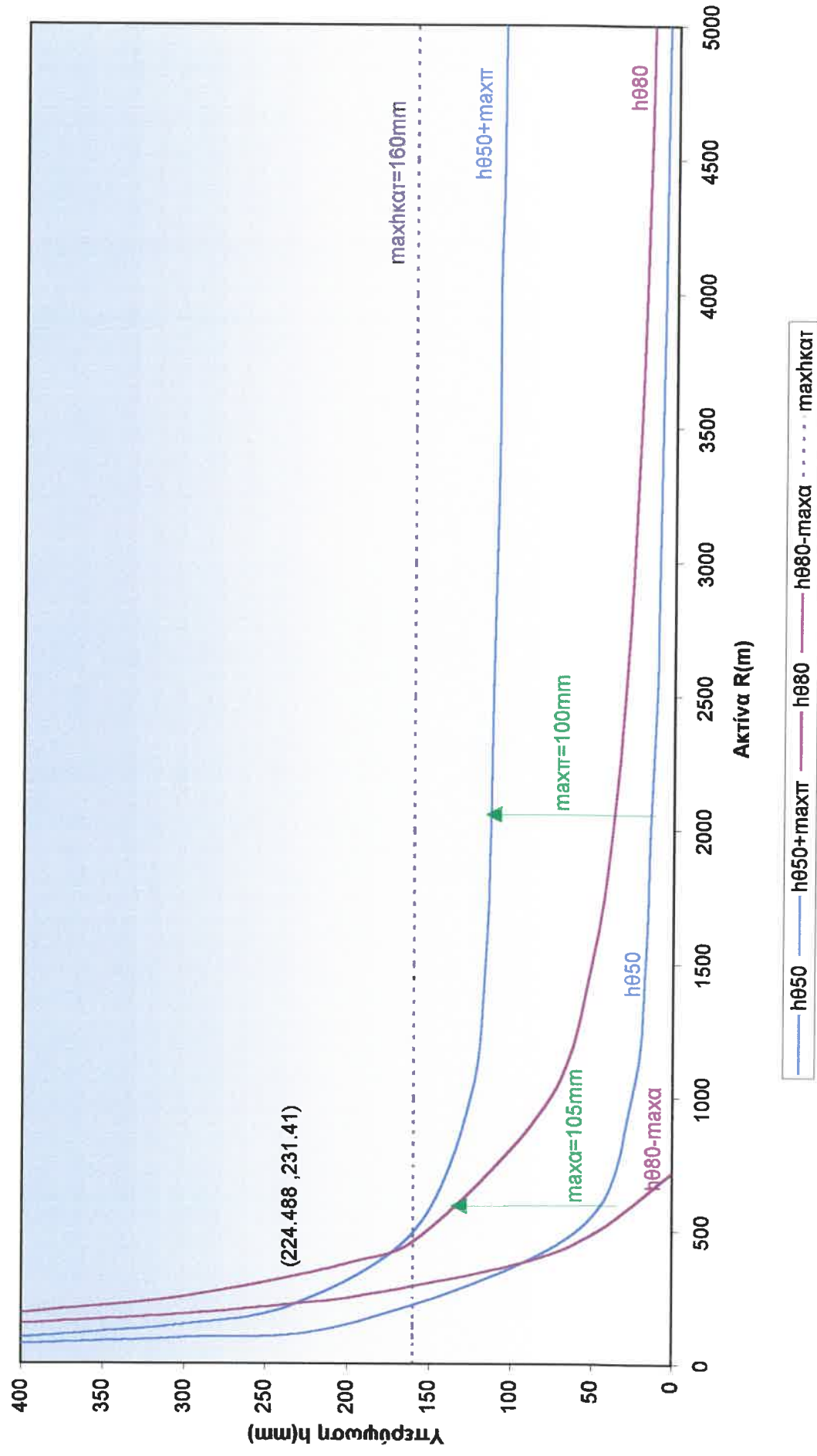
$$h_K = \frac{231.41}{231.41 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 80^2 * 4.45 \cong 231.41$$

Η κλίση της ευθείας h_K είναι:

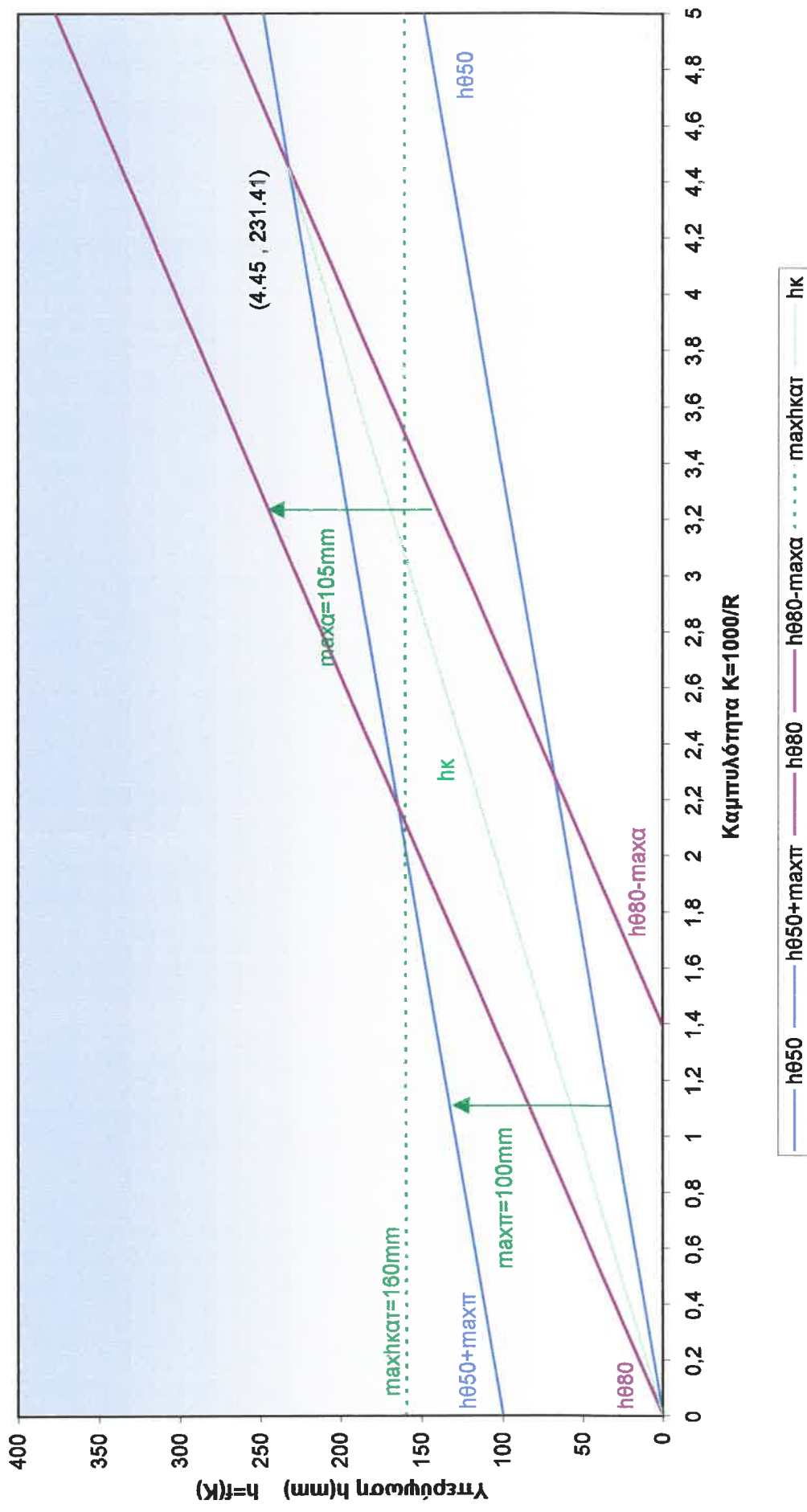
$$\tan \phi = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 = \frac{231.41}{231.41 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 80^2 = 51.948$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \phi = \arctan 51.948 = 88.89^\circ$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.2.3 Υπερύψωση για μικτή κυκλοφορία $V_{max}=80\text{km/h}$ και $V_{min}=50\text{km/h}$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.2.4 Καθορισμός της κανονικής υπέρψωσης h_k για μικτή κυκλοφορία
 $V_{max}=80\text{km/h}$ και $V_{min}=50\text{km/h}$



$$-V_{\max}=80\text{km/h}, V_{\min}=40\text{km/h}$$

Σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max a, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$:

Τετμημένη:

$$K = \frac{1000}{11.8} * \frac{105 + 100}{80^2 - 40^2} = 3.619$$

Τεταγμένη:

$$\frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K + \max \pi = \frac{11.8}{1000} 40^2 * 3.619 + 100 = 168.333$$

ή

$$\frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K - \max = \frac{11.8}{1000} 80^2 * 3.619 - 105 = 168.333$$

Το σημείο (3.619 , 168.333) επαληθεύεται στην εξίσωση (1.8.3.1) της κανονικής υπερύψωσης $h_K = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}} = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 K$ δηλαδή:

$$h_K = \frac{168.333}{168.333 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 80^2 * 3.619 \cong 168.333$$

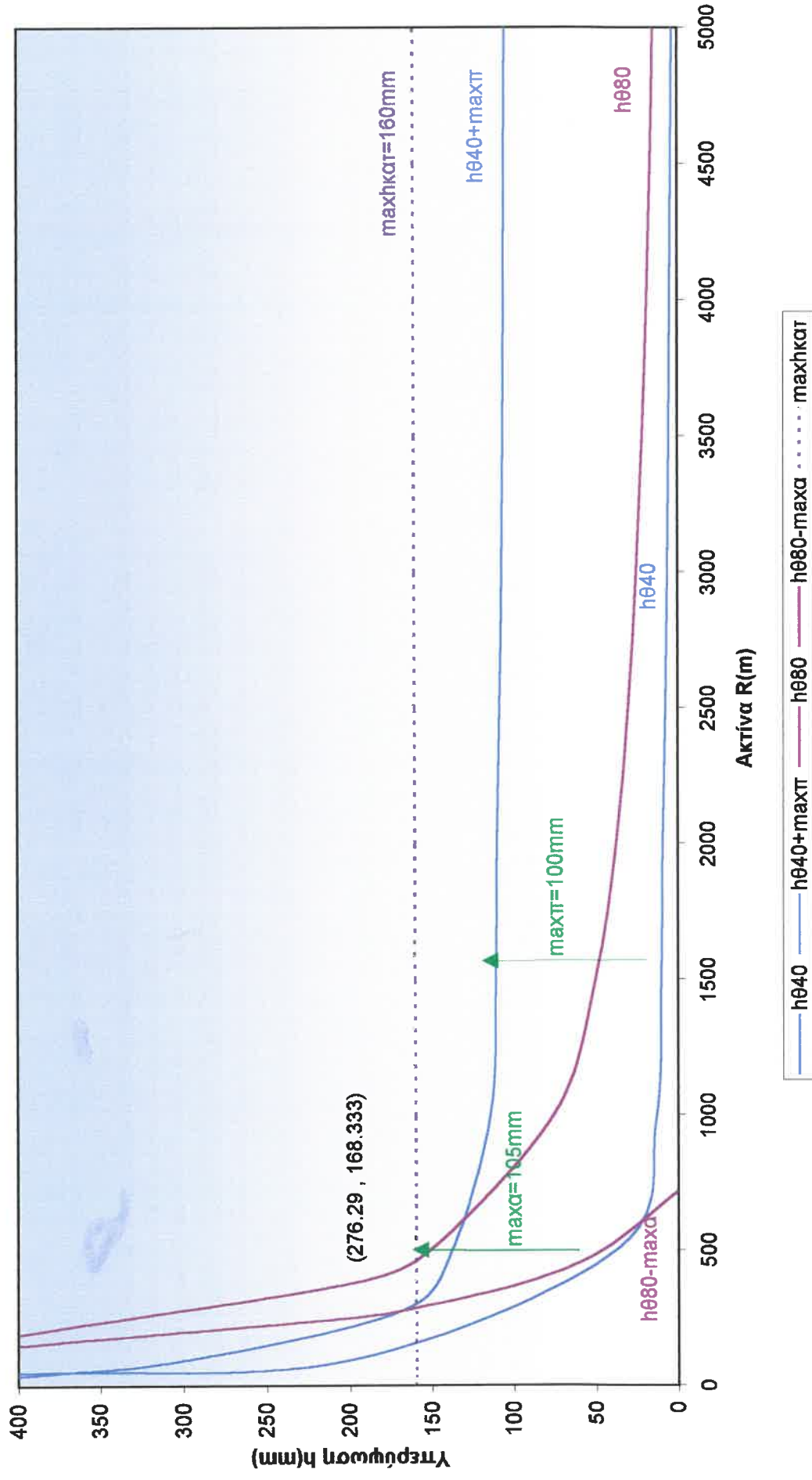
Η κλίση της ευθείας h_K είναι:

$$\tan \phi = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 = \frac{168.333}{168.333 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 80^2 = 46.509$$

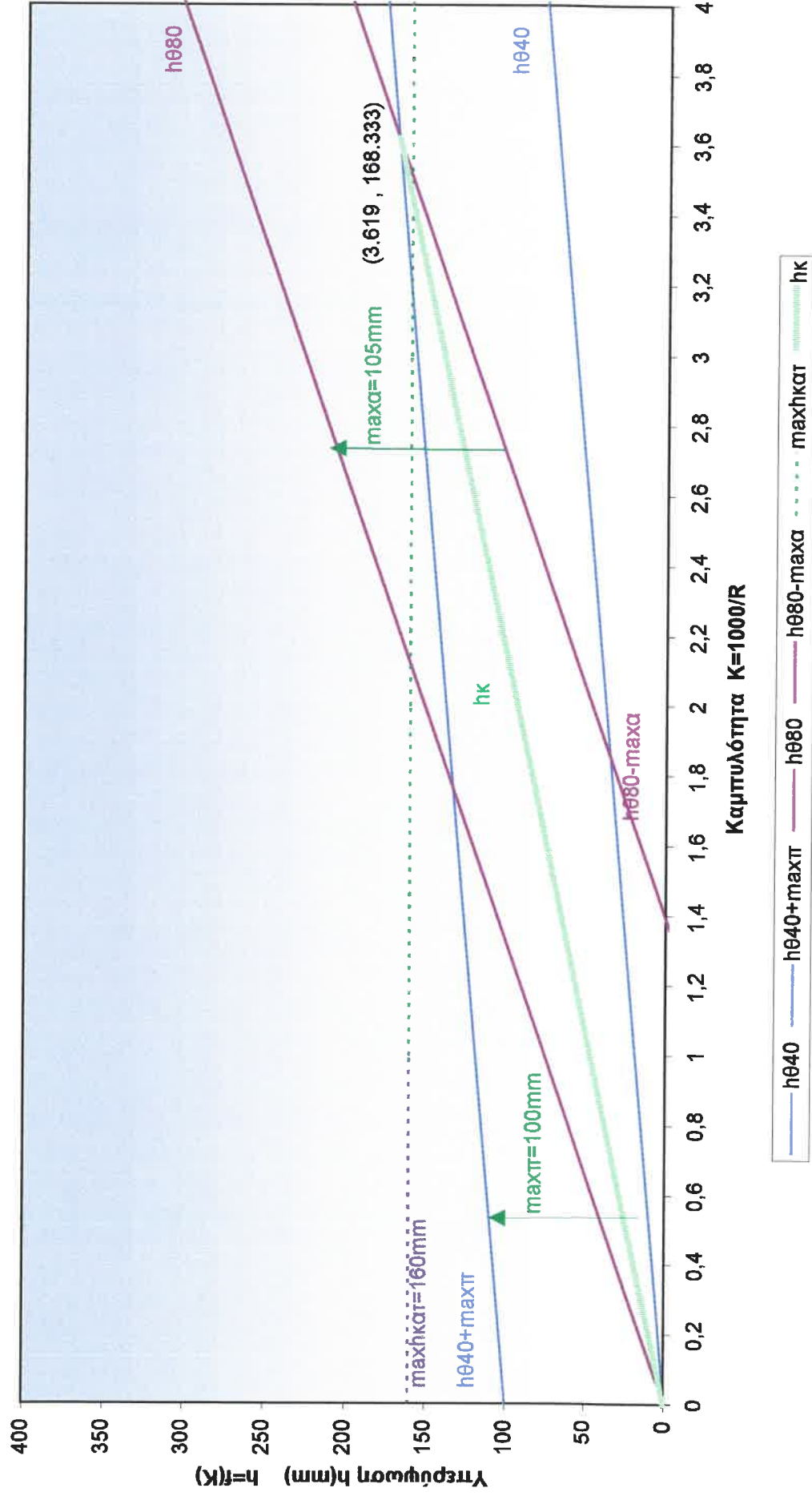
$$\acute{\alpha}\rho\alpha \phi = \arctan 46.509 = 88.77^\circ$$

Συμπέρασμα: από την σύγκριση των τριών γωνιών που είναι περίπου ίσες, προκύπτει το συμπέρασμα ότι πρόκειται για την ίδια ευθεία h_K . Αποδείχθηκε λοιπόν γραφικά ότι για ενιαία $V_{\max}=80\text{km/h}$ προέκυψε ίδια h_K .

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.2.5 Υπερύψωση για μικτή κυκλοφορία $V_{max}=80\text{km/h}$ και $V_{min}=40\text{km/h}$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.2.6 Καθορισμός της κανονικής υπέρψωσης h_k για μικτή κυκλοφορία
 $V_{max}=80\text{km/h}$ και $V_{min}=40\text{km/h}$



1.8.4.3 Σύγκριση διαγραμμάτων 2 (h-K) με $V_{\max}=120\text{km/h}$ [7]

$$-V_{\max}=120\text{km/h}, V_{\min}=70\text{km/h}$$

Σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max a, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$:

Τετμημένη:

$$K = \frac{1000}{11.8} * \frac{105+100}{120^2 - 70^2} = 1.82$$

Τεταγμένη:

$$\frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K + \max \pi = \frac{11.8}{1000} 70^2 * 1.82 + 100 = 205.74$$

ή

$$\frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K - \max a = \frac{11.8}{1000} 120^2 * 1.82 - 105 = 205.74$$

Το σημείο (1.82 , 205.74) επαληθεύεται στην εξίσωση (1.8.3.1) της κανονικής υπερύψωσης $h_K = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}} = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 K$ δηλαδή:

$$h_K = \frac{205.74}{205.74 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 120^2 * 1.82 \cong 205.74$$

ενώ δεν επαληθεύεται στην προσεγγιστική σχέση (1.8.3.2) της κανονικής υπερύψωσης

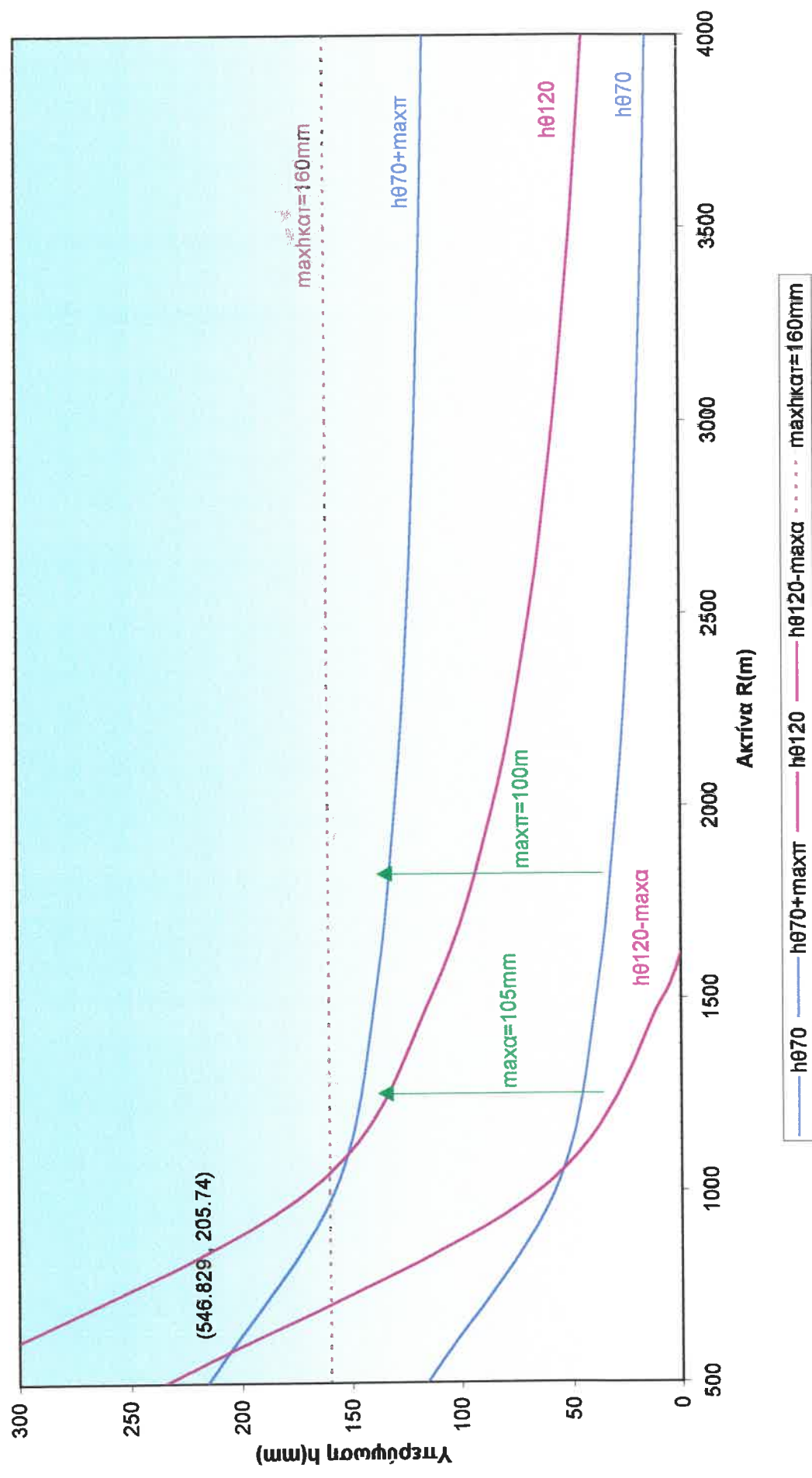
$$h_K = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R} \Leftrightarrow h_K = \frac{7.12}{1000} 120^2 * 1.82 = 186.60.$$

Η κλίση της ευθείας h_K είναι:

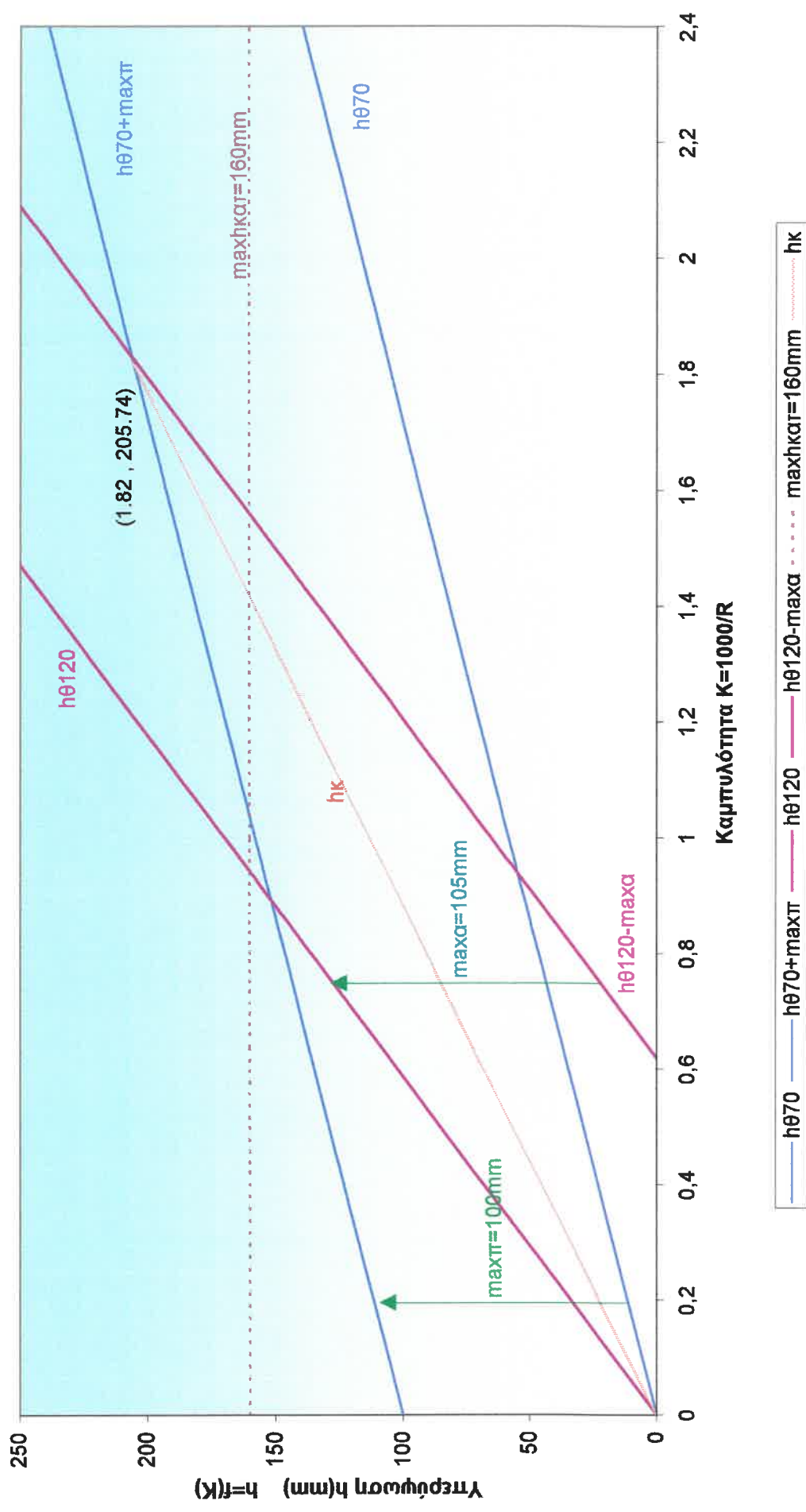
$$\tan \phi = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 = \frac{205.74}{205.74 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 120^2 = 112.503$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \phi = \arctan 112.503 = 89.49^\circ$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.3.1 Υπερύψωση για μικτή κυκλοφορία $V_{max}=120\text{km/h}$ και $V_{min}=70\text{km/h}$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.3.2 Καθορισμός της κανονικής υπέρυψωσης h_k για μικτή κυκλοφορία
 $V_{max}=120\text{km/h}$ και $V_{min}=70\text{km/h}$



$$-V_{\max}=120\text{km/h}, V_{\min}=80\text{km/h}$$

Σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max a, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$:

Τετμημένη:

$$K = \frac{1000}{11.8} \cdot \frac{105 + 100}{120^2 - 80^2} = 2.17$$

Τεταγμένη:

$$\frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K + \max \pi = \frac{11.8}{1000} 80^2 \cdot 2.17 + 100 = 263.99$$

ή

$$\frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K - \max a = \frac{11.8}{1000} 120^2 \cdot 2.17 - 105 = 263.99$$

Το σημείο (2.17 , 263.99) επαληθεύεται στην εξίσωση (1.8.3.1) της κανονικής υπερύψωσης $h_K = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}} = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 K$ δηλαδή:

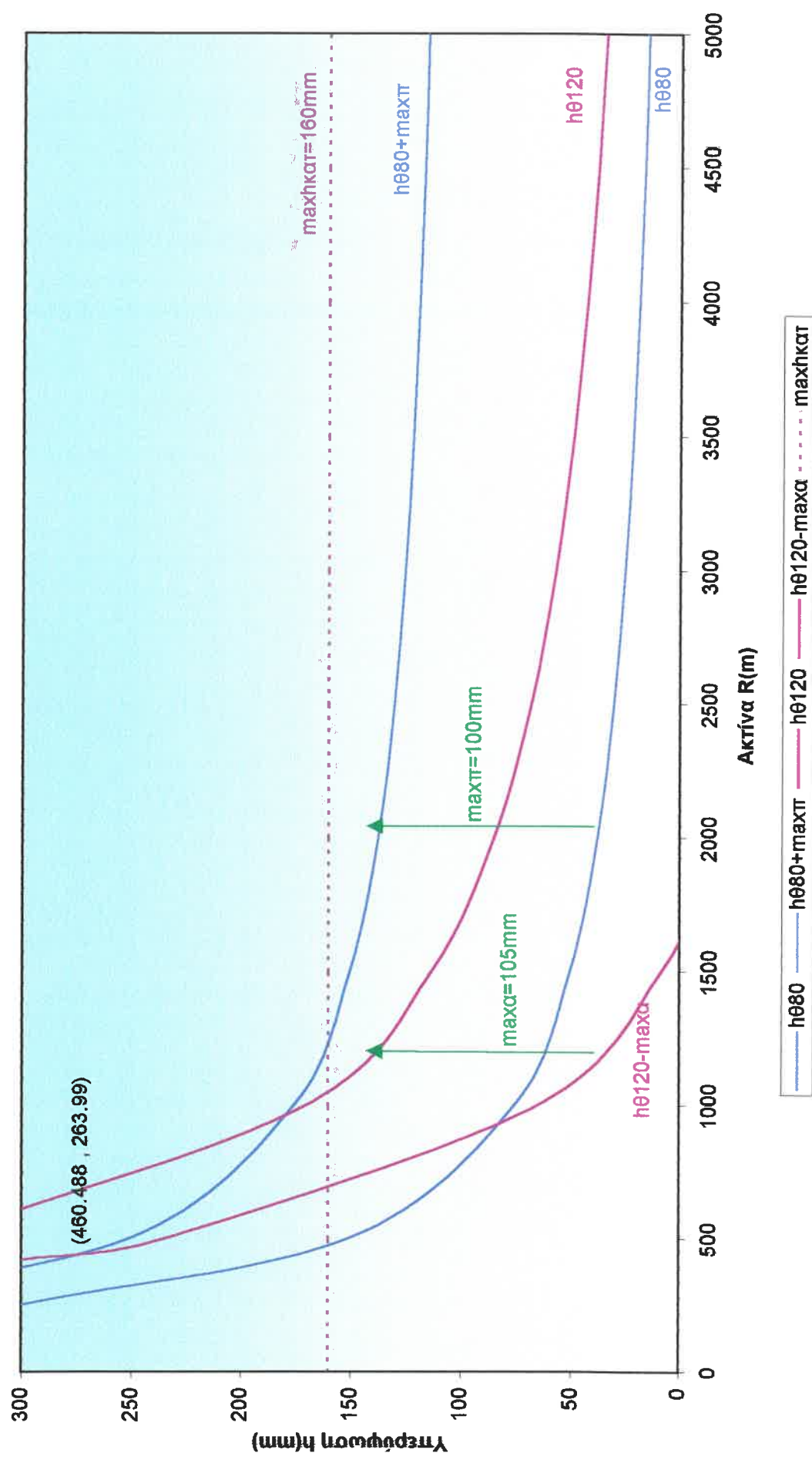
$$h_K = \frac{263.99}{263.99 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 120^2 \cdot 2.17 \cong 263.99$$

Η κλίση της ευθείας h_K είναι:

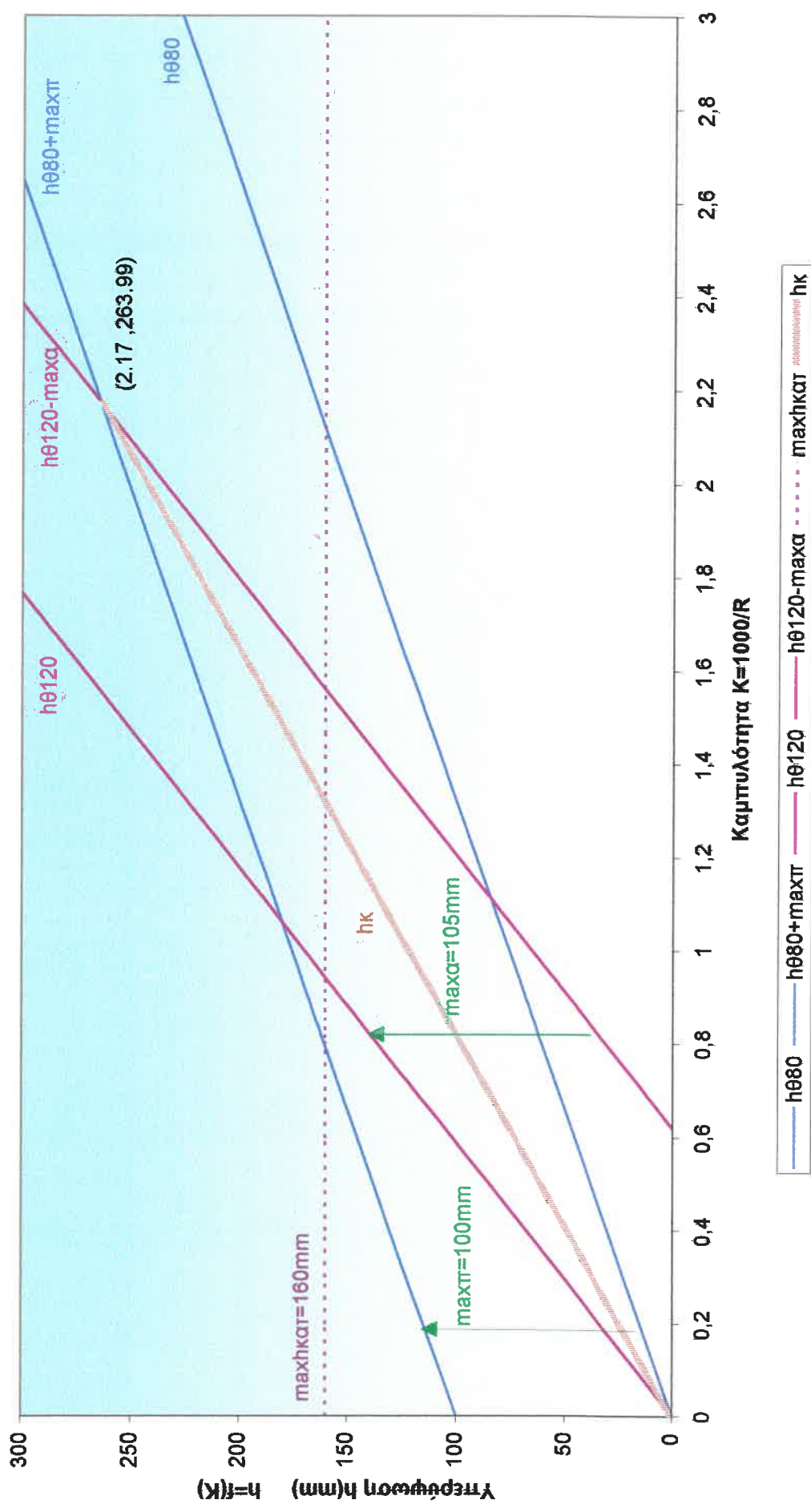
$$\tan \phi = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 = \frac{263.99}{263.99 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 120^2 = 121.567$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \phi = \arctan 121.567 = 89.53^\circ$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.3.3 Υπερύψωση για μικτή κυκλοφορία $V_{max}=120\text{km/h}$ και $V_{min}=80\text{km/h}$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.3.4 Καθορισμός της κανονικής υπέρψωσης h_k για μικτή κυκλοφορία $V_{max}=120\text{km/h}$ και $V_{min}=80\text{km/h}$



$$-V_{\max}=120\text{km/h}, V_{\min}=60\text{km/h}$$

Σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max a, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$:

Τετμημένη:

$$K = \frac{1000}{11.8} * \frac{105 + 100}{120^2 - 60^2} = 1.6086$$

Τεταγμένη:

$$\frac{11.8}{1000} V_{\min}^2 \cdot K + \max \pi = \frac{11.8}{1000} 60^2 * 1.6086 + 100 = 168.333$$

ή

$$\frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 \cdot K - \max = \frac{11.8}{1000} 120^2 * 1.6086 - 105 = 168.333$$

Το σημείο (1.6086 , 168.333) επαληθεύεται στην εξίσωση (1.8.3.1) της κανονικής υπερύψωσης $h_K = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}} = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 K$ δηλαδή:

$$h_K = \frac{168.333}{168.333 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 120^2 * 1.6086 \cong 168.333$$

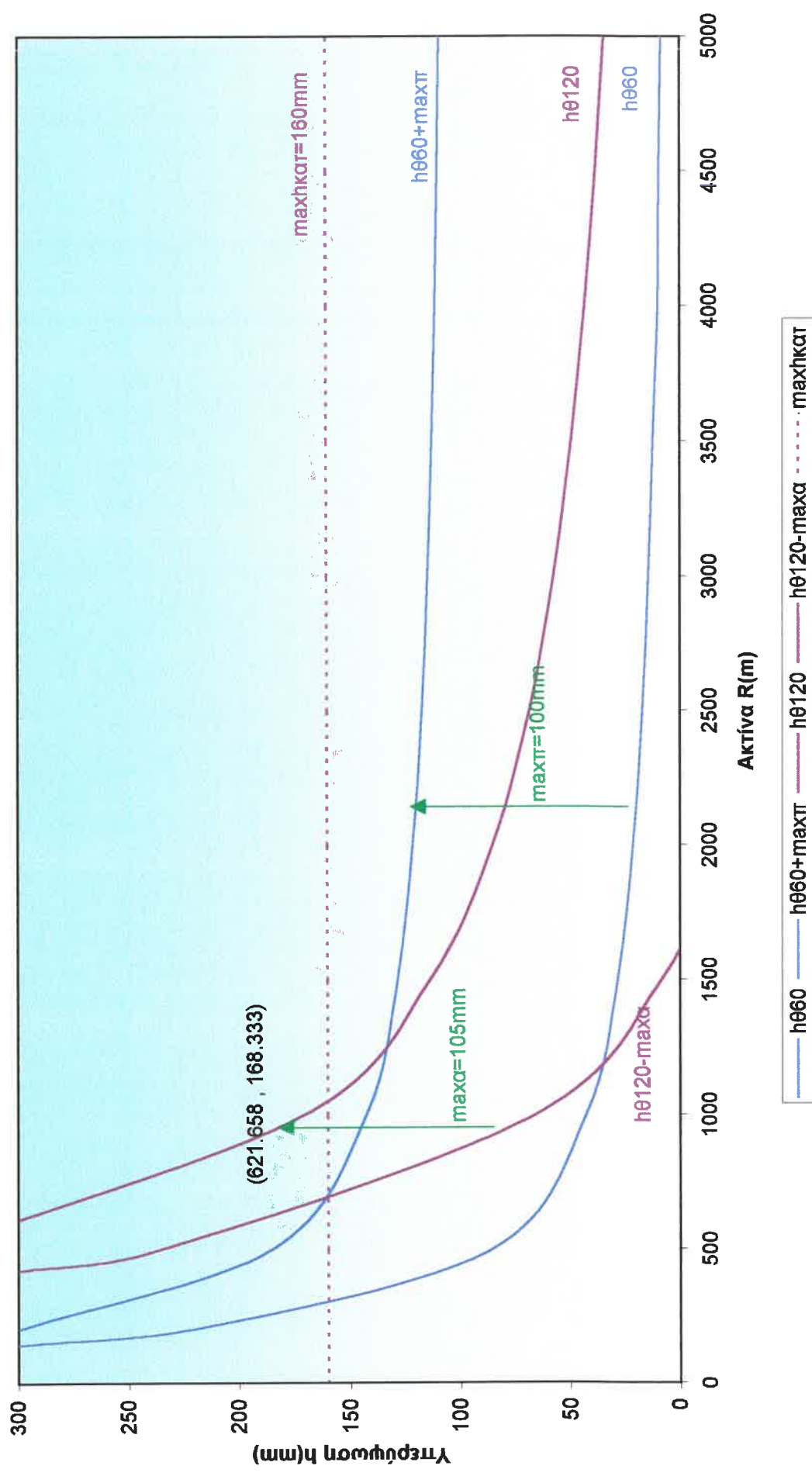
Η κλίση της ευθείας h_K είναι:

$$\tan \phi = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot \frac{11.8}{1000} V_{\max}^2 = \frac{168.333}{168.333 + 105} \cdot \frac{11.8}{1000} 120^2 = 104.645$$

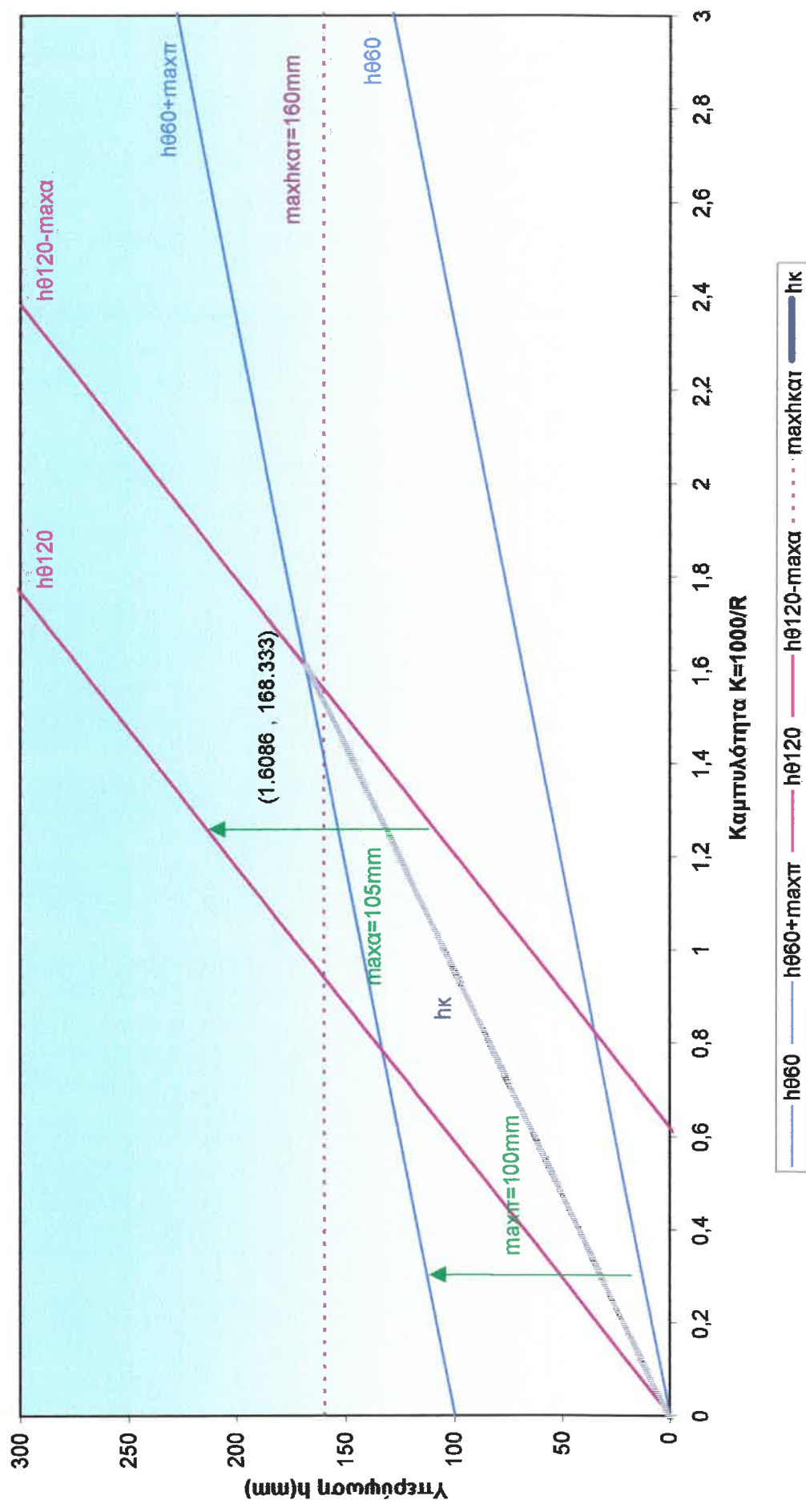
$$\text{άρα } \phi = \arctan 104.645 = 89.45^\circ.$$

Συμπέρασμα: από την σύγκριση των τριών γωνιών που είναι περίπου ίσες, προκύπτει το συμπέρασμα ότι πρόκειται για την ίδια ευθεία h_K . Αποδείχθηκε λοιπόν γραφικά ότι για ενιαία $V_{\max}=120\text{km/h}$ προέκυψε ίδια h_K .

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.3.5 Υπερύψωση για μικτή κυκλοφορία $V_{max}=120\text{km/h}$ και $V_{min}=60\text{km/h}$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1.8.4.3.6 Καθορισμός της κανονικής υπερύψωσης για μικτή κυκλοφορία
 $V_{max}=120\text{km/h}$ και $V_{min}=60\text{km/h}$



1.9 Υπολογίστηκε στην παράγραφο 1.8.3 την υπερύψωση που εφαρμόζεται τελικά σε καμπύλη ακτίνας R που χρησιμοποιείται από συρμούς με φάσμα ταχυτήτων $V_{\min}$ έως $V_{\max}$. Ονομάζεται κανονική υπερύψωση και δίνεται από τις σχέσεις (1.8.3.1) και (1.8.3.2). Με βάση τις σχέσεις αυτές υπολογίζονται οι τιμές της ανεπάρκειας και του πλεονάσματος της υπερύψωσης.

Η ανεπάρκεια της υπερύψωσης κατά την διέλευση του ταχύτερου οχήματος θα είναι επομένως:

$$a_{V_{\max}} = h_{\theta}^{V_{\max}} - h_K = h_{\theta}^{V_{\max}} - \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} h_{\theta}^{V_{\max}} = h_{\theta}^{V_{\max}} \left(1 - \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \right) = h_{\theta}^{V_{\max}} \left(\frac{h_{\max} + \max a - h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{V_{\max}} = \frac{\max a}{h_{\max} + \max a} h_{\theta}^{V_{\max}} \dots \dots \dots (1.9.1)$$

$$h_{\max} = 160mm, \max a = 105mm \xrightarrow{(1.9.1)} a_{V_{\max}} = \frac{105}{160+105} \cdot 11.8 \frac{V_{\max}^2}{R} = \frac{105}{265} \cdot 11.8 \frac{V_{\max}^2}{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{V_{\max}} = 4.675 \frac{V_{\max}^2}{R} \dots \dots \dots (1.9.2)$$

Αντίστοιχα, το πλεόνασμα της υπερύψωσης κατά την διέλευση του βραδύτερου συρμού, θα είναι:

$$\pi = h_K - h_{\theta}^{V_{\min}} = \frac{h_{\max}}{h_{\max} + \max a} \cdot 11.8 \frac{V_{\max}^2}{R} - 11.8 \frac{V_{\min}^2}{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi = \frac{1}{R} \left[11.8 \frac{V_{\max}^2 \cdot h_{\max}}{h_{\max} + \max a} - 11.8 V_{\min}^2 \right] \dots \dots \dots (1.9.3)$$

2. Οι Αμερικάνικοι κανονισμοί για την υπερύψωση

Κατά την διέλευσή του από μια καμπύλη ένα τρένο υποβάλλεται στην φυγόκεντρη δύναμη F_c που δρα ακτινικά προς τα έξω με τιμή [5]

$$F_c = \frac{w}{g} \cdot v^2 R \quad \text{όπου } w: \text{ βάρος του οχήματος σε pounds}$$

v : ταχύτητα του οχήματος σε ft/sec

R : ακτίνα της καμπύλης σε ft

g : επιτάχυνση της βαρύτητας σε ft/sec²

$$(g = 9.81 m/sec^2 = 9.81 \times 3.28 ft/sec^2)$$

Σημείωση: Έχουν διατηρηθεί για την υπερύψωση και για τα υπόλοιπα μεγέθη διαφορετικές μεταβλητές (π.χ. η υπερύψωση ονομάζεται e), λόγω των διαφορετικών μονάδων μέτρησης που χρησιμοποιούνται στο αμερικάνικο εγχειρίδιο.

Για να εξισορροπηθεί η επίδραση της F_c η εξωτερική σιδηροτροχιά ανυψώνεται ή «υπερυψώνεται» κατά υπερύψωση e σε σχέση με την εσωτερική σιδηροτροχιά. Επιτυγχάνεται τότε ισορροπία και οι δύο τροχοί φορτίζουν με το ίδιο φορτίο τις δύο σιδηροτροχιές, ενώ η υπερύψωση e έχει ως αποτέλεσμα η συνισταμένη F_r να είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν οι κεφαλές των δύο σιδηροτροχιών.

Από τα όμοια τρίγωνα του σχήματος 2.1 προκύπτει:

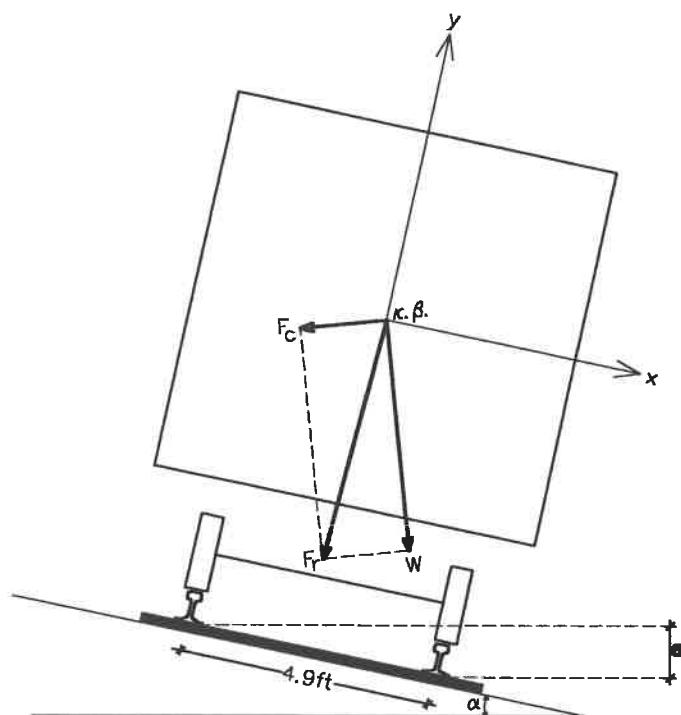
$$\frac{e}{F_c} = \frac{4.9}{W} \Leftrightarrow e = 4.9 \frac{w v^2}{g W R} \dots \dots \dots (2.1) \quad w \text{ βάρος σε pounds}$$

W βάρος σε tons

v ταχύτητα σε ft/sec

e υπερύψωση σε inches

Σημείωση: Εδώ πρέπει να διευκρινιστεί ότι η αμερικάνικη πρακτική περιγραφής των καμπύλων, η οποία επηρεάζει και την θεωρία των υπερυψώσεων, διαφέρει από την ευρωπαϊκή στο ότι συνηθίζεται να περιγράφεται μία καμπύλη από την επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί σε τόξο της καμπύλης ίσο με 100ft.



Σχήμα 2.1

Ισορροπία σιδηροδρομικού οχήματος σε γραμμή με υπερυψωμένη σιδηροτροχιά

Πηγή [5] σελ. 603

F_c : φυγόκεντρος δύναμη

W : βάρος οχήματος

F_r : συνισταμένη βάρους και φυγόκεντρου δύναμης

α : γωνία που σχηματίζει το κεκλιμένο επίπεδο των κεφαλών των σιδηροτροχιών με το οριζόντιο επίπεδο

4,9ft: απόσταση σιδηροτροχιών

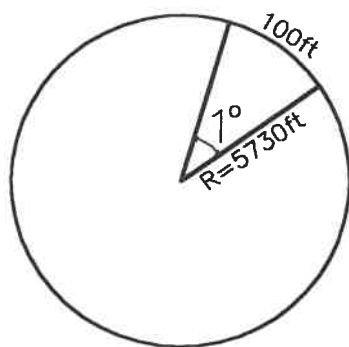
e : υπερύψωση εξωτερικής σιδηροτροχιάς σε inches

Λόγω του ότι η παραπάνω πρακτική υπεισέρχεται στον υπολογισμό του τύπου της θεωρητικής υπερύψωσης, θα αναλυθεί περεταίρω:

Θεωρείται ότι η περιφέρεια του κύκλου που απεικονίζεται στο σχήμα 2.2 χωρίζεται σε 360 τόξα με μήκος 100ft το καθένα. Τότε, καθένα από αυτά θα αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 1° , ενώ το μήκος της περιφέρειας του κύκλου θα είναι $360 \cdot 100\text{ft} = 36000\text{ft}$ και θα ισχύει

$$2\pi R = 36000\text{ft} \Leftrightarrow R = \frac{36000}{6.28} \Leftrightarrow R = 5730\text{ft}$$

Θα είναι δηλαδή ένας κύκλος με ακτίνα 5730ft και περιφέρεια 36000ft.

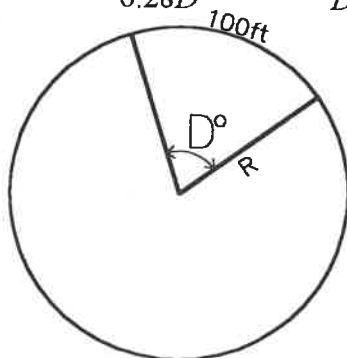


Σχήμα 2.2

Κύκλος ακτίνας 5730ft

Έστω τώρα ένας άλλος κύκλος στο σχήμα 2.3 του οποίου η περιφέρεια χωρίζεται σε n τόξα με μήκος 100ft, από τα οποία καθένα αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία D° . Ο αριθμός των τόξων είναι $n = 360^\circ / D^\circ = 360/D$ άρα και το μήκος της περιφέρειας θα είναι $\frac{360}{D} \cdot 100\text{ft}$ ενώ όπως και πριν θα ισχύει

$$2\pi R = \frac{360}{D} \cdot 100\text{ft} \Leftrightarrow R = \frac{36000}{2\pi D} \Leftrightarrow R = \frac{36000}{6.28D} \Leftrightarrow R = \frac{5730}{D}$$



Σχήμα 2.3

Κύκλος ακτίνας R (ft)

Έτσι για να μετατραπούν οι μοίρες γωνίες σε μέτρα μήκους ακτίνας θα πρέπει:

-να διαιρεθεί το 5730 με τις μοίρες της γωνίας ώστε να προκύψει μήκος ακτίνας σε ft

-να διαιρεθεί το 1746 με τις μοίρες της γωνίας ώστε να προκύψει μήκος ακτίνας σε m (γιατί $5730/3,28=1746$).

Στην προηγούμενη εξίσωση $e = 4.9 \frac{wu^2}{gWR}$ μετατρέπεται η ταχύτητα u(ft/sec) σε ταχύτητα

V(miles/h), το βάρος W(tons) πολλαπλασιάζεται με 2000 για να μετατραπεί σε βάρος w(pounds), η ακτίνα R αντικαθίσταται από την ισοδύναμη έκφραση παραπάνω $5730/D$, και όλη η σχέση πολλαπλασιάζεται με το 12 ώστε να μετατραπούν τα ft σε inches. Έτσι, προκύπτει τελικά:

$$\text{ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗ (inches): } e = 0.0007DV^2 \dots\dots\dots(2.1)$$

όπου

e: θεωρητική υπερύψωση σε inches

D: μοίρες καμπύλης

V: ταχύτητα του οχήματος σε miles/h

Συμπέρασμα: Σε αντίθεση λοιπόν με την ευρωπαϊκή συνήθεια, οι Αμερικάνοι εκφράζουν την θεωρητική υπερύψωση που αντιστοιχεί σε μια ταχύτητα συναρτήσεως της ταχύτητας και των μοιρών της καμπύλης, ενώ και οι μονάδες των μεγεθών διαφέρουν και αυτές(πόδια και ίντσες).

Στην συνέχεια αναφέρεται ότι υπερύψωση ίση με την θεωρητική υπερύψωση e όπως υπολογίστηκε, έχει ως αποτέλεσμα οι δύο σιδηροτροχιές να φορτίζονται εξίσου από

τους τροχούς χωρίς να υπάρχει παραμένουσα μη εξισορροπούμενη πλευρική επιτάχυνση. Η ταχύτητα V που αντιστοιχεί σ' αυτήν την υπερύψωση ονομάζεται ταχύτητα ισορροπίας και στους αμερικάνικους κανονισμούς και μόνο γι' αυτήν την ταχύτητα επιτυγχάνεται πλήρης ισορροπία για την συγκεκριμένη υπερύψωση. Αν η e είναι πολύ μεγάλη για την ταχύτητα διέλευσης ενός οχήματος τότε θα παραμένει μία συνιστώσα δύναμη προς το εσωτερικό της καμπύλης, που θα προκαλεί παραπάνω φορτίο στην εσωτερική σιδηροτροχιά. Όπως επίσης και αν η e είναι μικρότερη απ' αυτήν που απαιτεί η ταχύτητα διέλευσης, η συνιστώσα αυτή θα είναι προς την εξωτερική σιδηροτροχιά, προκαλώντας μεγαλύτερη πλευρική πίεση και φθορά σ' την εξωτερική σιδηροτροχιά.

Τα τρέινα διέρχονται με διαφορετικές ταχύτητες κατά μήκος της ίδιας γραμμής. Οι Αμερικάνοι μηχανικοί συμφωνούν γενικά, με βάση την εμπειρία, ότι είναι εξυπηρετική και ταυτόχρονα ασφαλής η αποδοχή μιας ανεπάρκειας υπερύψωσης 3 ιντσών $= 3 \cdot 25.4 \cdot 10 \text{ mm} = 76.2 \text{ mm}$. Αυτό σημαίνει ότι μια καμπύλη χωρίς καθόλου υπερύψωση είναι ασφαλής για ταχύτητες τρένων που απαιτούν μέχρι 3 ιντσες υπερύψωση, ενώ μεγαλύτερες ταχύτητες δεν θα ήταν εφικτές ή καλύτερα θα ήταν επικίνδυνες.

Στους αμερικάνικους κανονισμούς συναντούμε περεταίρω την έννοια της *comfortable speed*. Είναι εκείνη η ταχύτητα που απαιτεί 3 ιντσες μεγαλύτερη υπερύψωση απ' αυτήν που έχει ήδη εφαρμοστεί στην καμπύλη. Αντίστροφα, η υπερύψωση που θα απαιτούσε η *comfortable speed* θα ήταν

$$e_c = 0.0007DV^2 - 3 \dots \dots \dots (2.2)$$

Επιβατικά οχήματα ειδικών προδιαγραφών μπορούν να ανεχθούν ανεπάρκεια υπερύψωσης 4 ιντσες. Πρόσφατες ευρωπαϊκές και αγγλικές έρευνες έδειξαν ότι είναι εφικτές τιμές μέχρι και 6-9 ιντσών, παρότι υπερβολικές τιμές προκαλούν έντονη φθορά των σιδηροτροχιών και αυξημένες πιθανότητες ανατροπών και εκτροχιασμών. Επίσης πρόσφατες έρευνες έδειξαν ότι ανεπάρκεια υπερύψωσης ίση με 3 ιντσες μπορεί να μην είναι ασφαλής για οχήματα που έχουν ψηλά το κ.β. τους, σε ύψος 90-98 ιντσες, ειδικά αν υπάρχει και έντονη φθορά των σιδηροτροχιών. Για τις περιπτώσεις αυτές η τιμή της

επιτρεπόμενης ανεπάρκειας υπερύψωσης περιορίζεται στις 2 ίντσες $= 2 \times 2.54 \times 10 \text{ mm} = 50.8 \text{ mm}$.

Αν π.χ. η ταχύτητα αυτή είναι 50mph μια καμπύλη 3° θα ήθελε υπερύψωση $e_c = 0.0007 \times 3^0 \times 50^2 = 5.5 \text{ inches}$. Τα ταχύτερα οχήματα δε, θα μπορούσαν να εκμεταλλευτούν την ανεπάρκεια υπερύψωσης των 3 ίντσών, η οποία επιτρέπει 60mph. Σε ακόμα ταχύτερα οχήματα θα επιβαλλόταν επιβράδυνση.

Αν τώρα η καμπύλη ήταν 4° η θεωρητική υπερύψωση που θα απαιτούνταν θα ήταν $e_c = 0.0007 \times 4^0 \times 50^2 = 7 \text{ inches}$ που είναι μεγαλύτερη από την μέγιστη κατασκευαστική υπερύψωση που είναι 6 ίντσες $= 6 \times 2.54 \times 10 \text{ mm} = 152.40 \text{ mm}$ και από την οποία μεγαλύτερες τιμές θα προκαλούσαν ενδεχόμενα ανατροπή προς το εσωτερικό της καμπύλης σε μια δυσμενή περίπτωση.

Η μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα διέλευσης για μια ήδη υπάρχουσα υπερύψωση Ea είναι

$$Ea = 0.0007DV_{\max}^2 - 3 \Leftrightarrow V_{\max} = \left(\frac{Ea + 3}{0.0007D} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (2.3)$$

που συμπίπτει με την comfortable speed που είδαμε προηγουμένως. Η παραπάνω σχέση βασίζεται σε 3 ίντσες ανεπάρκειας υπερύψωσης.

$$\text{COMFORTABLE SPEED } V : V = \left(\frac{Ea + 3}{0.0007D} \right)^{1/2}$$

Έτσι, στο τελευταίο παράδειγμα της καμπύλης των 4° , δεδομένου ότι δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί η απαιτούμενη υπερύψωση των 7 ίντσών αλλά μόνο την μέγιστη κατασκευαστική των 6 ίντσών, η μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να διέλθει συρμός είναι

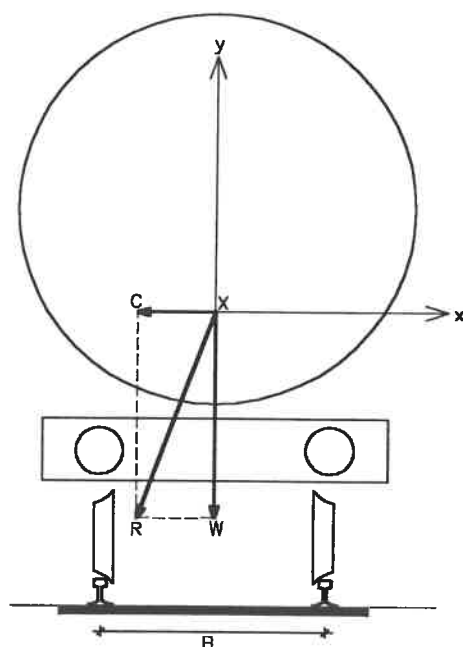
$$V_{\max} = \left(\frac{6 + 3}{0.0007 \times 4^0} \right)^{1/2} = 56 \text{ mph}.$$

Σχόλιο: Όσον αφορά της εφαρμογή της κατάλληλης υπερύψωσης σε μια γραμμή μεικτής κυκλοφορίας, το εγχειρίδιο *American Track Geometry* αναφέρει ότι η καλύτερη προσέγγιση είναι η εφαρμογή μιας υπερύψωσης που ανταποκρίνεται στην ταχύτητα

ισορροπίας του επικρατέστερου αριθμού των οχημάτων που κυκλοφορούν. Δεν χρησιμοποιείται δηλαδή πουθενά η προσέγγιση της «κανονικής υπερύψωσης» που χρησιμοποιείται στον Νέο Κανονισμό Επιδομής Γραμμής του ΟΣΕ. Μια σύγκριση των δύο αυτών μεθόδων, θα γίνει στο κεφάλαιο Γ στην παράγραφο 1.3.2 της σύγκρισης των μεθόδων εφαρμογής της υπερύψωσης.

3. Οι Βρετανικοί κανονισμοί για την υπερύψωση

Ο τρόπος που υιοθετήθηκε για να μειωθεί η υπερβολική πίεση στις σιδηροτροχιές λόγω φυγόκεντρης δύναμης είναι να κατασκευαστεί το επίπεδο της άνω στάθμης των κεφαλών των σιδηροτροχιών κάθετο προς την συνισταμένη βάρους XW και φυγόκεντρου XR . Αυτό σημαίνει ότι η εξωτερική σιδηροτροχιά είναι υπερυψωμένη σε σχέση με την εσωτερική κατά «υπερύψωση» E , όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.2. Επίσης, στο ίδιο σχήμα B είναι η απόσταση μεταξύ των σιδηροτροχιών.



Σχήμα 3.1

Ισορροπία σιδηροδρομικού οχήματος σε γραμμή με μη-υπερυψωμένη σιδηροτροχιά

Πηγή: [4] Figure 166, σελ.478.

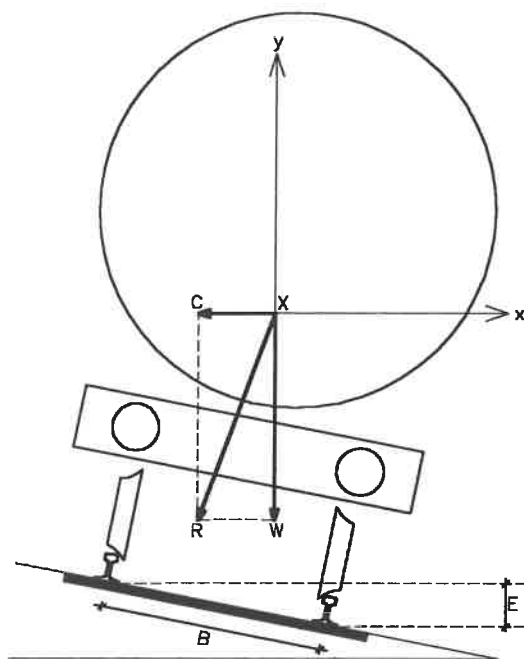
XC : φυγόκεντρος δύναμη σε $\text{kgr} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

XW : βάρος οχήματος σε $\text{kgr} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

XR : συνισταμένη φυγόκεντρου δύναμης και βάρους οχήματος σε $\text{kgr} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

B : απόσταση σιδηροτροχιών με m

Γεωργοπούλου Ναταλία



Σχήμα 3.2

Ισορροπία σιδηροδρομικού οχήματος σε γραμμή με υπερυψωμένη εξωτερική σιδηροτροχιά
 Πηγή: [4] Figure 167, σελ.478.

XC: φυγόκεντρος δύναμη σε $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

XW: βάρος οχήματος σε $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

XR: συνισταμένη φυγόκεντρος δύναμης και βάρους οχήματος σε $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$

B: απόσταση σιδηροτροχιών με m

E: υπερύψωση εξωτερικής σιδηροτροχιάς σε mm

Από τα όμοια τρίγωνα που φαίνονται στο σχήμα 3.2 στο σχήμα προκύπτει ο λόγος:

$$\frac{E}{B} = \frac{XC}{XW} \Leftrightarrow E = B \frac{XC}{XW} = B \frac{W \cdot v^2}{R} \cdot \frac{1}{W \cdot g} \Leftrightarrow E = B \frac{W v^2}{W g R} \Leftrightarrow E = \frac{B v^2}{g R} \dots\dots\dots(3.1)$$

Όπου v η ταχύτητα σε m/sec , R η ακτίνα σε m , m η μάζα σε kg , g η επιτάχυνση της βαρύτητας σε m/sec^2 , E η υπερύψωση σε mm και B η απόσταση των σιδηροτροχιών σε m .

Όταν η ταχύτητα V είναι σε μίλια/ώρα, η ακτίνα R σε πόδια, η υπερύψωση E σε δέκατα του μέτρου:

$$E = \frac{BV^2}{gR} = \frac{1.5V^2}{9.8R} = \frac{0.153V^2}{R}$$

Όταν η V είναι σε km/h: $E = 11.8 \frac{V^2}{R}$ (3.2) όπου R σε m και E σε mm.

Στο εγχειρίδιο [4] (British Railway Track) η υπερύψωση που υπολογίζεται από την προηγούμενη σχέση ονομάζεται θεωρητική υπερύψωση και η αντίστοιχη ταχύτητα V ονομάζεται ταχύτητα ισορροπίας.

Επίσης η υπερύψωση σε οποιαδήποτε καμπύλη δεν πρέπει να υπερβαίνει στα 150mm, με άλλα λόγια η μέγιστη κατασκευαστική υπερύψωση για τους Βρετανούς είναι 150mm. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η εκάστοτε θεωρητική υπερύψωση που υπολογίζεται με τον παραπάνω τύπο επιτυγχάνει ισορροπία για μία μόνο ταχύτητα, την αντίστοιχη ταχύτητα ισορροπίας. Δεν μπορεί να συμβεί αυτό με τις διαφορετικές ταχύτητες με τις οποίες διέρχονται τα σιδηροδρομικά οχήματα μιας γραμμής.

Αν εφαρμοστεί υπερύψωση κατάλληλη για 60miles/h και ένα όχημα διέλθει από την καμπύλη με ταχύτητα μεγαλύτερη των 60miles/h, τα φορτία στις σιδηροτροχιές θα ήταν άνισα, με μεγαλύτερο αυτό στην εξωτερική σιδηροτροχιά. Αντίθετα, για ταχύτητα μικρότερη από 60miles/h το φορτίο θα ήταν μεγαλύτερο στην εσωτερική σιδηροτροχιά.

Σε γραμμές όπου όλα τα τρέινα κινούνται με την ίδια περίπου ταχύτητα, αυτή η ταχύτητα θεωρείται ως «ταχύτητα μελέτης» και δίνεται η αντίστοιχη θεωρητική υπερύψωση στις καμπύλες.

Στις περισσότερες γραμμές, όμως, ορισμένα τρέινα είναι ταχύτερα από κάποια άλλα και πρέπει να δοθεί μεγάλη προσοχή στην επιλογή της ταχύτητας μελέτης με την οποία θα υπολογιστεί την υπερύψωση που θα εφαρμοστεί. Είναι σύνηθες, ως ταχύτητα μελέτης να επιλέγεται ο μέσος όρος των ταχυτήτων των τρέινων που περνούν.

Στους βρετανικούς κανονισμούς όπως και στους αμερικάνικους, δεν γίνεται αναφορά στην μέθοδο της κανονικής υπερύψωσης που αναπτύξαμε παραπάνω. Αντίθετα, η επικρατέστερη μέθοδος είναι να επιλέγεται μια ταχύτητα μελέτης ίση με τον μέσο όρο των ταχυτήτων της γραμμής και μ' αυτήν να υπολογίζεται μια θεωρητική υπερύψωση και να εφαρμόζεται στις καμπύλες. Η μέθοδος αυτή αναλύεται και συγκρίνεται με την μέθοδο της κανονικής υπερύψωσης στην παράγραφο 4.3.3.

Σε ορισμένες καμπύλες δεν είναι δυνατό ή επιθυμητό να δίνεται η θεωρητική υπερύψωση ή άλλες, για παράδειγμα μέσω συνδέσεων, όπου δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί καθόλου υπερύψωση. Σ' αυτές τις περιπτώσεις γίνεται χρήση της «ανεπάρκειας της υπερύψωσης». Η τιμή της ανεπάρκειας υπερύψωσης είναι περιορισμένη, γι' αυτό πρέπει οι ταχύτητες των οχημάτων να κρατούνται σε μικρές τιμές. Αν ένα όχημα διέλθει από μία καμπύλη χωρίς υπερύψωση με μεγάλη ταχύτητα, θα υπάρξει υπερβολική πίεση στην εξωτερική σιδηροτροχιά και στους συνδέσμους της με αποτέλεσμα ο τροχός να σκαρφαλώσει στην σιδηροτροχιά και το όχημα να εκτροχιαστεί.

-Η μέγιστη ανεπάρκεια υπερύψωσης έχει οριστεί 110mm.

-Για συνεχώς συγκολλημένες σιδηροτροχιές έχει οριστεί 90mm.

Η ανεπάρκεια αυτή χρησιμοποιείται στο να καθοριστεί η μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα διέλευσης από μία καμπύλη, στην οποία έχει δοθεί συγκεκριμένη υπερύψωση. Για παράδειγμα, σε μια καμπύλη χωρίς υπερύψωση η ταχύτητα πρέπει να περιοριστεί σε μία τιμή για την οποία τα 110mm είναι η θεωρητική υπερύψωση για την γραμμή.

Ενώ, σε μια καμπύλη με δοσμένη υπερύψωση π.χ. 150mm η μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα είναι αυτή για την οποία η θεωρητική υπερύψωση για την γραμμή είναι $150\text{mm} + \text{ανεπάρκεια υπερύψωσης} = 150 + 110 = 260\text{mm}$ ή $150 + 90 = 240\text{mm}$ για συνεχώς συγκολλημένες σιδηροτροχιές.

Β.ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ

1. Οι Γερμανικοί κανονισμοί για τις καμπύλες συναρμογής

1.1 Εισαγωγή

1.1.1 Το πρανές υπερύψωσης

Ήδη από τον πρώτο καιρό του σιδηρόδρομου, αναζητούνταν ο τρόπος μείωσης της δυσμενούς επιρροής της φυγόκεντρου δύναμης στις σιδηροτροχιές. Έτσι, τοποθετήθηκε η εξωτερική σιδηροτροχιά υψηλότερα από την εσωτερική, κατά το μέτρο u (υπερύψωση).

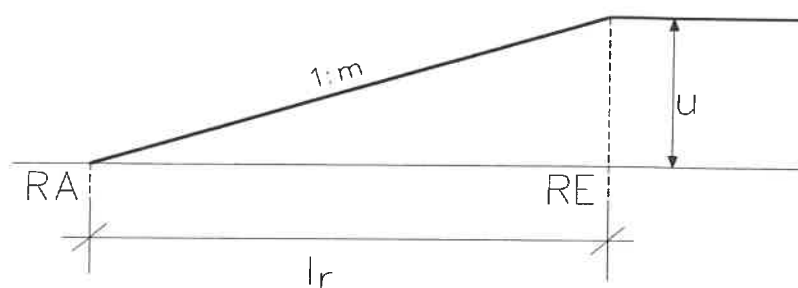
Τμήματα γραμμών με διαφορετικές υπερυψώσεις δεν μπορούν να ενωθούν απ' ευθείας. Συνδέονται μεταξύ τους με πρανή υπερύψωσης. Εντός ενός πρανούς υπερύψωσης με την αύξηση τους μήκους l_R αυξάνεται η υπερύψωση της εξωτερικής σιδηροτροχιάς από την αρχή RA του πρανούς μέχρι το τέλος του RE. Στην αρχή RA η υπερύψωση μπορεί να είναι είτε μηδενική, είτε διάφορη του μηδενός [7].

Υπάρχουν θεωρητικά τρεις τρόποι με τους οποίους μπορεί να κατασκευαστεί ένα πρανές υπερύψωσης:

- α. Η εσωτερική σιδηροτροχιά παραμένει στο ύψος της και η εξωτερική υπερυψώνεται.
- β. Η εσωτερική σιδηροτροχιά παραμένει στο ύψος της και η εξωτερική βυθίζεται.
- γ. Η εξωτερική σιδηροτροχιά υπερυψώνεται και η εσωτερική βυθίζεται.

Η καλύτερη πρόταση θα ήταν η τρίτη, επειδή το κέντρο βάρους των οχημάτων θα παρέμενε στο ίδιο ύψος κατά την διέλευσή τους από το πρανές υπερύψωσης. Αυτή η λύση όμως, όπως και η δεύτερη είναι τεχνικά άβολη λόγω της βύθισης της εσωτερικής σιδηροτροχιάς και επικίνδυνη, λόγω της μείωσης του πάχους του έρματος [9].

Έτσι κατασκευάζονται τα πρανή υπερύψωσης αποκλειστικά με ανύψωση μόνο της εξωτερικής σιδηροτροχιάς (σχήμα 1.1.1.1).



Σχήμα 1.1.1.1

Πρανές υπερύψωσης

Πηγή: [8] Bild 3.2 ,σελ 22

RA: αρχή πρανούς υπερύψωσης

RE: τέλος πρανούς υπερύψωσης

1:m : κλίση πρανούς υπερύψωσης

u: υπερύψωση στο τέλος του πρανούς ή υπερύψωση κυκλικού τόξου

l_r : μήκος πρανούς υπερύψωσης

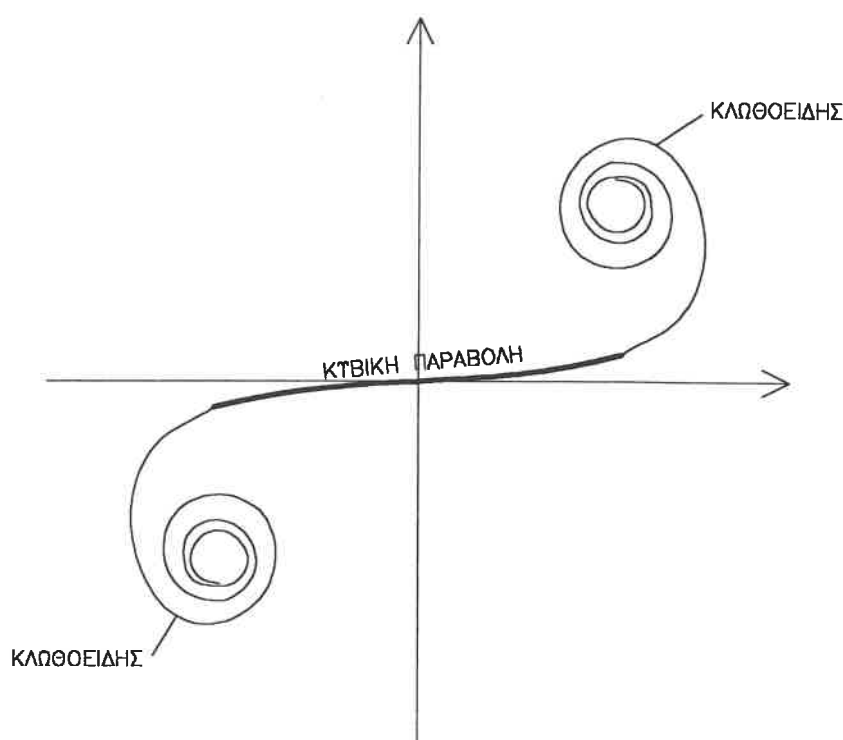
Όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.1.1.1 το πρανές υπερύψωσης σχεδιάστηκε αρχικά ευθύγραμμο-πρόκειται για το ευθύγραμμο πρανές. Αυτό είτε τοποθετούνταν πριν το κυκλικό τόξο, έτσι ώστε το τέλος του πρανούς υπερύψωσης να συνέπιπτε με την αρχή του κυκλικού τόξου, ή τοποθετούνταν κατά το ήμισυ στην ευθυγραμμία και κατά το ήμισυ στο κυκλικό τόξο. Μόλις μετά από μερικές δεκαετίες έγινε αντιληπτό ότι στις αυξανόμενες ταχύτητες η τελευταία διαμόρφωση δεν ήταν ικανοποιητική.

Επίσης στο πρανές υπερύψωσης αντιστοιχεί ένα τόξο συναρμογής ίδιου μήκους, όπου η καμπυλότητα $k=1/R$ αυξάνεται κατά τον ίδιο τρόπο με την υπερύψωση. Ο Γάλλος μηχανικός σιδηροδρόμων Nordling πρότεινε το 1867 τα εξής [9]:

-Με βάση το μήκος του ευθύγραμμου πρηνούς διαμορφώνεται το τόξο συναρμογής με ευθύγραμμη αύξηση της καμπυλότητας, δηλαδή ως κλωθοειδής.

-Ο μαθηματικός τύπος της κλωθοειδούς, του οποίου οι συντεταγμένες υπολογίζονται μόνο μέσω εξέλιξης των σειρών, μπορεί να αντικατασταθεί, ειδικά το αρχικό κομμάτι της, σε κάθε πραγματική περίπτωση με την κυβική παραβολή, που υπακούει στον τύπο $y = \frac{x^3}{6IR} \dots\dots\dots(1.1.1.1)$

όπου x η απόσταση του τυχαίου σημείου από την αρχή του τόξου συναρμογής, I_R το μήκος του τόξου συναρμογής σε m και R η ακτίνα του κυκλικού τόξου σε m [9].



Σχήμα 1.1.1.2

Απεικόνιση της περιοχής της κλωθοειδούς που προσεγγίζεται από την κυβική παραβολή

Δηλαδή, η κυβική παραβολή μπορεί πρακτικά να αντικαταστήσει την κλωθοειδή, η οποία είναι δυσχερέστερο να υπολογιστεί λόγω της πολυπλοκότητας των μαθηματικών σχέσεων που χρησιμοποιούνται. Στο σχήμα 1.1.1.2 φαίνεται εκείνη η περιοχή της κλωθοειδούς που μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από την κυβική παραβολή.

Το 1868 ο μηχανικό Funk πρότεινε βάσει σωστών υπολογισμών ότι τα πρηνή υπερύψωσης θα πρέπει να κατασκευάζονται προτιμότερα με μορφή καμπύλης S και ότι στα τόξα συναρμογής θα πρέπει να δοθεί μια μεταβολή της καμπυλότητας αντίστοιχη με αυτή της υπερύψωσης. Έτσι προηγούταν της εποχής του κατά πολύ. Η πρότασή του δεν βρήκε τότε καμία ανταπόκριση, επειδή με τις τότε μικρές ταχύτητες και με τις ελάχιστες υπερυψώσεις δεν προέκυπτε κανένα ουσιαστικό κέρδος από ένα καμπύλο πρηνές κι επειδή η τεχνολογία που προσέφεραν τότε οι εταιρίες σιδηροδρόμων δεν κάλυπτε τις απαιτήσεις αυτές επαρκώς. Μόλις πριν από 40 χρόνια άρχισε να πραγματοποιείται η πρόταση του Funk [9].

1.1.2 Το τόξο συναρμογής

Σχετικά με την πλευρική επιτάχυνση b αποδείχθη ότι στην διάμετρο του τόξου της σιδηροτροχιάς R πρέπει να ορισθεί μια συγκεκριμένη υπερύψωση u , για να διατηρηθεί μια δεδομένη τιμή της b . Η εξίσωση της b είναι

$$b = v^2 k - \frac{g}{s} u \dots \dots \dots (1.1.2.1)$$

όπου v η ταχύτητα σε m/sec, k η καμπυλότητα σε m^{-1} , u η υπερύψωση σε mm, g η επιτάχυνση της βαρύτητας σε m/sec² και s η απόσταση μεταξύ των σιδηροτροχιών σε m. [8]

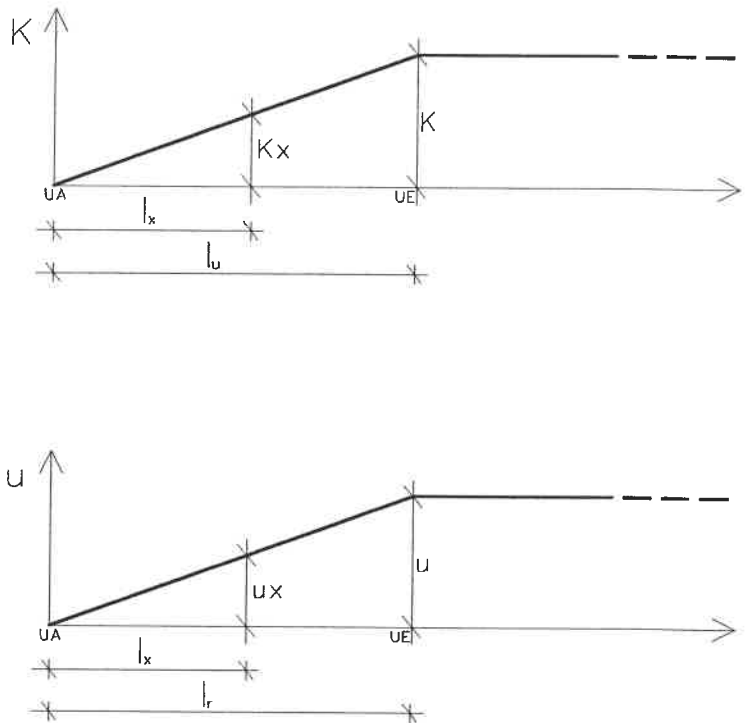
Είναι σαφές ότι μεταξύ της καμπυλότητας του τόξου της γραμμής $k = \frac{1}{r}$ και της υπερύψωσης u , θα πρέπει να υπάρχει μια σχέση. Εφόσον μιλάμε για καμπύλες συναρμογής, η έννοια της ακτίνας του κυκλικού τόξου R αντικαταστάθηκε από τον γενικότερο όρο της ακτίνας της καμπύλης. Για την ιδανική περίπτωση $b=0$ (θεωρητική υπερύψωση) προκύπτει από την εξίσωση (1.1.2.1) μια σταθερή σχέση:

$$\frac{k}{u} = \frac{g}{sv^2} \dots \dots \dots (1.1.2.2)$$

Από τη σχέση (1.1.2.2) φαίνεται ότι μεταξύ του k και της u υπάρχει μια σταθερή σχέση και μάλιστα ανάλογη. [8]

Για το λόγο αυτό, στο τόξο συναρμογής πρέπει να συνδυαστεί η αύξηση της καμπυλότητας με μία ανάλογη αύξηση της υπερύψωσης. Όπως φαίνεται από το σχήμα (1.1.2.1) αναλογούν l_r και l_u (μήκος πρηνούς υπερύψωσης-μήκος τόξου

συναρμογής), u_x και k_x (καμπύλη στην θέση x), u_l και k (κυκλικό τόξο) καθώς και RA και UA, όπως και RE και UE. Άρα το διάγραμμα της καμπυλότητας έχει την ίδια μορφή με το διάγραμμα του πρηνούς. [8]



Σχήμα 1.1.2.1

Πρηνές υπερύψωσης-Διάγραμμα καμπυλότητας

Πηγή: [7] Bild 3.3.7.1 σελ 47

k : καμπυλότητα σε m^{-1}

u : υπερύψωση σε mm

k_x : καμπυλότητα τυχαίου σημείου του τόξου συναρμογής

u_x : υπερύψωση σε τυχαίο σημείο του πρηνούς υπερύψωσης

l_r : μήκος πρηνούς υπερύψωσης

l_u : μήκος τόξου συναρμογής

Έτσι, για το τόξο συναρμογής ισχύουν οι παρακάτω ορισμοί: [7]

– η αρχή του (UA) είναι η πλευρά με την μεγαλύτερη καμπυλότητα

- το τέλος του (UE) είναι η πλευρά με την μικρότερη καμπυλότητα
- το μήκος αυτού μεταξύ (UA) και (UE) είναι l_u .

Κατά μήκος του τόξου συναρμογής θα πρέπει να αυξάνεται η παραμένουσα-μη εξισορροπούμενη- πλευρική επιτάχυνση και η υπερύψωση ισόποσα. Γι' αυτό απαιτούνται τα εξής:

- η μεταβολή της καμπυλότητας πρέπει να είναι σταθερή
- η μεταβολή της ανεπάρκειας ανύψωσης πρέπει να είναι σταθερή.

Το μήκος l_u είναι κατά κανόνα στο $\Delta u > 0$ ίσο με το μήκος του πρανούς υπερύψωσης:

$$l_u = l_R \dots\dots\dots(1.1.2.3). [7]$$

Η αύξηση της καμπυλότητας και η αύξηση της υπερύψωσης πρέπει να έχουν την ίδια μορφή (ευθύγραμμο πρανές→γραμμική αύξηση της καμπυλότητας, p-πρανές→αύξηση της καμπυλότητας με τη μορφή παραβολής).

Επίσης, ισχύει η προϋπόθεση του να μην μεταβάλλεται πολύ γρήγορα η ανεπάρκεια της υπερύψωσης μεταξύ UA και UE. Από αυτό προκύπτει και ο τρίτος περιορισμός για το μήκος του τόξου συναρμογής:

$$l_u \geq \alpha \cdot \max V \cdot \Delta u_F \dots\dots\dots(1.1.2.4) [7]$$

με $\alpha=4$ για γραμμική αύξηση της καμπυλότητας

$\alpha=6$ για παραβολική αύξηση της καμπυλότητας

Σημείωση: Στην εξίσωση αυτή το Δu_F είναι η μεταβολή της ανεπάρκειας της υπερύψωσης σε μέτρα. Είναι γνωστό ότι η ανεπάρκεια της υπερύψωσης δίνεται από τον τύπο

$$u_F = 11.8 \frac{\max V^2}{r} - u \dots\dots\dots(1.1.2.5) \text{ όπου } u \text{ είναι η υπερύψωση της γραμμής.}$$

Η διαφορά Δu_F υπολογίζεται:

α) Στην περίπτωση μετάβασης από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο

$$u_{F1} = 0 \text{ και } u_{F2} = 11.8 \frac{\max V^2}{r_2} - u_2 \text{ άρα } \Delta u_F = u_{F2} - u_{F1} = 11.8 \frac{\max V^2}{r_2} - u_2$$

β) Στην περίπτωση μετάβασης από κυκλικό τόξο σε αντίρροπο κυκλικό τόξο

$$u_{F1} = -\left(11.8 \frac{\max V^2}{r_1} - u_1\right) \text{ και } u_{F2} = 11.8 \frac{\max V^2}{r_2} - u_2 \text{ άρα}$$

$$\Delta u_F = u_{F2} - u_{F1} = \left(11.8 \frac{\max V^2}{r_2} - u_2\right) + \left(11.8 \frac{\max V^2}{r_1} - u_1\right)$$

γ) Στην περίπτωση μετάβασης από κυκλικό τόξο σε ομόρροπο κυκλικό τόξο

$$u_{F1} = \left(11.8 \frac{\max V^2}{r_1} - u_1\right) \text{ και } u_{F2} = 11.8 \frac{\max V^2}{r_2} - u_2 \text{ άρα}$$

$$\Delta u_F = u_{F2} - u_{F1} = \left(11.8 \frac{\max V^2}{r_2} - u_2\right) - \left(11.8 \frac{\max V^2}{r_1} - u_1\right)$$

εδώ ισχύει: $r_1 < r_2$

u_1 : υπερύψωση σε κυκλικό τόξο ακτίνας r_1

u_2 : υπερύψωση σε κυκλικό τόξο ακτίνας r_2

Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η απευθείας μετάβαση χωρίς παρεμβολή καμπύλης συναρμογής προβλέπεται όταν: [7]

$$\Delta K \leq \frac{9000}{V^2} \dots \dots \dots V \leq 100 \text{ km/h}$$

$$\Delta K \leq \frac{7000}{V^2} \dots \dots \dots 100 \leq V \leq 160 \text{ km/h}$$

$$\Delta K \leq \frac{4000}{V^2} \dots \dots \dots V \geq 160 \text{ km/h}$$

όπου ΔK η διαφορά της καμπυλότητας ανάμεσα στην ευθυγραμμία και στο κυκλικό τόξο ή ανάμεσα στα κυκλικά τόξα διαφορετικής καμπυλότητας.

Στην περίπτωση μετάβασης από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο, λαμβάνοντας υπόψη ότι η διαφορά καμπυλότητας ΔK ευθυγραμμίας-κυκλικού τόξου είναι $\Delta K = \frac{1000}{r}$:

$$\frac{1000}{R} \leq \frac{9000}{V^2} \Leftrightarrow R \geq \frac{V^2}{9}$$

$$\frac{1000}{R} \leq \frac{7000}{V^2} \Leftrightarrow R \geq \frac{V^2}{7}$$

$$\frac{1000}{R} \leq \frac{4000}{V^2} \Leftrightarrow R \geq \frac{V^2}{4}$$

όπου R η ακτίνα του κυκλικού τόξου και V η ταχύτητα του οχήματος.

Οπότε τα όρια είναι (για να μην απαιτείται η εφαρμογή συναρμογής):

$$R \geq \frac{V^2}{9} \Leftrightarrow V \leq 3\sqrt{R} \dots \dots \dots V \leq 100 \text{ km/h}$$

$$R \geq V^2/7 \Leftrightarrow V \leq 2.65\sqrt{R} \dots\dots\dots 100 \leq V \leq 160 \text{ km/h}$$

$$R \geq V^2/4 \Leftrightarrow V \leq 2\sqrt{R} \dots\dots\dots V \geq 160 \text{ km/h}$$

Αντίστοιχα, στην περίπτωση μετάβασης από ένα κυκλικό τόξο σε ένα άλλο κυκλικό τόξο μικρότερης ή μεγαλύτερης καμπυλότητας και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση

$$\Delta K = 1000 \times \frac{R_1 \pm R_2}{R_1 R_2} \text{ προκύπτει:}$$

$$1000 \frac{R_1 \pm R_2}{R_1 R_2} \leq \frac{9000}{V^2} \Leftrightarrow V \leq 3 \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 \pm R_2}}$$

$$1000 \frac{R_1 \pm R_2}{R_1 R_2} \leq \frac{7000}{V^2} \Leftrightarrow V \leq 2.65 \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 \pm R_2}}$$

$$1000 \frac{R_1 \pm R_2}{R_1 R_2} \leq \frac{4000}{V^2} \Leftrightarrow V \leq 2 \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 \pm R_2}}$$

όπου R_1, R_2 οι ακτίνες των κυκλικών τόξων με διαφορετικές καμπυλότητες K_1, K_2 .

Οπότε αντιστοίχως τα εν λόγω όρια προκύπτουν (για να μην απαιτείται η εφαρμογή συναρμογής):

$$V \leq 3 \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 \pm R_2}} \dots\dots\dots V \leq 100 \text{ km/h}$$

$$V \leq 2.65 \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 \pm R_2}} \dots\dots\dots 100 \leq V \leq 160 \text{ km/h}$$

$$V \leq 2 \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 \pm R_2}} \dots\dots\dots V \geq 160 \text{ km/h}$$

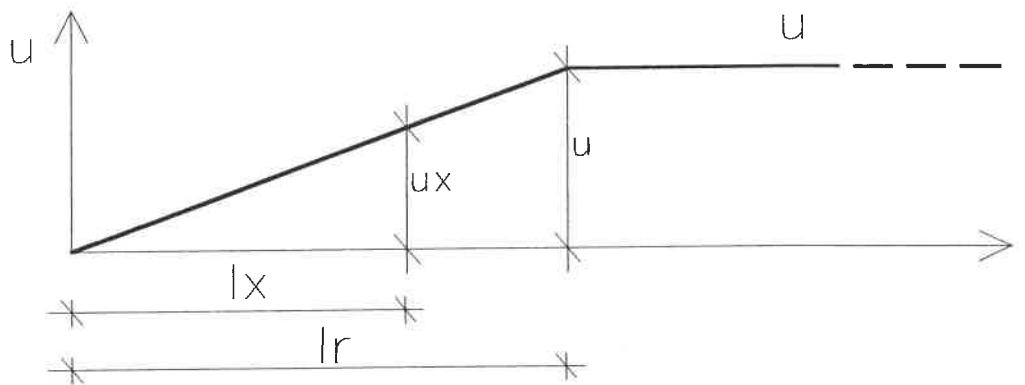
Σε άλλη περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιηθεί τόξο συναρμογής.

1.2 Γραμμική αύξηση της υπερύψωσης-καμπυλότητας

1.2.1 Το ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης

Το ευθύγραμμο πρανές, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.2.1.1 χαρακτηρίζεται από το μήκος του l_R και από την υπερύψωση u στο τέλος της, ενώ l και u_x είναι το μήκος

και η υπερύψωση σε ένα σημείο στο εσωτερικό του πρανούς. Η αρχή και το τέλος του πρανούς ονομάζονται RA και RE αντίστοιχα.



Σχήμα 1.2.1.1

Ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης

Πρανές υπερύψωσης-Διάγραμμα καμπυλότητας

Πηγή: [9] Bild 1 σελ 96

u : υπερύψωση σε mm

u_x : υπερύψωση σε τυχαίο σημείο του πρανούς υπερύψωσης

l_r : μήκος πρανούς υπερύψωσης

x : απόσταση τυχαίου σημείου του πρανούς υπερύψωσης από την αρχή του πρανούς υπερύψωσης

Η υπερύψωση σε μια θέση εντός του πρανούς, είναι

$$u_x = \frac{\Delta u}{l_r} \cdot x + u_{RA} \dots\dots\dots(1.2.1.1) \text{ όπου } u_{RA} \text{ είναι η υπερύψωση στην αρχή RA και } x \text{ η}$$

τετμημένη της θέσης στην οποία ζητείται η υπερύψωση [7].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η εξίσωση της ευθείας του πρανούς είναι κατά τα γνωστά $u_x = ax + b$, όπου a, b σταθερές.

Για λόγους γεωμετρίας και λαμβάνοντας υπόψη την κίνηση των οχημάτων- ανεξάρτητα από την ταχύτητα- η κλίση του πρανού δεν πρέπει να υπερβαίνει μια συγκεκριμένη μέγιστη τιμή. Αρχικά ισχυε $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{200}$ ή $m_{\min} = 200$, αργότερα $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{300}$ ή $m_{\min} = 300$ και πριν από 40 περίπου χρόνια αυξήθηκε σε $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$ (1.2.1.6) ή $m_{\min} = 400$ (1.2.1.7).

Από τις εξισώσεις (1.2.1.5) και (1.2.1.6) προκύπτει

$\frac{u}{l} = \frac{1}{400} \Leftrightarrow l_{\min} = 400 \cdot u$ (1.2.1.8) δηλαδή μια ελάχιστη τιμή για το μήκος του πρανού. [9].

Η προϋπόθεση του περιορισμού της εξίσωσης (1.2.1.6) πρέπει να εκπληρώνεται οπωσδήποτε. Σε νέες κατασκευές πρέπει $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{600}$ (1.2.1.9) ή $m_{\min} = 600$ (1.2.1.10).

Από τις εξισώσεις (1.2.1.5) και (1.2.1.10) προκύπτει :

$\frac{u}{l} = \frac{1}{600} \Leftrightarrow l_{\min} = 600 \cdot u$ (1.2.1.11) [7].

Για να αποφευχθούν πολύ χαμηλά πρανή, τα οποία φέρουν προβλήματα στην κατασκευή και συντήρηση, πρέπει να είναι ή $\left(\frac{1}{m}\right)_{\min} = \frac{1}{2000}$ (1.2.1.12) ή $m_{\max} = 2000$ (1.2.1.13)

Από τις εξισώσεις (1.5.1.5) και (1.2.1.13) προκύπτει:

$\frac{u}{l} = \frac{1}{2000} \Leftrightarrow l_{\min} = 2000 \cdot u$ (1.2.1.14) [9].

Τα παραπάνω όρια, τόσο για την κλίση όσο και για το μήκος του πρανού, είναι κατασκευαστικά.

Εκτός από αυτό το κατασκευαστικό όριο, υπάρχει και ένα «δυναμικό» όριο, με το οποίο περιορίζονται οι εμφανιζόμενες επιταχύνσεις, έτσι ώστε να μην εμφανιστούν ταλαντώσεις στο όχημα και δυσάρεστες επιδράσεις για τον επιβάτη.

Βάσει μακροχρόνιων εμπειριών προέκυψε για την επίτευξη μιας άψογης πορείας [9]:

$$m = 10 \cdot V \quad \text{ή} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{10 \cdot V} \dots\dots\dots(1.2.1.15)$$

Η κλίση εξάλλου δεν πρέπει να υπερβαίνει την τιμή

$$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{8 \cdot V} \dots\dots\dots(1.2.1.16) \quad \text{ή} \quad m = 8 \cdot V \dots\dots\dots(1.2.1.17)$$

Από τις εξισώσεις (1.2.1.5) και (1.2.1.17) προκύπτει

$$\frac{u}{l} = \frac{1}{8 \cdot V} \Leftrightarrow l_{\min} = 8 \cdot V \cdot u \dots\dots\dots(1.2.1.18) \quad \text{όπου } l \text{ και } u \text{ σε m, } V \text{ σε km/h.}$$

Δηλαδή για το μήκος του πρανούς από τις εξισώσεις (1.2.1.8) και (1.2.1.18) έχουν προκύψει τα όρια:

$$l_{\min} = \max(400 \cdot u, 8V \cdot u) \dots\dots\dots(1.2.1.19)$$

Η εξίσωση (1.2.1.8), ήτοι το κατασκευαστικό όριο επικρατεί όταν $V < 50 \text{ km/h}$, ενώ η εξίσωση (1.2.1.17) επικρατεί όταν $V > 50 \text{ km/h}$. [9]

Πράγματι, όταν η ταχύτητα $V < 50 \text{ km/h}$ το γινόμενο $8V$ θα είναι μικρότερο από 400 και άρα θα επικρατεί το όριο $l_{\min} = 400 \cdot u$ ως μεγαλύτερο. Αντίθετα, όταν $V > 50 \text{ km/h}$ το γινόμενο $8V$ θα είναι μεγαλύτερο από 400, οπότε και το όριο $l_{\min} = 8V \cdot u$ θα είναι επικρατέστερο ως μεγαλύτερο.

Τέλος, από την εξίσωση 12.1.2.4 προκύπτει άλλο ένα όριο από τον περιορισμό για την αύξηση της ανεπάρκειας της υπερύψωσης

$$l_{\min} = \alpha \cdot \max V \cdot \Delta u_F \cdot [7]$$

με $\alpha = 4$ για γραμμική αύξηση της καμπυλότητας, δηλαδή

$$l_{\min} = 4 \cdot \max V \cdot \Delta u_F \dots\dots\dots(1.2.1.20)$$

$$\text{Έτσι συνολικά } l_{\min} = \max \begin{cases} 400 \cdot u \\ 8V \cdot u \\ 4 \cdot \max V \cdot \Delta u_F \end{cases} \dots\dots\dots(1.2.1.21)$$

Σημείωση: Στη συνέχεια παρατίθενται κάποιες μέγιστες και ελάχιστες τιμές που αναφέρονται στο εγχειρίδιο [8] της γερμανικής βιβλιογραφίας. Οι μέγιστες και ελάχιστες αυτές τιμές κατηγοριοποιούνται με βάση την ταχύτητα. Οι τιμές που αναφέρονται για ταχύτητες μεγαλύτερες από 40km/h συμπίπτουν με τα όρια που παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Όσον αφορά τις τιμές για ταχύτητες μικρότερες των 40km/h παρατίθενται ενημερωτικά, εφόσον ταχύτητες μικρότερες των 40km/h είναι εν γένει πολύ μικρές και δεν αφορούν αυτήν την εργασία.

Ελάχιστες τιμές κλίσης 1:m [8]

$$m_{\max} = 10V \rightarrow \left(\frac{1}{m}\right)_{\min} = \frac{1}{10V} \text{ για } V \geq 40\text{km/h} \dots\dots\dots(1.2.1.22)$$

$$m_{\max} = 2,5V + 300 \rightarrow \left(\frac{1}{m}\right)_{\min} = \frac{1}{2,5V + 300} \text{ για } V \leq 40\text{km/h} \dots\dots\dots(1.2.1.23)$$

Μέγιστες τιμές κλίσης πρανούς 1:m

$$m_{\min} = 8V \rightarrow \left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{8V} \text{ για } V \geq 50\text{km/h} \dots\dots\dots(1.2.1.24)$$

$$m_{\min} = 2,5V + 275 \rightarrow \left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{2,5V + 275} \text{ για } V \leq 50\text{km/h} \dots\dots\dots(1.2.1.25)$$

Από την σύγκριση των ελάχιστων και των μέγιστων ορίων για την κλίση των ευθύγραμμων πρανών στους γερμανικούς κανονισμούς, προκύπτει το συμπέρασμα ότι η κλίση του ευθύγραμμου πρανούς περιορίζεται σε μια μικρή περιοχή από αυτές τις min και τις max τιμές.

Για το μήκος του πρανούς υπερύψωσης προκύπτουν οι εξής μέγιστες και ελάχιστες τιμές: [8].

Μέγιστες τιμές: [8]

$$V \geq 40\text{km/h} : l_{\max} = 10V \cdot \frac{8V^2}{1000R} \Leftrightarrow \dots\dots\dots(1.2.1.26)$$

$$l_{\max} = 0,08V^3 / R \dots\dots\dots(1.2.1.27)$$

$$V \leq 40\text{km/h} : l_{\max} = (2,5V + 300) \cdot \frac{8V^2}{1000R} \Leftrightarrow \dots\dots\dots(1.2.1.28)$$

$$l_{\max} = (0,02V^3 + 2,40V^2) / R \dots\dots\dots(1.2.1.29)$$

ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΤΙΜΕΣ:

$$V \geq 50 \text{ km/h} : l_{\min} = 8V(11.8V^2 - 100R)/1000R \Leftrightarrow \dots\dots\dots(1.2.1.30)$$

$$l_{\min} = 0.008 \frac{V}{R} (11.8V^2 - 100R) \dots\dots\dots(1.2.1.31)$$

$$V \leq 50 \text{ km/h} : l_{\min} = (2.5V + 275) \cdot (11.8V^2 - 100R)/1000R \Leftrightarrow \dots\dots\dots(1.2.1.32)$$

$$l_{\min} = \frac{0.0025V + 0.275}{R} (11.8V^2 - 100R) \dots\dots\dots(1.2.1.33)$$

όπου $l_r(m), V(km/h), R(m)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Για να υπολογιστούν οι μέγιστες τιμές του μήκους $l_{\max}$ του πρανούς χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις (1.2.1.22) και (1.2.1.23) που δίνουν τις ελάχιστες τιμές της κλίσης του πρανούς.

Χρησιμοποιούμε επίσης την τιμή της κανονικής υπερύψωσης που είναι κατά τα γνωστά $u_k = 8 \frac{V^2}{R}$ και την σχέση $\frac{1}{m} = \frac{u}{l_R}$. Έτσι:

Για $V \geq 40 \text{ km/h}$ είναι

$$l_{\max} = \frac{mu}{1000} = 10V \cdot \frac{8V^2}{1000R} \Leftrightarrow l_{\max} = 0.08 \frac{V^3}{R}$$

$$\text{Για } V \leq 40 \text{ km/h} \text{ είναι } l_{\max} = \frac{mu}{1000} = (2.5V + 300) \cdot \frac{8V^2}{1000R} \Leftrightarrow l_{\max} = \frac{0.02V^3 + 2.40V^2}{R}$$

Αντίστοιχα, για το υπολογισμό των ελάχιστων τιμών του μήκους πρανούς $l_{\min}$ χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (1.2.1.24) και (1.2.1.25) που δίνουν τις μέγιστες τιμές για την κλίση του πρανούς. Τέλος η υπερύψωση u παίρνει κι αυτή την ελάχιστη τιμή της, που είναι ως γνωστόν $u_{\min} = 11.8 \frac{V^2}{R} - 100$. Επομένως:

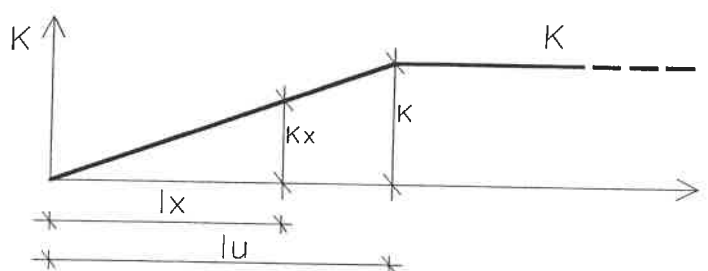
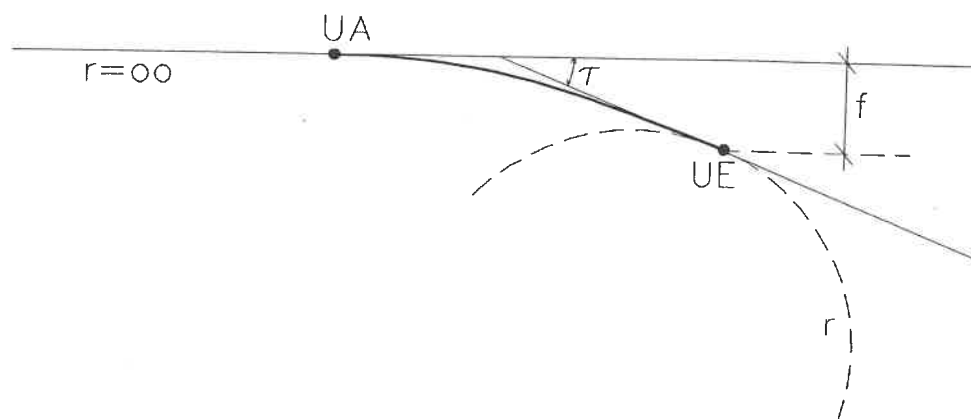
$$\text{Για } V \geq 50 \text{ km/h} \text{ είναι } l_{\min} = \frac{mu}{1000} = \frac{8V}{1000} \left(11.8 \frac{V^2}{R} - 100 \right) = \frac{0.008V}{R} (11.8V^2 - 100R)$$

Για $V \leq 50 \text{ km/h}$ είναι

$$l_{\min} = \frac{mu}{1000} = \frac{(2.5V + 275)}{1000} \left(11.8 \frac{V^2}{R} - 100 \right) = \frac{0.0025V + 0.275}{R} (11.8V^2 - 100R).$$

1.2.2 Το τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας

Σε αντιστοιχία με το πρηνές υπερύψωσης έχει καθοριστεί και το διάγραμμα της μεταβολής της καμπυλότητας του τόξου συναρμογής. Έτσι, στο ευθύγραμμο πρηνές αντιστοιχεί ένα τόξο συναρμογής ίδιου μήκους, του οποίου η καμπυλότητα $K = \frac{1}{R}$ μεταβάλλεται με τρόπο ίδιο με την μεταβολή της υπερύψωσης.



Σχήμα 1.2.2.1

Τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση καμπυλότητας-Διάγραμμα καμπυλότητας

Πηγή: [7] Bild 3.3.7.1 σελ 47

UA: αρχή τόξου συναρμογής

UE: τέλος τόξου συναρμογής

k: καμπυλότητα σε m^{-1}

kx: καμπυλότητα τυχαιού σημείου του τόξου συναρμογής

lu: μήκος τόξου συναρμογής

lx: απόσταση τυχαιού σημείου του τόξου συναρμογής από την αρχή του

τ : γωνία που σχηματίζει η κοινή εφαπτομένη του τόξου συναρμογής και του κυκλικού τόξου στο κοινό τους σημείο, με τον άξονα της ευθυγραμμίας

f: εκτροπή του κυκλικού τόξου

Η μεταβολή της καμπυλότητας λοιπόν πραγματοποιείται με τρόπο γραμμικό από την αρχή UΑ του τόξου συναρμογής μέχρι το τέλος του UΕ και φαίνεται στο σχήμα 1.2.2.1. Από τα όμοια τρίγωνα του σχήματος προκύπτει η αναλογία: [9]

$\frac{k_x}{x} = \frac{k}{l} \Leftrightarrow k_x = \frac{k}{l} \cdot x \Leftrightarrow k_x = \frac{1/R}{l} \cdot x = \frac{x}{R \cdot l}$, όπου l το μήκος του τόξου συναρμογής, R η ακτίνα του κυκλικού τόξου, x η απόσταση σημείου με καμπυλότητα k_x από την αρχή του τόξου. Τα παραπάνω αφορούν την συναρμογή κυκλικού τόξου με ευθυγραμμία.

Κατά την μετάβαση από την ευθυγραμμία στο κυκλικό τόξο ή γενικά από κυκλικό τόξο σε άλλο κυκλικό τόξο διαφορετικής καμπυλότητας, πραγματοποιείται μεταβολή της πλευρικής επιτάχυνσης που δίνεται από τον τύπο $C = \frac{dp}{dt}$. Η μεταβολή αυτή ονομάζεται τινάγμα.

Εμπειρικά, αλλά και μετά από πειράματα, το τινάγμα αρχίζει να γίνεται αντιληπτό από την τιμή $C = 0.3m/sec^3$, ενώ δεν έχει γίνει ακόμη δυσάρεστο μέχρι και την τιμή $C = 0.5m/sec^3$. Ως επιτρεπτή οριακή τιμή ισχύει $C_{max} = 1.0m/sec^3$. [9]

Μία ικανοποιητική τιμή του τινάγματος για την άνεση των επιβατών είναι $0.5m/sec^3$. Έτσι προκύπτει άλλος ένας περιορισμός για το μήκος του τόξου συναρμογής- οι άλλοι δύο ταυτίζονται με τους περιορισμούς για το μήκος του πρανούς υπερύψωσης, μια και τα δύο αυτά μήκη συμπίπτουν. Έτσι:

$$l_{min} = \frac{V^3}{23.4R} - 3.63V \cdot u \dots\dots\dots(1.2.2.2) [9]$$

Έτσι, από τον συνδυασμό των εξισώσεων (1.2.1.8), (1.2.1.30) και (1.2.2.2) το μήκος του τόξου συναρμογής περιορίζεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$l_{min} = \begin{cases} 400 \cdot u \dots\dots\dots V < 50km/h \\ 8V \cdot u \dots\dots\dots V > 50km/h \dots\dots\dots(1.2.2.3) \\ \frac{V^3}{23.4R} - 3.63V \cdot u \end{cases}$$

Σε μία περεταίρω ανάλυση, θα επιχειρηθεί να καθοριστεί ποια από τις οριακές τιμές της εξίσωσης 1.2.2.3 μπορεί να είναι καθοριστική για τον καθορισμό του ελάχιστου μήκους. Όσον αφορά την εξίσωση (1.2.2.2), αν αντικατασταθεί η υπερύψωση u με

την θεωρητική υπερύψωση $u = \frac{0.0118V^2}{R}$ η εξίσωση γίνεται

$$l_{\min} = \frac{V^3}{23.4R} - 3.63V \cdot \frac{0.0118V^2}{R} = \frac{V^3}{23.4R} - \frac{V^3}{23.35R} \cong 0 \text{ δηλαδή η θεωρητική υπερύψωση}$$

μηδενίζει την εξίσωση και τιμές της υπερύψωσης μεγαλύτερες από την θεωρητική υπερύψωση θα είχαν ως συνέπεια ένα αποτέλεσμα με αρνητικό πρόσημο. Για την μεγιστοποίηση του δεύτερου μέλους, δηλαδή για την μεγιστοποίηση της διαφοράς της εξίσωσης χρειάζεται όσο το δυνατόν μικρότερη υπερύψωση και σίγουρα $u < \frac{0.0118V^2}{R}$ και όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ταχύτητα. Μια μεγάλη ταχύτητα όμως

σε συνδυασμό με μια μικρή υπερύψωση θα δημιουργούσε μεγάλες τιμές πλευρικής επιτάχυνσης προς τα εξωτερικά του τόξου. Προκύπτει έτσι το συμπέρασμα ότι η εξίσωση (1.2.2.2) μπορεί να είναι καθοριστική ή αλλιώς να δίνει μεγάλες τιμές για το $l_{\min}$ σε σχέση με τους άλλους δύο περιορισμούς μόνο σε υψηλή πλευρική επιτάχυνση σε συνδυασμό με ελάχιστη υπερύψωση.

Η εξίσωση $l_{\min} = 400 \cdot u$ ήτοι το κατασκευαστικό όριο επικρατεί όταν $V < 50 \text{ km/h}$, ενώ η εξίσωση $l_{\min} = 8 \cdot V \cdot u$ επικρατεί όταν $V > 50 \text{ km/h}$. [9]

Πράγματι, όταν η ταχύτητα $V < 50 \text{ km/h}$ το γινόμενο $8V$ θα είναι μικρότερο από 400 και άρα θα επικρατεί το όριο $l_{\min} = 400 \cdot u$ ως μεγαλύτερο. Αντίθετα, όταν $V > 50 \text{ km/h}$ το γινόμενο $8V$ θα είναι μεγαλύτερο από 400, οπότε και το όριο $l_{\min} = 8V \cdot u$ θα είναι επικρατέστερο ως μεγαλύτερο.

Σύμφωνα με το σχήμα 1.2.2.1 ισχύει (από τα όμοια τρίγωνα που δημιουργούνται) για την καμπυλότητα εντός του τόξου συναρμογής η εξίσωση

$$k_x = k \cdot \frac{x}{l_u} = \frac{x}{l_u \cdot R} \dots \dots \dots (1.2.2.3)$$

Όπως ειπώθηκε στην παράγραφο 1.1.1, η κυβική παραβολή μπορεί να αντικαταστήσει πρακτικά τόξο κλωθοειδούς στην συναρμογή.

Στην συνέχεια θα προσδιοριστούν οι εξισώσεις της κυβικής παραβολής που χρησιμοποιούμε για το τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας. [9]

Ο ορισμός της καμπυλότητας είναι $k_x = \frac{d\phi}{dx}$, όπου ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθυγραμμία με την κοινή εφαπτομένη τόξου συναρμογής και κυκλικού τόξου στο

κοινό τους σημείο. Όμως η καμπυλότητα k_x είναι συνάρτηση του x , οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται $d\phi = \frac{x}{l_u \cdot R} dx$.

Με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης προκύπτει για την γωνία ϕ :

$$\int \frac{x}{l_u \cdot R} dx = \int d\phi \Leftrightarrow \phi_x = \frac{k \cdot x^2}{2l_u} + C_1 \dots \dots \dots (1.2.2.4)$$

Στην αρχή του πρανούς ($x=0$) είναι $\phi=0$ οπότε $C_1=0$ και $\phi_x = \frac{x^2}{2l_u \cdot R} \dots \dots \dots (1.2.2.5)$

Στο τέλος του πρανούς ($x=l_u$) είναι $\phi_1 = \frac{l_u^2}{2l_u \cdot R} \Leftrightarrow \phi_x = \frac{l_u}{(2R)} \dots \dots \dots (1.2.2.6)$

Για τη γωνία ϕ ισχύει όμως $d\phi = \frac{dy}{dx}$. Όμως η ϕ είναι συνάρτηση του x , όπως φαίνεται και από την εξίσωση (1.2.2.5). Οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται $dy = \phi_x \cdot dx \Leftrightarrow dy = \frac{x^2}{2l_u \cdot R} dx$.

Και με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης προκύπτει η εξίσωση του τόξου συναρμογής:

$$\int dy = \int \frac{x^2}{2l_u \cdot R} dx \Leftrightarrow y_x = \frac{x^3}{6l_u \cdot R} + C_2 \dots \dots \dots (1.2.2.7)$$

Στην αρχή του πρανούς ($x=0$) είναι $\phi=0$ οπότε $C_2=0$ και

$$y_x = \frac{x^3}{6l_u \cdot R} \dots \dots \dots (1.2.2.8)$$

Η εξίσωση (1.2.2.8) είναι εξίσωση του τόξου κυβικής παραβολής.

Στο τέλος του πρανούς ($x=l_u$) είναι $y_{l_u} = \frac{l_u^3}{6l_u \cdot R} \Leftrightarrow y_x = \frac{l_u^2}{(6R)} \dots \dots \dots (1.2.2.9)$

Κάθε ανοιχτό τόξο- όπως στο σχήμα το (BA-J)- ισούται με το τετράγωνο της αντίστοιχης χορδής, διαιρεμένης με το 4πλάσιο του τετραγώνου της ακτίνας, δηλαδή $(BA-J) = \frac{l_u^2}{8R} \dots \dots \dots (1.2.2.10)$

Αυτό σημαίνει ότι η αρχή BA του κυκλικού τόξου μετατοπίστηκε πλευρικά κατά

$$f = y_{l_u} - (BA-J) = \frac{l_u^2}{6R} - \frac{l_u^2}{8R} \Leftrightarrow f = \frac{l_u^2}{24R} \dots \dots \dots (1.2.2.11)$$

σε σχέση με την ευθυγραμμία. Το μέγεθος f ονομάζεται εκτροπή και μετράει την μετακίνηση του κυκλικού τόξου σε σχέση με την ευθυγραμμία κατά την συναρμογή.

Με την βοήθεια της (1.2.2.8), η τεταγμένη του τόξου συναρμογής στο UM

$$\text{είναι: } y_{l_u/2} = \frac{\frac{l_u^3}{8}}{6l_u \cdot R} = \frac{l_u^2}{48R} = \frac{f}{2} \dots\dots\dots (1.2.2.12)$$

Σημείωση: Από την (1.2.2.11) προκύπτει ότι για μεγάλες ταχύτητες →μεγαλύτερες υπερυψώσεις→μεγαλύτερα τόξα συναρμογής, δηλαδή μεγαλύτερα μήκη, η εκτροπή μπορεί να γίνει τόσο μεγάλη, ώστε να αποτελέσει οικονομικό εμπόδιο στις βελτιώσεις των γραμμών. Για να διατηρηθούν οι εκτροπές όσο το δυνατόν μικρότερες θα προταθεί όπως θα δούμε η χρησιμοποίηση των πρανών που αποτελούνται από καμπύλα στοιχεία, καθώς και τα αντίστοιχα τόξα. [9]

Στο σχήμα 1.2.2.2, η απόσταση (UA-UE') τριχοτομείται στα τμήματα (UA-T), (TP) και (P-UE'). Το σημείο P είναι το σημείο τομής της κοινής εφαπτομένης τόξου συναρμογής και κυκλικού τόξου με τον άξονα των x, ενώ το σημείο T είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης του τόξου συναρμογής στο σημείο εκείνο που διχοτομεί την εκτροπή f , με τον άξονα x.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αρχικά θα αποδειχθεί ότι $(P-UE') = \frac{l_u}{3}$: από τα όμοια τρίγωνα (O-J-UE)

και (UE-P-UE') προκύπτει η αναλογία:

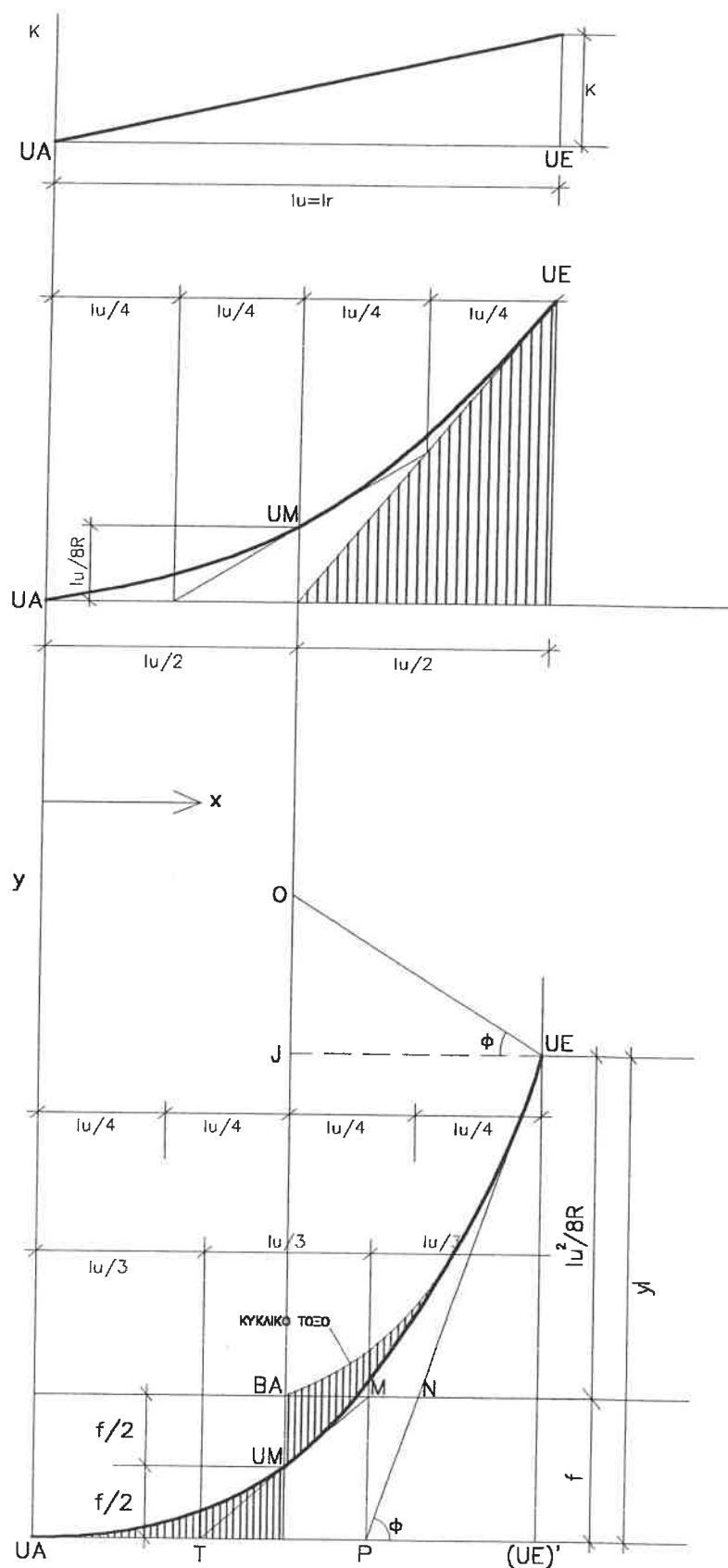
$$\frac{(P-UE)}{(O-UE)} = \frac{(UE-UE')}{(UE-J)} \Leftrightarrow \frac{(P-UE)}{R} = \frac{y_{l_u}}{\frac{l_u}{2}} \Leftrightarrow \frac{(P-UE)}{R} = \frac{\frac{l_u^2}{6R}}{\frac{l_u}{2}} \Leftrightarrow (P-UE) = \frac{l_u}{3}$$

Επίσης από το τρίγωνο (UE-P-UE') προκύπτει $(P-UE') = (P-UE) \cdot \cos \phi = \frac{l_u}{3} \cdot \cos \phi$. Η

γωνία ϕ μπορεί να θεωρηθεί πολύ μικρή πολύ μικρή, δηλαδή $\phi \rightarrow 0$ οπότε $\cos \phi \rightarrow 1$ και τελικά $(P-UE') = \frac{l_u}{3}$.

Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι και $(TP) = \frac{l_u}{3}$. Πράγματι ισχύει $(TP) = 2(BA-M)$ (τα τετράγωνα που σχηματίζονται από την διχοτόμηση της εκτροπής f είναι ίσα, άρα ίσες είναι και οι πλευρές τους).

$$\text{Όμως } (BA-M) = (BA-N) - (MN) = \frac{l_u}{4} - (MN).$$



Σχήμα 1.2.2.2

i/ Διάγραμμα καμπυλότητας ii/ Τόξο συναρμογής

Πηγή: [8] Bild 4.2, σελ 32

UA: αρχή τόξου συναρμογής

UE: τέλος τόξου συναρμογής

k: καμπυλότητα σε μ^{-1}

lu: μήκος τόξου συναρμογής

ϕ ή τ : γωνία που σχηματίζει η κοινή εφαπτομένη του τόξου συναρμογής και του κυκλικού τόξου στο κοινό τους σημείο, με τον άξονα της ευθυγραμμίας

f: εκτροπή του κυκλικού τόξου

Αρκεί λοιπόν να προσδιοριστεί το τμήμα MN. Είναι

$$\tan \phi = \frac{(MP)}{(MN)} = \frac{f}{(MN)} \Leftrightarrow (MN) = \frac{f}{\tan \phi} = \frac{\frac{l_u^2}{24R}}{\frac{l_u}{2R}} \Leftrightarrow (MN) = \frac{l_u}{12}$$

$$\text{Οπότε } (BA - M) = \frac{l_u}{4} - (MN) = \frac{l_u}{4} - \frac{l_u}{12} = \frac{l_u}{6} \text{ και τέλος } (TP) = 2(BA - M) = 2 \cdot \frac{l_u}{6} \Leftrightarrow (TP) = \frac{l_u}{3}.$$

$$\text{Συνεπάγεται ότι } (UA - T) = (UA - UE') - (P - UE') - (TP) = l_u - \frac{l_u}{3} - \frac{l_u}{3} \Leftrightarrow (UA - T) = \frac{l_u}{3}$$

Παρακάτω δίνεται ο τρόπος υπολογισμού του τόξου συναρμογής κλωθοειδούς. Οι υπολογισμοί είναι πολύ πιο πολύπλοκοι, λόγω της ανάλυσης με ανάπτυξη σειρών.

Αν αντικατασταθεί στην εξίσωση (1.2.2.3) την καμπυλότητα με $k = \frac{1}{r}$ και $k_x = \frac{1}{r_x}$

$$\text{προκύπτει: } \frac{1}{r_x} = \frac{l_x}{l_u} \cdot \frac{1}{r} \Leftrightarrow \boxed{r_x \cdot l_x = r \cdot l_u} \dots\dots\dots(1.2.2.4).$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι το γινόμενο της ακτίνας με το μήκος του τόξου είναι σταθερό. Ακριβώς αυτή την ιδιότητα έχει η κλωθοειδής. Είναι ένα σπирάλ, που το μήκος του μικραίνει αυξανομένης της ακτίνας.

Για τον υπολογισμό των εξισώσεων των μεγεθών αυτών βασιζόμαστε στη διαφορική σχέση: $\boxed{dl = r \cdot d\tau}$ (1.2.2.12)

Η σχέση αυτή αποδεικνύεται εύκολα αν σκεφτούμε ότι η καμπυλότητα $K=1/r$ είναι ίση με το λόγο της μεταβολής $d\tau$ της γωνίας τ προς της μεταβολή dl του μήκους l του τόξου συναρμογής.

Η εξίσωση (1.2.2.12) πολλαπλασιάζεται και στα δύο μέλη με l . Ο παράγοντας $r \cdot l$ στο δεξιό μέλος της εξίσωσης μπορεί να εκληφθεί σταθερός λόγω της σχέσης (1.2.2.4). Το τελευταίο βήμα είναι η ολοκλήρωση.

Η διαδικασία που περιγράφηκε στο πλαίσιο είναι

$$dl = r \cdot d\tau \Leftrightarrow l \cdot dl = rl \cdot d\tau \Leftrightarrow \int l \cdot dl = \int rl \cdot d\tau \Leftrightarrow \int l \cdot dl = rl \int d\tau \Leftrightarrow \frac{l^2}{2} = rl \cdot \tau \Leftrightarrow$$

$$\frac{l}{2} = r \cdot \tau \dots\dots\dots(1.2.2.13) \quad \text{ή} \quad \tau = \frac{l}{2 \cdot r} \dots\dots\dots(1.2.2.14)$$

Επίσης ισχύει

$$\cos \tau = \frac{dx}{dl} \dots\dots\dots(1.2.2.15)$$

$$\sin \tau = \frac{dy}{dl} \dots\dots\dots(1.2.2.16)$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις μπορούν να αποτελέσουν την παραμετρική παράσταση της κλωθοειδούς, αν διατυπωθούν τα x και y ως συνάρτηση των l και τ . Έτσι:

Αντικαθιστώντας τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις μέσω των σειρών τους:

$$1 - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} - \frac{\tau^6}{6!} + \dots = \frac{dx}{dl} \dots\dots\dots(1.2.2.17)$$

$$1 - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^5}{5!} - \frac{\tau^7}{7!} + \dots = \frac{dy}{dl} \dots\dots\dots(1.2.2.18)$$

Μετά την ολοκλήρωσή τους:

$$x = l \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} + \frac{\tau^4}{216} - \frac{\tau^6}{9360} + \dots\right) \dots\dots\dots(1.2.2.19)$$

$$y = \frac{l \cdot \tau}{3} \left(1 - \frac{\tau^3}{42} + \frac{\tau^5}{1320} - \frac{\tau^7}{75600} + \dots\right) \dots\dots\dots(1.2.2.20)$$

Όσον αφορά τις εξισώσεις (1.2.2.19) και (1.2.2.20) είναι επαρκής ο υπολογισμός τους μέχρι το τέταρτο μέλος. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις (1.2.2.21) και (1.2.2.22) με τις οποίες υπολογίζονται οι συντεταγμένες x, y του τόξου συναρμογής σε κάθε σημείο του συναρτήσεως της γωνίας τ :

$$x = l \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{21,6} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{43,333}\right)\right)\right) \dots\dots\dots(1.2.2.21)$$

$$y = \frac{l \cdot \tau}{3} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{14} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{31.429} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{57.27} \right) \right) \right) \dots\dots\dots (1.2.2.22)$$

Αν σ' αυτές τις εξισώσεις τεθεί $l = l_u$ προκύπτουν οι συντεταγμένες του U_E (x_{UE} και y_{UE}). Έχει υποτεθεί ότι το σημείο UA της αρχής του τόξου συναρμογής βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $x-y$, δηλαδή οι συντεταγμένες του είναι μηδενικές, όπως προκύπτει άλλωστε και από τις παραπάνω εξισώσεις αν θέσω $l = 0$. Επίσης η καμπυλότητα του τόξου συναρμογής στο σημείο αυτό είναι μηδενική. Οι συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου είναι:

$$x_M = x_{UE} - r \cdot \sin \tau \dots\dots\dots (1.2.2.23)$$

$$y_M = y_{UE} - r \cdot \cos \tau \dots\dots\dots (1.2.2.24)$$

Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα ισχύουν οι σχέσεις:

$$x_M = x_{UE} - (JUE). \text{ Όμως } (JUE) = r \cdot \sin \tau \text{ άρα } x_M = x_{UE} - r \cdot \sin \tau$$

$$\text{Επίσης } y_M = y_{UE} + (OJ). \text{ Όμως } (OJ) = r \cdot \cos \tau \text{ άρα } y_M = y_{UE} + r \cdot \cos \tau$$

$$\text{Για το TS: } x_{TS} = x_{UE} - (TSB). \text{ Όμως } (TSB) = \frac{y_{UE}}{\tan \tau} \text{ οπότε } x_{TS} = x_{UE} - \frac{y_{UE}}{\tan \tau}$$

$$\text{και } y_{TS} = 0$$

Τώρα μπορεί να οριστεί και η εκτροπή f από τη σχέση:

$$f = y_M - (OTS) = y_M - (r - (OJ)) = y_M - (r - r \cdot \cos \tau) = y_M + r(\cos \tau - 1) \dots\dots\dots (1.2.2.25)$$

Σημείωση: Η ίδια ανάλυση γίνεται και παρακάτω για την περίπτωση συναρμογής δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων με τόξο κλωθοειδούς

Συναρμογή δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων με τόξο κλωθοειδούς

Όταν πρέπει να τοποθετηθεί ένα τόξο συναρμογής ανάμεσα σε δύο ομόρροπα κυκλικά τόξα ($r_1 > r_2$), υπολογίζεται με την βοήθεια της (1.2.2.3) σε σχέση με την (1.2.1.23) το μήκος του τόξου συναρμογής από την διαφορά της υπερύψωσης. Η καμπυλότητα στο UA σ' αυτήν την περίπτωση δεν είναι μηδέν ($k \neq 0$). Αν η γραμμή της καμπύλης του τόξου συναρμογής επιμηκυνθεί πέρα από το UA , μέχρι το σημείο όπου η καμπυλότητα k είναι μηδενική, τέμνει την τετμημένη της καμπύλης σε απόσταση l_{UA} , όπως φαίνεται από τα παρακάτω σχήματα.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.2.2.5 ισχύει $l_u = l_{UE} - l_{UA} \dots\dots\dots(1.2.2.26)$

με l_{UA} : το μήκος του τόξου συναρμογής από το σημείο καμπής ($k=0$) μέχρι το UA.

l_{UE} : το μήκος του τόξου συναρμογής από το σημείο καμπής μέχρι το UE.

Τα παραπάνω μήκη υπολογίζονται:

$$l_{UA} = \frac{r_2 \cdot l_u}{r_1 - r_2} \dots\dots\dots(1.2.2.27) \quad l_{UE} = \frac{r_1 \cdot l_u}{r_1 - r_2} \dots\dots\dots(1.2.2.27)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα καμπυλότητας, από τα όμοια τρίγωνα προκύπτει

$$\frac{l_{UA}}{k_1} = \frac{l_{UE}}{k_2} \Leftrightarrow \frac{l_{UA}}{\frac{1}{r_1}} = \frac{l_u + l_{UA}}{\frac{1}{r_2}} \Leftrightarrow l_{UA} \cdot r_1 = l_u \cdot r_2 + l_{UA} \cdot r_2 \Leftrightarrow l_{UA} \cdot (r_1 - r_2) = l_u \cdot r_2 \Leftrightarrow l_{UA} = \frac{r_2}{r_1 - r_2} \cdot l_u$$

$$\frac{l_{UA}}{k_1} = \frac{l_{UE}}{k_2} \Leftrightarrow \frac{l_{UE} - l_u}{\frac{1}{r_1}} = \frac{l_{UE}}{\frac{1}{r_2}} \Leftrightarrow (l_{UE} - l_u) \cdot r_1 = l_{UE} \cdot r_2 \Leftrightarrow l_{UE} \cdot r_1 - l_u \cdot r_1 = l_{UE} \cdot r_2 \Leftrightarrow l_{UE} \cdot (r_1 - r_2) = l_u \cdot r_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l_{UE} = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot l_u$$

Τώρα μπορούν να καθοριστούν οι γωνίες τ , τ_{UE} και τ_{UA} . Επίσης προστίθεται και ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο καμπής της κλωθοειδούς (σύστημα ξ - η). Ισχύει: $\tau = \tau_{UE} - \tau_{UA} \dots\dots\dots(1.2.2.29)$

Από τον συνδυασμό των (1.2.2.14), (1.2.2.27) και (1.2.2.28) προκύπτει:

$$\tau = \frac{l_u}{2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2} \dots\dots\dots(1.2.2.30)$$

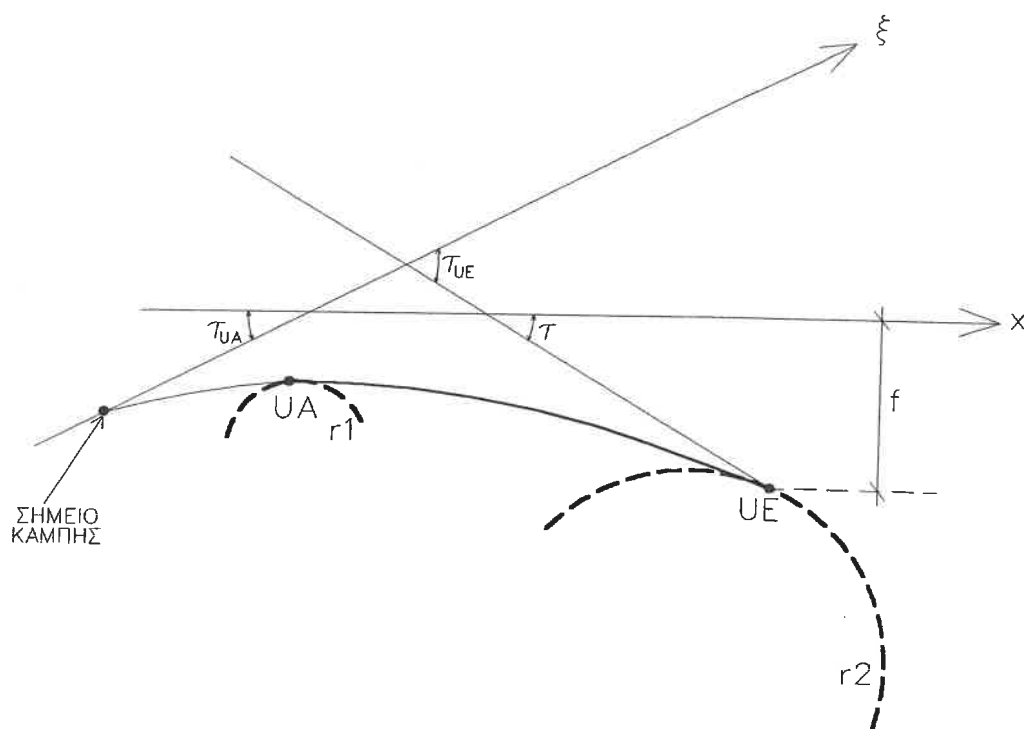
ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Πράγματι είναι (1.2.2.5): $\tau = \frac{l}{2 \cdot r}$ γενικά, άρα $\tau_{UA} = \frac{l_{UA}}{2 \cdot r_1}$ και $\tau_{UE} = \frac{l_{UE}}{2 \cdot r_2}$, (1.2.2.27):

$$l_{UA} = \frac{r_2 \cdot l_u}{r_1 - r_2}, (1.2.2.28): \quad l_{UE} = \frac{r_1 \cdot l_u}{r_1 - r_2}$$

Επομένως η (1.2.2.29) γίνεται:

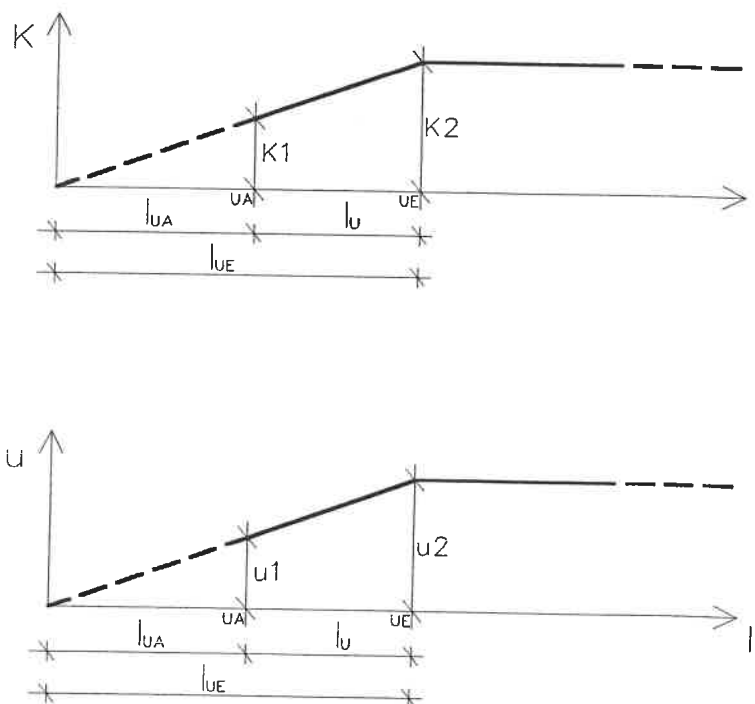
$$\begin{aligned} \tau = \tau_{UE} - \tau_{UA} &= \frac{l_{UE}}{2r_2} - \frac{l_{UA}}{2r_1} = \frac{r_1}{r_1 - r_2} l_u \cdot \frac{1}{2r_2} - \frac{r_2}{r_1 - r_2} l_u \cdot \frac{1}{2r_1} = \frac{r_1^2 \cdot l_u - r_2^2 \cdot l_u}{2r_1 r_2 (r_1 - r_2)} = \frac{l_u}{2} \cdot \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2 (r_1 - r_2)} = \\ &= \frac{l_u}{2} \cdot \frac{(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)}{r_1 r_2 (r_1 - r_2)} \Leftrightarrow \tau = \frac{l_u}{2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \end{aligned}$$



Σχήμα 1.2.2.3

Συναρμογή δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων με τόξο κλωθοειδούς

Πηγή: [7] Bild 3.3.7.2, σελ 50



Σχήμα 1.2.2.4

Διάγραμμα καμπυλότητας-πρανές υπερύψωσης κατά την συναρμογή δύο ομόρροπων τόξων με τόξο κλωθοειδούς

Διάγραμμα καμπυλότητας-πρανές υπερύψωσης κατά την συναρμογή δύο ομόρροπων τόξων με τόξο κλωθοειδούς

UA: αρχή τόξου συναρμογής

UE: τέλος τόξου συναρμογής

k1: καμπυλότητα μικρότερου κυκλικού τόξου ($k_1 > k_2$)

k2: καμπυλότητα μεγαλύτερου κυκλικού τόξου

u1: καμπυλότητα κυκλικού τόξου με την μικρότερη υπερύψωση

u2: καμπυλότητα κυκλικού τόξου με την μεγαλύτερη υπερύψωση

φ ή τ: γωνία που σχηματίζει η κοινή εφαπτομένη του τόξου συναρμογής και του κυκλικού τόξου στο κοινό τους σημείο, με τον άξονα της ευθυγραμμίας

f: εκτροπή του κυκλικού τόξου

Για τον υπολογισμό των συντεταγμένων πρέπει να καθοριστεί η στροφή του συστήματος ξ-η ως προς το σύστημα x-y, δηλαδή η γωνία τ_{UA} :

$$\tau_{UA} = \frac{l_u}{2} \cdot \frac{r_2}{r_1 \cdot (r_1 - r_2)} \dots\dots\dots (1.2.2.31)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η παραπάνω σχέση προκύπτει από τον συνδυασμό της (1.2.2.27) και της $\tau_{UA} = \frac{l_{UA}}{2 \cdot r_1}$:

$$\tau_{UA} = \frac{l_{UA}}{2 \cdot r_1} = \frac{1}{2r_1} \cdot \frac{r_2}{r_1 - r_2} l_u \Leftrightarrow \tau_{UA} = \frac{l_u}{2} \cdot \frac{r_2}{r_1 \cdot (r_1 - r_2)}$$

Ομοίως, από τον συνδυασμό της (1.2.2.28) και της $\tau_{UE} = \frac{l_{UE}}{2 \cdot r_2}$ προκύπτει:

$$\tau_{UE} = \frac{l_{UE}}{2 \cdot r_2} = \frac{1}{2r_2} \cdot \frac{r_1}{r_1 - r_2} l_U \Leftrightarrow \tau_{UE} = \frac{l_U}{2} \cdot \frac{r_1}{r_2 \cdot (r_1 - r_2)}$$

Με την βοήθεια των (1.2.2.21) και (1.2.2.23) υπολογίζονται οι συντεταγμένες στο σύστημα ξ-η των σημείων αρχής και τέλους UA και UE:

$$\xi_{UA} = \frac{l_{UA} \cdot \tau_{UA}}{3} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{14} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{31.429} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{57.27} \right) \right) \right) \dots\dots\dots (1.2.2.32)$$

$$\eta_{UA} = l_{UA} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{10} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{21,6} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{43,333} \right) \right) \right) \dots\dots\dots (1.2.2.33)$$

$$\xi_{UE} = \frac{l_{UE} \cdot \tau_{UE}}{3} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{14} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{31.429} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{57.27} \right) \right) \right) \dots\dots\dots(15.2.2.34)$$

$$\eta_{UE} = l_{UE} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{10} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{21,6} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{43,333} \right) \right) \right) \dots\dots\dots(15.2.2.35)$$

Στη συνέχεια με την βοήθεια των παρακάτω εξισώσεων υπολογίζονται οι συντεταγμένες του UE στο σύστημα x-y:

$$x_{UE} = (\eta_{UE} - \eta_{UA}) \cdot \sin \tau_{UA} + (\xi_{UE} - \xi_{UA}) \cdot \cos \tau_{UA} \dots\dots\dots(1.2.2.36)$$

$$y_{UE} = (\eta_{UE} - \eta_{UA}) \cdot \cos \tau_{UA} + (\xi_{UE} - \xi_{UA}) \cdot \sin \tau_{UA} \dots\dots\dots(1.2.2.37)$$

$$x_{UA} = y_{UA} = 0 \dots\dots\dots(1.2.2.38)$$

1.3 Αύξηση της υπερύψωσης-καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής

1.3.1 Το πρανές υπερύψωσης με αύξηση της υπερύψωσης με την μορφή τετραγωνική παραβολής

Αφορμή για τη νέα διαμόρφωση των πρανών και των τόξων συναρμογής ήταν η αύξηση της ταχύτητας από 100 σε 160km/h στην δεκαετία του '30 στους σιδηρόδρομους της Γερμανίας, όπου χρειάστηκαν τόξα συναρμογής με μήκος ως και 192m, ενώ μέχρι τότε αρκούσε το μήκος των 120m. Στα μεγάλα τόξα συναρμογής χρειάστηκαν εκτροπές μέχρι 1.40m. Αυτές προκαλούσαν συχνά στις βελτιώσεις των γραμμών τέτοιες δαπάνες, έτσι ώστε σε μερικά σημεία να μην μπορεί να επιτευχθεί αύξηση ταχύτητας (σημεία βραδυπορείας). [9], [10]

Παρατηρώντας την εξίσωση (1.2.2.3) γίνεται αντιληπτό ότι για μεγάλες ταχύτητες καθοριστικό για τον προσδιορισμό του μήκους του πρανούς και άρα και του μήκους του τόξου συναρμογής είναι το όριο

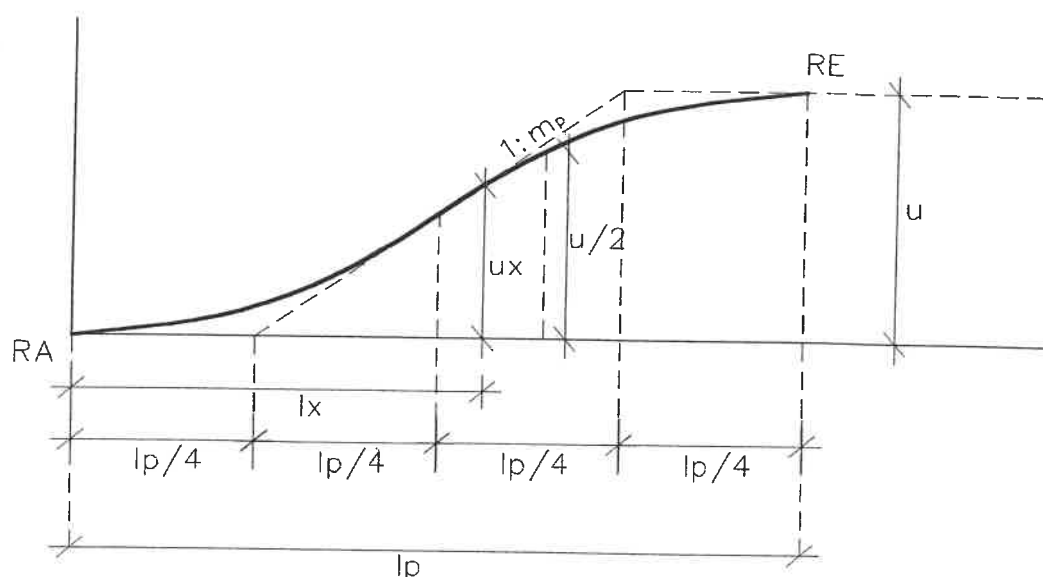
$$l_{\min} = \frac{V^3}{23.4R} - 3.63V \cdot u \text{ που οφείλεται στην περιστροφική επιτάχυνση. Για να}$$

διατηρηθερί λοιπόν χαμηλά η περιστροφική επιτάχυνση και επακόλουθα και το

μήκος του τόξου συναρμογής, πραγματοποιείται στρογγυλοποίηση του πρανούς στα άκρα του, όπου η περιστροφική επιτάχυνση εμφανίζει τις μεγαλύτερες τιμές της.[9]

Έτσι τοποθετούνται δύο τετραγωνικές παραβολές ίδιου μήκους αντισυμμετρικά ως προς το μέσο του πρανούς. Η μορφή αυτή του πρανούς είναι η ιδανική διαμόρφωση σε σχέση με την περιστροφική επιτάχυνση. Στο εξής θα ονομάζεται *p*-πρανές και θα τα μεγέθη που σχετίζονται με αυτό θα χαρακτηρίζονται με τον δείκτη *p*.

Το *p*-πρανές καθορίζεται, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.3.1.1, μέσω του μήκους του l_p και της υπερύψωσης u στο τέλος του πρανούς. Η υπερύψωση u_M στο μέσον του πρανούς είναι $u_M = \frac{u}{2}$ (1.3.1.1) [10]



Σχήμα 1.3.1.1

Πρανές υπερύψωσης με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής (*p*-πρανές)

Πηγή: [9] Bld 2, σελ 99

u : υπερύψωση στο τέλος του πρανού σε mm

u_x : υπερύψωση τυχαιού σημείου του πρανού υπερύψωσης

l_p : μήκος τόξου συναρμογής

x : απόσταση τυχαιού σημείου του πρανού υπερύψωσης από την αρχή του

l_p : μήκος τόξου συναρμογής

x : απόσταση τυχαίου σημείου του πρανούς υπερύψωσης από την αρχή του

Η κλίση του πρανούς αυξάνεται γραμμικά από την αρχή RA μέχρι το μέσον RM του πρανούς κατά την ποσότητα $\frac{1}{m_p} = \frac{2u}{l_p}$ (1.3.1.2) και μειώνεται κατά την ίδια ποσότητα από το μέσον RM μέχρι το τέλος RE, όπου και μηδενίζεται. [10]

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Ο τύπος (61.3.1.2) προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται στο μέσο

του πρανούς: $\frac{1}{m_p} = \frac{\frac{u}{2}}{\frac{l_p}{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{m_p} = \frac{2u}{l_p}$.

Στο μέσον RM του πρανούς, η κλίση έχει την τιμή $\frac{1}{m_p} = \frac{2u}{l_p}$ ή

$$m_p = \frac{l_p}{2u} = 0.5 \frac{l_p}{u} \text{(1.3.1.3)}$$

Η υπερύψωση υπολογίζεται στο πρώτο ήμισυ του πρανούς ως $u_x = \frac{2 \cdot \Delta u \cdot x^2}{l_R^2}$ (1.3.1.4)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Αν υποθεθεί ότι η αρχική υπερύψωση u_{RA} είναι μηδέν, τότε η εξίσωση της παραβολικής καμπύλης είναι $u_x = a \cdot x^2$.

Όταν $x = \frac{l_R}{2}, u_x = \frac{\Delta u}{2} = \frac{u}{2}$. Επομένως προκύπτει $\frac{u}{2} = a \cdot \frac{l_R^2}{4} \Leftrightarrow a = 2 \frac{u}{l_R^2}$ και η τελική

εξίσωση $u_x = \frac{2 \cdot \Delta u \cdot x^2}{l_R^2}$.

Στο δεύτερο ήμισυ του πρανούς η υπερύψωση υπολογίζεται από τον τύπο $u_x = \Delta u - \frac{2 \cdot \Delta u \cdot (l_R - x)^2}{l_R^2}$ (1.3.1.5)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η εξίσωση της παραβολικής καμπύλης είναι $u_x - u = a \cdot (x - l_R)^2$.

$$\text{Έτσι συνολικά: } l_{\min} = \max \begin{cases} 800 \cdot u \\ 8V \cdot u \\ \frac{V^3}{11.7R} - 7.26V \cdot u \end{cases} \dots\dots\dots(1.3.1.13)$$

Για την εξίσωση (1.3.1.12) ισχύει ό,τι ειπώθηκε και για την εξίσωση 1.2.2.2. Δηλαδή ότι αυτή μπορεί να είναι καθοριστική, δηλαδή να δίνει τη μεγαλύτερη τιμή μόνο σε περίπτωση μεγάλης πλευρικής επιτάχυνσης και μικρής υπερύψωσης.

Ο περιορισμός της εξίσωσης $l_{\min} = 800 \cdot u$ είναι καθοριστικός μόνο για ταχύτητες $V < 100 \text{ km/h}$. Πράγματι, για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h το γινόμενο $8V$ θα είναι μεγαλύτερο από 800 , άρα ούτως ή άλλως θα επικρατεί ο περιορισμός $l_{\min} = 8V \cdot u$. Δεδομένου όμως ότι γενικά το p-πρανές χρησιμοποιείται για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h , ο περιορισμός $l_{\min} = 800 \cdot u$ δεν έχει καμία πρακτική σημασία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.1 [7]

Μας δίνεται ένα ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης μήκους 160 m . Η υπερύψωση αυξάνεται από $0-120 \text{ mm}$. Ζητούνται:

- α) οι τιμές της υπερύψωσης ανά βήματα 20 m .
- β) το ευθύγραμμο πρανές πρέπει να μετατραπεί σε p-πρανές.

Ζητούνται οι τιμές της υπερύψωσης σε βήματα των 20 m .

Λύση: α) Είναι $u_x = \frac{\Delta u}{l_R} \cdot x + u_{R_A} \Leftrightarrow u_x = \frac{120}{160} \cdot x + 0 \Leftrightarrow u_x = \frac{120}{160} \cdot x = 0.75x$

β) Είναι $u_x = \frac{2 \cdot \Delta u \cdot x^2}{l_R^2} \Leftrightarrow u_x = \frac{2 \cdot 120}{160^2} \cdot x^2 = 0.00937x^2$

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα και για τις δύο περιπτώσεις. Δεν στρογγυλοποιούνται, εφόσον πρόκειται για πραγματικές τιμές.

x (m)	0	20	40	60	80	100	120	140	160
u_x (mm) Ευθ.πρανες	0	15	30	45	60	75	90	105	120
u_{xp} (mm) p-πρανες	0	3,75	15	33,75	60	86,25	105	116,25	120
$u_{xp} - u_x$ (mm)	0	-11,25	-15	-11,25	0	11,25	15	11,25	0

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.2: [9]

Δίνονται: $V=160\text{km/h}$, $R=2000\text{m}$, $u=60\text{mm}=0.060\text{m}$

Λύση: Το ελάχιστο μήκος του πρανούς υπερύψωσης υπολογίζεται

$$l_{\min} = \max \left\{ \begin{array}{l} 800 \cdot 0.060 \\ 8 \cdot 160 \cdot 0.060 \\ \frac{160^3}{11.7 \cdot 2000} - 7.26 \cdot 160 \cdot 0.060 \end{array} \right. = \max \left\{ \begin{array}{l} 48 \\ 76.8 \\ 105.3 \end{array} \right. = 105.3\text{m}$$

Δηλαδή το ελάχιστο μήκος του πρανούς προσδιορίστηκε με βάση τον περιορισμό που προήλθε από την μέγιστη τιμή του τινάγματος C κι αυτό γιατί έχει δοθεί μεγάλη ταχύτητα V και μικρή σχετικά υπερύψωση u .

Παρακάτω παρατίθενται οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές που προτείνονται για το πρανές αυτό στο [8]:

Σημείωση: Στη συνέχεια παρατίθενται κάποιες μέγιστες και ελάχιστες τιμές που αναφέρονται στο εγχειρίδιο [8] της γερμανικής βιβλιογραφίας. Οι μέγιστες και ελάχιστες αυτές τιμές κατηγοριοποιούνται με βάση την ταχύτητα. Οι τιμές που αναφέρονται για ταχύτητες μεγαλύτερες από 100km/h συμπίπτουν με τα όρια που παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Όσον αφορά τις τιμές για ταχύτητες μικρότερες των 100km/h παρατίθενται ενημερωτικά, εφόσον ταχύτητες μικρότερες των 100km/h είναι εν γένει πολύ μικρές για την εφαρμογή μη-γραμμικών πρανών και δεν αφορούν αυτήν την εργασία.

Ελάχιστες τιμές: [8]

$$m_{M_{\max}} = 5V \rightarrow \left(\frac{1}{m_M} \right)_{\min} = \frac{1}{5V} \quad \text{για } V \geq 100\text{km/h} \dots\dots\dots (1.3.1.14)$$

$$m_{M_{\max}} = 2V + 300 \rightarrow \left(\frac{1}{m_M} \right)_{\min} = \frac{1}{2V + 300} \quad \text{για } V \leq 100\text{km/h} \dots\dots\dots (1.3.1.15)$$

(Ο δείκτης M δείχνει το κέντρο του πρανούς).

Μέγιστες τιμές: [8]

$$m_{M_{\min}} = 4V \rightarrow \left(\frac{1}{m_M} \right)_{\max} = \frac{1}{4V} \quad \text{για } V \geq 100\text{km/h} \dots\dots\dots (1.3.1.16)$$

$$m_{M_{\min}} = 1,25V + 275 \rightarrow \left(\frac{1}{m_M} \right)_{\max} = \frac{1}{1,25V + 275} \quad \text{για } V \leq 100 \text{ km/h} \dots (1.3.1.17)$$

Για το μήκος του πρανούς προκύπτουν οι μέγιστες και ελάχιστες αντίστοιχα οριακές τιμές:

Μέγιστες τιμές: [8]

$$l_{\max} = \frac{m_M u}{500} = 5V \cdot \frac{8V^2}{500R} \Leftrightarrow l_{\max} = 0,08 \frac{V^3}{R} \dots (5.3.1.18) \quad \text{για } V \geq 100 \text{ km/h}$$

$$l_{\max} = \frac{m_M u}{500} = (2V + 300) \cdot \frac{8V^2}{500R} \Leftrightarrow l_{\max} = \frac{0,032V^3 + 4,8V^2}{R} \dots (5.3.1.19) \quad \text{για } V \leq 100 \text{ km/h}$$

Ελάχιστες τιμές:

$$l_{\min} = \frac{m_M u}{500} = \frac{4V}{500} \left(11,8 \frac{V^2}{R} - 100 \right) = \frac{0,008V}{R} (11,8V^2 - 100R) \dots (5.3.1.20) \quad \text{για } V \geq 100 \text{ km/h}$$

$$l_{\min} = \frac{m_M u}{500} = \frac{(1,25V + 275)}{500} \left(11,8 \frac{V^2}{R} - 100 \right) = \frac{0,0025V + 0,55}{R} (11,8V^2 - 100R) \dots (5.3.1.21) \quad \text{για}$$

$$V \leq 100 \text{ km/h}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Για τον υπολογισμό των μέγιστες τιμές του μήκους $l_{\max}$ του πρανούς χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις (1.3.1.14) και (1.3.1.15) που δίνουν τις ελάχιστες τιμές της κλίσης του πρανούς.

Χρησιμοποιούμε επίσης την τιμή της κανονικής υπερύψωσης που είναι κατά τα γνωστά $u_k = 8 \frac{V^2}{R}$ και την σχέση $l = \frac{mu}{2}$.

Έτσι:

$$\text{Για } V \geq 100 \text{ km/h} \text{ είναι } l_{\max} = \frac{m_M u}{500} = 5V \cdot \frac{8V^2}{500R} \Leftrightarrow l_{\max} = 0,08 \frac{V^3}{R}$$

$$\text{Για } V \leq 100 \text{ km/h} \text{ είναι } l_{\max} = \frac{m_M u}{500} = (2V + 300) \cdot \frac{8V^2}{500R} \Leftrightarrow l_{\max} = \frac{0,032V^3 + 4,8V^2}{R}$$

Αντίστοιχα, για το υπολογισμό των ελάχιστων τιμών του μήκους πρανούς $l_{\min}$ χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (1.3.1.16) και (1.3.1.17) που δίνουν τις μέγιστες τιμές για την κλίση του πρανούς. Τέλος η υπερύψωση u παίρνει κι αυτή την ελάχιστη τιμή της, που είναι κατά τα γνωστά $u_{\min} = 11,8 \frac{V^2}{R} - 100$. Επομένως:

$$\text{Για } V \geq 100 \text{ km/h} \text{ είναι } l_{\min} = \frac{m_M u}{500} = \frac{4V}{500} \left(11.8 \frac{V^2}{R} - 100 \right) = \frac{0.008V}{R} (11.8V^2 - 100R)$$

Για $V \leq 100 \text{ km/h}$ είναι

$$l_{\min} = \frac{m_M u}{500} = \frac{(1.25V + 275)}{500} \left(11.8 \frac{V^2}{R} - 100 \right) = \frac{0.0025V + 0.55}{R} (11.8V^2 - 100R)$$

1.3.2 Το τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής

Η μεταβολή της υπερύψωσης με την μορφή τετραγωνικής παραβολής στο p -πρανές δίνεται από τον τύπο $u_p = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x^2$ Εφόσον η μεταβολή της καμπυλότητας είναι ίδια με

αυτήν της υπερύψωσης, η μεταβολή της καμπυλότητας θα υπακούει στον τύπο $k_p = \frac{2k}{l_p^2} \cdot x^2$ (1.3.2.1), ενώ η κλίση του διαγράμματος της καμπυλότητας στο

μέσον του θα είναι $\frac{1}{m} = \frac{2k}{l_p}$ (1.3.2.2). [9] , [10]

Στην συνέχεια επιχειρείται να προσδιοριστεί η εξίσωση του τόξου παραβολής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής.

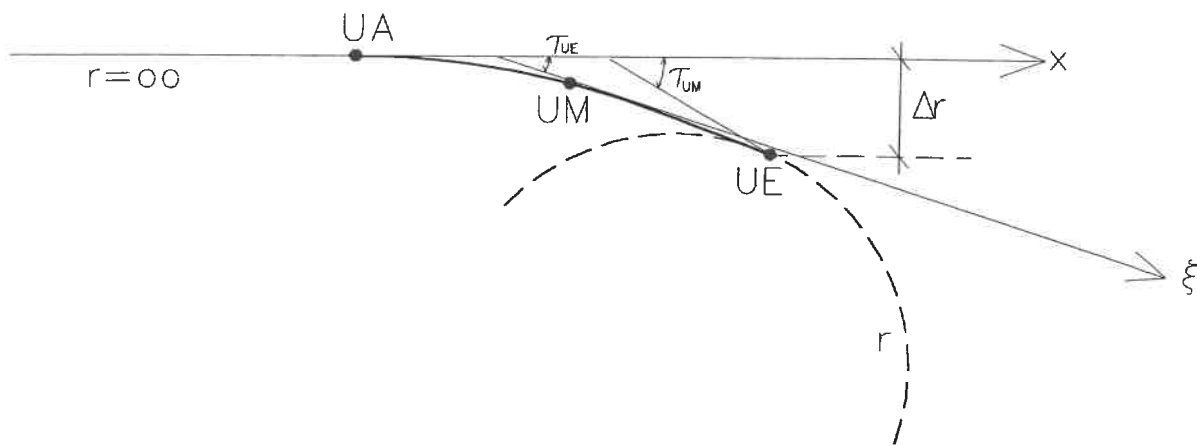
Αν υποθεθεί ότι ϕ είναι η γωνία του αντίστοιχου τόξου συναρμογής με τον οριζόντιο άξονα σε κάθε σημείο, τότε ο ορισμός της καμπυλότητας είναι $k = \frac{d\phi}{dx}$ και με την

βοήθεια της $k_p = \frac{2k}{l_p^2} \cdot x^2$ προκύπτει:

$$d\phi = k \cdot dx \rightarrow \frac{2k}{l_p^2} \cdot x^2 dx = d\phi \Leftrightarrow \int \frac{2k}{l_p^2} \cdot x^2 dx = \int d\phi \Leftrightarrow \phi = \frac{2k}{l_p^2} \cdot \frac{x^3}{3} \text{ ή}$$

$$\phi = \frac{2}{3l_p^2} \cdot x^3 \text{(1.3.2.3)}$$

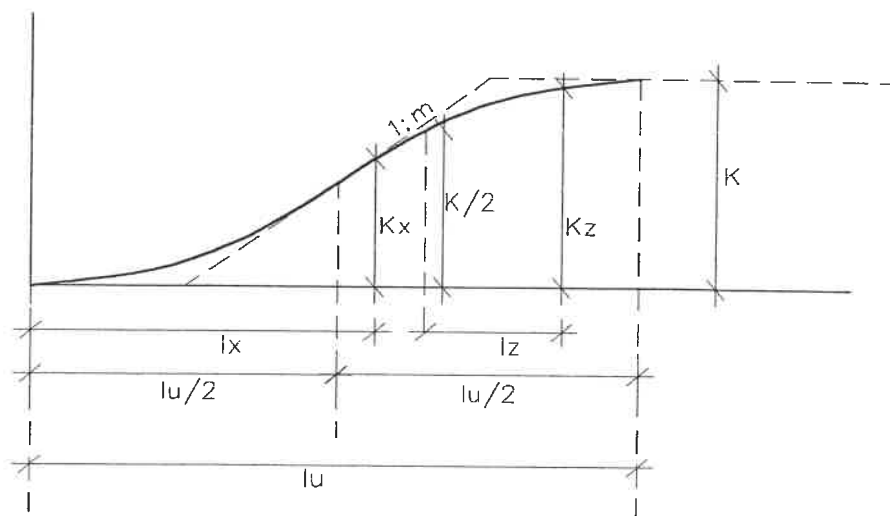
$$\text{Για } x = l_p \text{ η γωνία } \phi \text{ γίνεται } \phi = \frac{2}{3l_p^2} \cdot l_p^3 \Leftrightarrow \phi = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_p}{R} \text{(1.3.2.4)}$$



Σχήμα 1.3.2.1

Συναρμογή ευθυγραμμίας-κυκλικού τόξου με τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής

Πηγή: [7] Bild 3.3.7.3,σελ 52



Σχήμα 1.3.2.2

Διάγραμμα καμπυλότητας με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής

Πηγή: [7] Bild 3.3.7.3,σελ 52

k : καμπυλότητα στο τέλος του τόξου συναρμογής σε mm

k_x : καμπυλότητα τυχαίου σημείου του τόξου συναρμογής

l_p : μήκος τόξου συναρμογής

x : απόσταση τυχαίου σημείου του τόξου συναρμογής από την αρχή του

Όμως $\phi = \frac{dy}{dx}$ οπότε με την βοήθεια της προηγούμενης σχέσης:

$$\phi \cdot dx = dy \Leftrightarrow \frac{2}{3l_p^2 \cdot R} \cdot x^3 dx = dy \Leftrightarrow \int \frac{2}{3l_p^2 \cdot R} \cdot x^3 dx = \int dy \Leftrightarrow y = \frac{2}{3l_p^2 \cdot R} \cdot \frac{x^4}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^4}{6l_p^2 \cdot R} \dots\dots\dots(1.3.2.5)$$

Για $x = l_p$ η τεταγμένη του τόξου συναρμογής είναι

$$y = \frac{l_p^4}{6l_p^2 \cdot R} \Leftrightarrow y = \frac{l_p^2}{6R} \dots\dots\dots(1.3.2.6)$$

Κατά την εφαρμογή του τόξου συναρμογής με παραβολική αύξηση της καμπυλότητας η εκτροπή f του κυκλικού τόξου είναι

$$f_p = \frac{l_p^2}{48R} = 0.02083 \frac{l_p^2}{R} \dots\dots\dots(1.3.2.7) [9]$$

Είναι η μισή σε σχέση με την εκτροπή του κυκλικού τόξου στο τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας.

Σημείωση: Στη συνέχεια θα δούμε το τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής με διαφορική προσέγγιση, και συγκεκριμένα θα υπολογιστεί με την βοήθεια ανάπτυξης σειρών.

Ο υπολογισμός των γεωμετρικών μεγεθών πρέπει να γίνει σε δύο βήματα. Επιπλέον υποδιαιρείται η γραμμή της καμπύλης σε δύο περιοχές: [7]

Περιοχή 1: Από το UA μέχρι το UM. Το μήκος του τόξου είναι $l_u/2$. Αυτά τα μεγέθη έχουν τον δείκτη x .

Περιοχή 2: Από το UM μέχρι το UE. Το μήκος αυτού του τόξου είναι $l_u/2$. Χρησιμοποιείται ο δείκτης z .

Στην περιοχή 1 ισχύει για την γραμμή της καμπύλης

$$k_x = \frac{2 \cdot l_x^2}{r \cdot l_u^2} \dots\dots\dots(1.3.2.8) [7]$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Όπως φαίνεται από το σχήμα 1.3.2.2, η περιοχή 1 του πρηνούς έχει μορφή παραβολής με τα κοίλα άνω. Άρα ο γενικός τύπος της θα είναι $k_x = al_x^2$, όπου a σταθερά.

Όταν $l_x = \frac{l_u}{2}, k = \frac{k_u}{2}$ οπότε ο παραπάνω τύπος γίνεται $\frac{k_u}{2} = a \cdot \frac{l_x^2}{4} \Leftrightarrow a = \frac{2k_u}{l_u^2}$. Έτσι, ο τύπος της παραβολικής καμπύλης της περιοχής 1 είναι $k_x = \frac{2k_u}{l_u^2} l_x^2$. Αν τεθεί $k = \frac{1}{r}$,

$$\text{προκύπτει } k_x = \frac{2 \cdot \frac{1}{r}}{l_u^2} l_x^2 \Leftrightarrow k_x = \frac{2l_x^2}{r \cdot l_u^2}.$$

Αν, εκ νέου αντικατασταθεί και $k_x = \frac{1}{r_x}$, τότε από την (1.2.3.1) προκύπτει

$$\frac{1}{r_x} = \frac{2 \cdot l_x^2}{r \cdot l_u^2} \Leftrightarrow r_x = \frac{r \cdot l_u^2}{2 \cdot l_x^2} \dots\dots\dots(1.3.2.9)$$

$$\text{Επίσης ισχύει } dl_x = r_x \cdot d\tau_x \dots\dots\dots(1.3.2.10)$$

Σχόλιο:Αντίθετα με το ευθύγραμμο πρηνές που ο λόγος $\frac{dl}{d\tau}$ ήταν σταθερός, λόγω της σταθερής αύξησης ακτίνας και καμπυλότητας, στο παραβολικό πρηνές ο λόγος αυτός μεταβάλλεται σε κάθε σημείο του πρηνούς.

Από τον συνδυασμό των (1.3.2.9) και (1.3.2.10) προκύπτει:

$$\frac{l_x^3}{3} = \frac{r}{2} \cdot l_u^2 \cdot \tau_x \Leftrightarrow \dots\dots\dots(1.3.2.11)$$

$$\Leftrightarrow \tau = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_x^3}{r \cdot l_u^2} \dots\dots\dots(1.3.2.12)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Πράγματι, η (1.3.2.10) γίνεται:

$$dl_x = r_x \cdot d\tau_x \Leftrightarrow \frac{1}{r_x \cdot dl_x} = d\tau_x \Leftrightarrow \frac{2 \cdot l_x^2}{r \cdot l_u^2} dl_x = d\tau_x \quad \text{και ολοκληρώνοντας}$$

$$\frac{2}{r \cdot l_u^2} \int l_x^2 dl_x = \int d\tau_x \Leftrightarrow \frac{2}{r \cdot l_u^2} \cdot \frac{l_x^3}{3} = \tau \Leftrightarrow \tau = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_x^3}{r \cdot l_u^2}$$

Οπότε η αλλαγή κατεύθυνσης από το UA στο UM προκύπτει για $l_x = \frac{l_u}{2}$ και είναι:

$$\tau_{x_{UM}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{l_u^3}{r \cdot l_u^2}}{8} \Leftrightarrow \tau_{x_{UM}} = \frac{l_u}{12r} \dots\dots\dots(1.3.2.13)$$

Για τον υπολογισμό των συντεταγμένων στην περιοχή 1 χρησιμοποιούνται πάλι τις εξισώσεις :

$$\cos \tau = \frac{dx}{dl} \dots\dots\dots(1.3.2.14)$$

$$\sin \tau = \frac{dy}{dl} \dots\dots\dots(1.3.2.15)$$

Αν συνδυαστούν ανάλογα προς την κλωθοειδή με χρήση των σειρών και της εξίσωσης (1.3.2.13), συνεπάγεται:

$$x = l_x \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{7 \cdot 2!} + \frac{\tau_x^4}{13 \cdot 4!} - \frac{\tau_x^6}{19 \cdot 6!} + \dots\right) \dots\dots\dots(1.3.2.16)$$

$$y = l_x \cdot \left(\frac{\tau_x}{4} - \frac{\tau_x^3}{10 \cdot 3!} + \frac{\tau_x^5}{16 \cdot 5!} - \frac{\tau_x^7}{22 \cdot 7!} + \dots\right) \dots\dots\dots(1.3.2.17)$$

Δεδομένου ότι ο υπολογισμός μέχρι το τέταρτο μέλος των σειρών είναι επαρκής, προκύπτει για τις συντεταγμένες του τόξου:

$$x = l_x \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{14} \left(1 - \frac{\tau_x^2}{22 \cdot 286} \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{39,23}\right)\right)\right) \dots\dots\dots(1.3.2.18)$$

$$y = l_x \cdot \frac{\tau_x}{4} \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{15} \left(1 - \frac{\tau_x^2}{32} \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{57,75}\right)\right)\right) \dots\dots\dots(1.3.2.19)$$

Αν σ' αυτές τις εξισώσεις τεθούν και $l_x = \frac{l_u}{2}$ και $\tau = \tau_{x_{UM}}$, υπολογίζονται οι συντεταγμένες του U_M (x_{UM} και y_{UM}).

Στην περιοχή 2 ισχύει για την γραμμή της καμπύλης:

$$k_z = k - \frac{2 \cdot l_z^2}{r \cdot l_u^2} \dots\dots\dots(1.3.2.20)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Ο τύπος αυτός προκύπτει ως εξής: Αν στο σχήμα που φαίνεται παραπάνω θεωρηθεί ένα σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το U_E , τότε η εξίσωση της παραβολής της

περιοχής 2 θα είναι $k'_z = \frac{2 \cdot l_z^2}{r \cdot l_u^2}$. Η εξίσωση αυτή δίνει τις τιμές της καμπυλότητας k'_z .

Άρα, οι τιμές της καμπυλότητας που από την αρχή των αξόνων x-y θα είναι

$$k_z = k_u - k'_z = k_u - \frac{2 \cdot l_z^2}{r \cdot l_u^2}.$$

Αν τώρα θέσω και $k = \frac{1}{r}$ και $k_z = \frac{1}{r_z}$ προκύπτει

$$\frac{1}{r_z} = \frac{1}{r} - \frac{2 \cdot l_z^2}{r \cdot l_u^2} \Leftrightarrow \frac{1}{r_z} = \frac{l_u^2 - 2l_z^2}{r \cdot l_u^2} \Leftrightarrow r_z = \frac{r \cdot l_u^2}{l_u^2 - 2l_z^2} \dots\dots\dots(1.3.2.21)$$

Η εξίσωση (1.3.2.21) λοιπόν τίθεται στην γενική διαφορική εξίσωση:

$$dl_z = r_z d\tau_z \Leftrightarrow dl_z = \frac{r \cdot l_u^2}{l_u^2 - 2 \cdot l_z^2} \cdot d\tau_z \dots\dots\dots(1.3.2.22)$$

Σ' αυτήν την εξίσωση το τ_z είναι η μεταβολή κατεύθυνσης σε σχέση με το UE. Η ολοκλήρωση δίνει για την γωνία αυτή την εξής σχέση:

$$\tau_z = \frac{l_z}{r} - \frac{2}{3} \cdot \frac{l_z^3}{r \cdot l_u^2} \dots\dots\dots(1.3.2.23)$$

Αναλυτικά:

$$dl_z = \frac{r \cdot l_u^2}{l_u^2 - 2 \cdot l_z^2} \cdot d\tau_z \Leftrightarrow \frac{l_u^2 - 2l_z^2}{r \cdot l_u^2} dl_z = d\tau_z \Leftrightarrow \left(\frac{l_u^2}{r \cdot l_u^2} - \frac{2l_z^2}{r \cdot l_u^2} \right) dl_z = d\tau_z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dl_z}{r} - \int \frac{2l_z^2}{r \cdot l_u^2} dl_z = \int d\tau_z \Leftrightarrow \frac{l_z}{r} - \frac{2}{r \cdot l_u^2} \cdot \frac{l_z^3}{3} = \tau_z \Leftrightarrow \tau_z = \frac{l_z}{r} - \frac{2}{3} \cdot \frac{l_z^3}{r \cdot l_u^2}$$

Ετσι καθορίζεται η συνολική μεταβολή κατεύθυνσης μεταξύ UM και UE: αν όπου l_z τεθεί $\frac{l_u}{2}$:

$$\tau_{z_{UM}} = \frac{l_u}{r} - \frac{2}{3} \cdot \frac{l_u^3}{r \cdot l_u^2} = \frac{l_u}{2r} - \frac{1}{12} \cdot \frac{l_u}{r} \Leftrightarrow \tau_{z_{UM}} = \frac{5}{12} \cdot \frac{l_u}{r} \dots\dots\dots(1.3.2.24)$$

Αν προστεθεί το $\tau_{x_{UM}}$ και το $\tau_{z_{UM}}$ προκύπτει η συνολική μεταβολή κατεύθυνσης

$$\text{μεταξύ } U_A \text{ και } U_E: \tau_{UE} = \frac{l_u}{12r} + \frac{5l_u}{12r} = \frac{6l_u}{12r} = \frac{l_u}{2r} \dots\dots\dots(1.3.2.25)$$

Είναι ακριβώς τόσο μεγάλη όσο και στην κλωθοειδή.

Για τον υπολογισμό των συντεταγμένων στην περιοχή 2 πρέπει να εισαχθεί ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $\xi-\eta$ με αρχή το UE (σχήμα 1.3.2.1). Χρησιμοποιούνται και πάλι οι εξισώσεις

$\cos \tau = \frac{dx}{dl}$ και $\sin \tau = \frac{dy}{dl}$ με τις παραμέτρους τ_z και l_z . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με προηγουμένως προκύπτουν οι εξισώσεις για τις συντεταγμένες του τόξου στο σύστημα $\xi-\eta$: [7]

$$\xi = l_z \cdot \left(1 - \frac{\tau_z}{6} \cdot \left(\frac{8}{15} \cdot \frac{l_z^3}{r \cdot l_u^2} + \tau_z \cdot \left(1 - \frac{\tau_z}{20} \cdot \left(\tau_z - \frac{4 \cdot l_z^3}{105 \cdot r \cdot l_u^2} \right) \right) \right) \right) \dots \dots \dots (1.3.2.26)$$

$$\eta = \frac{l_z}{2} \cdot \left(\frac{l_z^3}{3 \cdot r \cdot l_u^2} + \tau_z \cdot \left(1 - \frac{\tau_z \cdot l_z}{12 \cdot r} - \frac{l_z^6}{54 \cdot r \cdot l_u^4} \right) \right) \dots \dots \dots (1.3.2.27)$$

Αν σ'αυτές τις εξισώσεις αντικατασταθούν $l_z = \frac{l_u}{2}$ και $\tau_z = \tau_{z_{UM}}$, προκύπτουν οι συντεταγμένες ξ_{UM} και η_{UM} . Τότε είναι δυνατή η μεταφορά στο σύστημα $x-y$: [7]

$$x_{UE} = x_{UM} + \xi_{UM} \cdot \cos \tau_{UE} + \eta_{UM} \cdot \sin \tau_{UE} \dots \dots \dots (1.3.2.28)$$

$$y_{UE} = y_{UM} + \xi_{UM} \cdot \sin \tau_{UE} + \eta_{UM} \cdot \cos \tau_{UE} \dots \dots \dots (1.3.2.29)$$

$$\text{και } x_{UA} = y_{UA} = 0 \dots \dots \dots (1.3.2.30)$$

Το τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής μεταξύ δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων [7]

Αν ένα τόξο συναρμογής με παραβολική αύξηση της καμπυλότητας βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ομόρροπα κυκλικά τόξα, δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί η περίπτωση αυτή ως περίπτωση ευθυγραμμίας-κυκλικού τόξου.

Αυτές οι εξισώσεις προκύπτουν πάλι από το διάγραμμα της καμπυλότητας και γι'αυτό απαιτείται η εισαγωγή 2 περιοχών. [7]

Περιοχή 1: Από το UA μέχρι το UM. Το μήκος του τόξου είναι $\frac{l_u}{2}$ και τα συναρτημένα μεγέθη έχουν τον δείκτη x.

Περιοχή 2: Από το UM μέχρι το UE. Το μήκος του τόξου είναι $\frac{l_u}{2}$ και τα συναρτημένα μεγέθη έχουν τον δείκτη z.

Στο UA ισχύει: ακτίνα r_1 , καμπυλότητα k_1 .

Στο UE ισχύει: ακτίνα r_2 ($< r_1$), καμπυλότητα k_2 ($> k_1$).

Η γραμμή της καμπύλης στην περιοχή 1 έχει εξίσωση:

$$k_x = k_1 + 2 \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot l_u^2} \cdot l_x^2 \dots \dots \dots (1.3.2.31)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Ο γενικός τύπος του παραβολικού τόξου του τομέα 1 είναι $(k_x - k_1) = a l_x^2$ (παραβολή με κέντρο διάφορα του (0,0) και τα κοίλα άνω) όπου α

σταθερά. Όταν $l_x = \frac{l_u}{2}, k_x = \frac{k_2 - k_1}{2}$ οπότε ο γενικός τύπος γίνεται:

$$\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} - k_1 = a \cdot \frac{l_u^2}{4} \Leftrightarrow \frac{k_2}{2} - \frac{k_1}{2} = a \cdot \frac{l_u^2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2r_2} - \frac{1}{2r_1} = a \cdot \frac{l_u^2}{4} \Leftrightarrow a = 2 \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2 \cdot l_u^2}. \quad \text{Επομένως ο}$$

γενικός τύπος γίνεται $k_x = k_1 + 2 \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot l_u^2} \cdot l_x^2$.

Αν αντικατασταθεί $k_x = \frac{1}{r_x}$ και $k_1 = \frac{1}{r_1}$ προκύπτει

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_1} + 2 \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2 l_u^2} \cdot l_x^2 = \frac{r_2 l_u^2}{r_1 r_2 l_u^2} + \frac{2(r_1 - r_2)}{r_1 r_2 l_u^2} \cdot l_x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{r_x} = \frac{r_2 l_u^2 + 2r_1 l_x^2 - 2r_2 l_x^2}{r_1 r_2 l_u^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_x = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot l_u^2}{l_u^2 \cdot r_2 + 2 \cdot r_1 \cdot l_x^2 - 2 \cdot r_2 \cdot l_x^2} \dots \dots \dots (1.3.2.32)$$

Αν το δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης τεθεί στην διαφορική εξίσωση
 $dl_x = r_x \cdot d\tau_x \dots\dots\dots(1.3.2.33)$

Θα προκύψει από την ολοκλήρωση την εξίσωση για την γωνία των εφαπτομένων:

$$\tau_x = \frac{l_x}{r_1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{l_x^3}{l_u^2} \cdot \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2} \right) \dots\dots\dots(1.3.2.34)$$

Αναλυτικά:

$$\begin{aligned} dl_x &= \frac{r_1 r_2 l_u^2}{r_2 l_u^2 + 2r_1 l_x^2 - 2r_2 l_x^2} \cdot d\tau_x \Leftrightarrow \frac{r_2 l_u^2 + 2r_1 l_x^2 - 2r_2 l_x^2}{r_1 r_2 l_u^2} dl_x = d\tau_x \Leftrightarrow \int \frac{r_2 l_u^2 + 2(r_1 - r_2) l_x^2}{r_1 r_2 l_u^2} dl_x = \int d\tau_x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int \frac{r_2 l_u^2}{r_1 r_2 l_u^2} dl_x + \int \frac{2(r_1 - r_2) l_x^2}{r_1 r_2 l_u^2} dl_x = \int d\tau_x \Leftrightarrow \frac{l_x}{r_1} + \frac{2(r_1 - r_2)}{r_1 r_2 l_u^2} \cdot \frac{l_x^3}{3} = \tau_x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tau_x = \frac{l_x}{r_1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \cdot \frac{l_x^3}{l_u^2} \end{aligned}$$

Αν τεθεί επίσης $l_x = \frac{l_u}{2}$, προκύπτει η αλλαγή κατεύθυνσης από το UA στο UM:

$$\tau_{x_{UM}} = \frac{l_u}{r_1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \cdot \frac{l_u^3}{l_u^2} = \frac{l_u}{12} \left(\frac{6}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \Leftrightarrow \tau_{x_{ΘM}} = \frac{l_u}{12} \cdot \left(\frac{5}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \dots\dots\dots(1.3.2.35)$$

Για τον υπολογισμό των συντεταγμένων ορίζεται ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων η αρχή του τόξου συναρμογής. Έτσι, αντίστοιχα προς την περίπτωση ευθυγραμμίας-κυκλικού τόξου, πρέπει να ολοκληρωθούν οι εξισώσεις

$$x = l \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} + \frac{\tau^4}{216} - \frac{\tau^6}{9360} + \dots \right) \quad \text{και} \quad y = \frac{l \cdot \tau}{3} \left(1 - \frac{\tau^3}{42} + \frac{\tau^5}{1320} - \frac{\tau^7}{75600} + \dots \right) \quad \text{Το αποτέλεσμα}$$

είναι πάλι σειρές, που μπορούν να διακοπούν μετά από το τέταρτο μέλος. Αν τεθεί

$$A = \frac{l_x^3}{l_u^2} \dots\dots\dots(1.3.2.36) \quad \text{και} \quad B = \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2} \dots\dots\dots(1.3.2.37) \quad \text{τότε οι εξισώσεις}$$

που δίνουν τις συντεταγμένες για την περιοχή1 είναι: [7]

$$x = l_x - \frac{l_x \cdot \tau_x}{6} \cdot \left(\tau_x - \frac{8}{15} \cdot A \cdot B \left(\frac{\tau_x^2}{5} \cdot \frac{\tau_x}{4} - \frac{4}{21} \cdot A \cdot B \right) \right) \dots\dots\dots(1.3.2.38)$$

$$y = \frac{l_x}{2} \cdot \left(\tau_x - \frac{1}{2} \cdot A \cdot B - \frac{\tau_x}{12} \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot A^2 \cdot B^2 - \tau_x \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot A \cdot B - \tau_x \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{30} \right) \right) \right) \right) \dots (1.3.2.39)$$

Αν επίσης αντικατασταθεί $l_x = \frac{l_u}{2}$ και $\tau_x = \tau_{x_{UM}}$ στις εξισώσεις (1.3.2.38) και (1.3.2.39) υπολογίζονται οι συντεταγμένες του U_M .

Στην περιοχή 2 η γραμμή της καμπύλης εκφράζεται:

$$k_z = k_2 + 2 \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot l_u^2} \cdot l_z^2 \dots (1.3.2.40)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Ο γενικός τύπος του παραβολικού τόξου της περιοχής 1 είναι $(k_z - k_2) = a l_z^2$ (παραβολή με κέντρο διάφορο του (0,0) και τα κοίλα άνω) όπου α σταθερά. Όταν

$l_z = \frac{l_u}{2}, k_z = \frac{k_2 - k_1}{2}$ οπότε ο γενικός τύπος γίνεται:

$$\frac{k_1}{2} - \frac{k_2}{2} - k_2 = a \cdot \frac{l_u^2}{4} \Leftrightarrow -\left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}\right) = a \cdot \frac{l_u^2}{4} \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2}\right) = a \cdot \frac{l_u^2}{4} \Leftrightarrow a = -2 \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2 \cdot l_u^2}. \text{ Επομένως ο}$$

γενικός τύπος γίνεται $k_z = k_2 - 2 \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot l_u^2} \cdot l_z^2$.

Αν αντικατασταθεί $k_z = \frac{1}{r_z}$ και $k_2 = \frac{1}{r_2}$ προκύπτει

$$\frac{1}{r_z} = \frac{1}{r_2} + 2 \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2 l_u^2} \cdot l_z^2 \Leftrightarrow \frac{1}{r_z} = \frac{r_1 l_u^2 + 2 r_1 l_z^2 - 2 r_2 l_z^2}{r_1 r_2 l_u^2} \Leftrightarrow r_z = \frac{r_1 r_2 l_u^2}{r_1 l_u^2 - 2 r_1 l_z^2 + 2 r_2 l_z^2} \dots (1.3.2.41)$$

Αν το δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης τεθεί στην διαφορική εξίσωση $dl_z = r_z \cdot d\tau_z$ προκύπτει από την ολοκλήρωση την εξίσωση για την γωνία των εφαπτομένων:

$$\tau_z = \frac{l_z}{r_2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{l_z^3}{l_u^2} \cdot \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2} \right) \dots (1.3.2.42)$$

Αναλυτικά:

$$\begin{aligned}
 dl_z &= \frac{r_1 r_2 l_u^2}{r_1 l_u^2 - 2r_1 l_z^2 + 2r_2 l_z^2} \cdot d\tau_z \Leftrightarrow \frac{r_1 l_u^2 - 2r_1 l_z^2 + 2r_2 l_z^2}{r_1 r_2 l_u^2} dl_z = d\tau_z \Leftrightarrow \int \frac{r_1 l_u^2 - 2(r_1 - r_2) l_z^2}{r_1 r_2 l_u^2} dl_z = \int d\tau_z \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \int \frac{r_1 l_u^2}{r_1 r_2 l_u^2} dl_z - \int \frac{2(r_1 - r_2) l_z^2}{r_1 r_2 l_u^2} dl_z = \int d\tau_z \Leftrightarrow \frac{l_z}{r_2} - \frac{2(r_1 - r_2)}{r_1 r_2 l_u^2} \cdot \frac{l_z^3}{3} = \tau_z \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \tau_z = \frac{l_z}{r_2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \cdot \frac{l_z^3}{l_u^2}
 \end{aligned}$$

και η μεταβολή κατεύθυνσης βρίσκεται αν τεθεί $l_z = \frac{l_u}{2}$:

$$\tau_{z_{UM}} = \frac{l_u}{r_2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \cdot \frac{l_u^3}{l_u^2} = \frac{l_u}{12} \left(\frac{6}{r_2} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) \Leftrightarrow \tau_{z_{UM}} = \frac{l_u}{12} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{5}{r_2} \right) \dots\dots\dots (1.3.2.43)$$

Τώρα μπορεί να υπολογιστεί το τ_{UE} , δηλαδή η συνολική αλλαγή κατεύθυνσης:

$$\begin{aligned}
 \tau_{UE} &= \tau_{x_{UM}} + \tau_{z_{UM}} = \frac{l_u}{12} \cdot \left(\frac{5}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{l_u}{12} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{5}{r_2} \right) = \frac{l_u}{12} \cdot \left(\frac{6}{r_1} + \frac{6}{r_2} \right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \tau_{UE} = \frac{l_u}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \dots\dots\dots (1.3.2.44)
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των συντεταγμένων στην περιοχή 2 εισάγεται ένα σύστημα συντεταγμένων ξ - η με αρχή το U_E . Σ' αυτό το σύστημα ισχύουν οι εξής εξισώσεις: (ισχύουν επίσης οι εξισώσεις (1.2.3.29) και (1.2.3.30) για τις παραμέτρους A και B , δηλαδή $A = \frac{l_x^3}{l_u^2}$ και $B = \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2}$):

$$\xi = l_z - \frac{l_z \cdot \tau_z}{6} \cdot \left(\tau_z + \frac{8}{15} \cdot A \cdot B - \frac{\tau_z^2}{5} \cdot \left(\frac{\tau_z}{4} + \frac{4}{21} \cdot A \cdot B \right) \right) \dots\dots\dots (1.3.2.45)$$

$$\eta = \frac{l_z}{2} \cdot \left(\tau_z + \frac{1}{2} \cdot A \cdot B - \frac{\tau_z}{12} \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot A^2 \cdot B^2 + \tau_z \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot A \cdot B + \tau_z \cdot \left(1 - \frac{\tau_z^2}{30} \right) \right) \right) \right) \dots\dots (1.3.2.46)$$

Αν θέσω $l_z = \frac{l_u}{2}$ και $\tau_z = \tau_{z_{UM}} = \frac{l_u}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{5}{r_2} \right)$ υπολογίζω τις συντεταγμένες ξ_{UM} και η_{UM}

του μέσου UM του τόξου απο τις εξισώσεις (1.3.2.45) και (1.3.2.46).

Οι συντεταγμένες του U_E υπολογίζονται λοιπόν δεδομένων των ξ_{UM} και η_{UM} : [7]

$$x_{UE} = x_{UM} + \xi_{UM} \cdot \cos \tau_{UE} + \eta_{UM} \cdot \sin \tau_{UE}$$

$$y_{UE} = y_{UM} + \xi_{UM} \cdot \sin \tau_{UE} + \eta_{UM} \cdot \cos \tau_{UE}$$

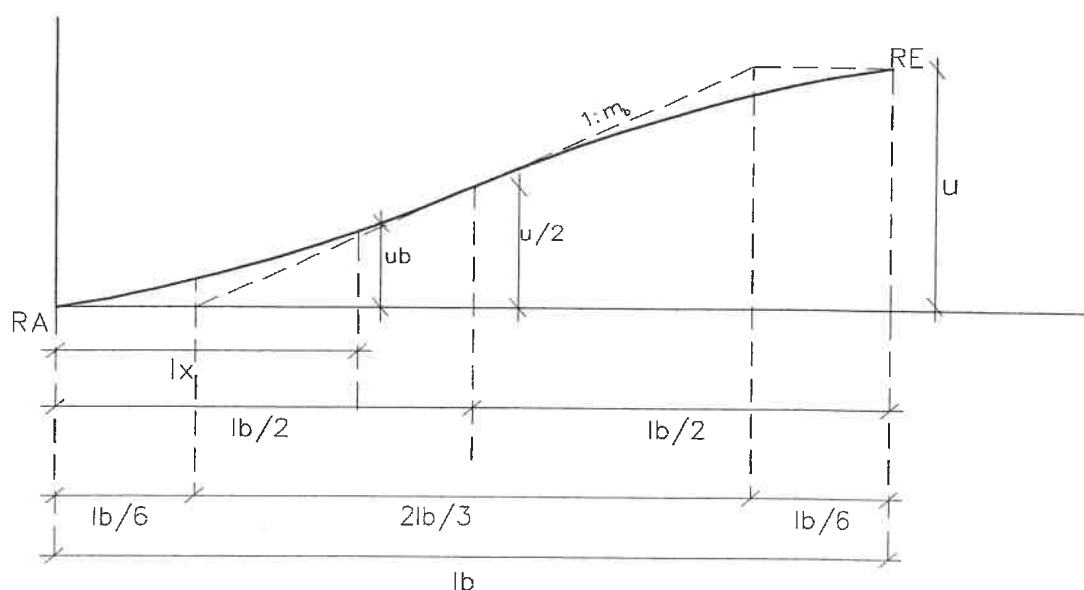
1.4 Το πρανές υπερύψωσης και το τόξο συναρμογής με αύξηση της υπερύψωσης-καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής [8] -Το πρανές και τοξο συναρμογής Bloss [9]

1.4.1 Το πρανές υπερύψωσης με αύξηση της υπερύψωσης με την μορφή κυβικής παραβολής [8] -Το πρανές υπερύψωσης Bloss [9]

Η εξίσωση που περιγράφει την αύξηση της υπερύψωσης με την μορφή κυβικής παραβολής σε ένα πρανές υπερύψωσης είναι: $u_{x_2} = u_1 \cdot (3x^2/l^2 - 2x^3/l^3)$ ή

$$\frac{u_x}{u} = \frac{3x^2}{l_u^2} - \frac{2x^3}{l_u^3} \dots\dots\dots(1.4.1.1) [8]. \text{ Το πρανές αυτό υπερύψωσης είναι το πρανές}$$

Bloss (b-πρανές) και φαίνεται και στο σχήμα 1.4.1.1. Χαρακτηρίζεται από το μήκος του l_b και από την υπερύψωση u στο τέλος του πρανούς.



Σχήμα 1.4.1.1

Το πρανές υπερύψωσης Bloss (p-πρανές)

Πηγή:[8] Bild 5,σελ103

u : υπερύψωση στο τέλος του πρανούς σε mm

u_b : υπερύψωση τυχαίου σημείου του πρανούς υπερύψωσης

l_b : μήκος τόξου συναρμογής

l_x : απόσταση τυχαίου σημείου του πρανούς υπερύψωσης από την αρχή του

$1:m$: κλίση πρανούς-b

Η μορφή του πρανούς Bloss είναι αντισυμμετρική ως προς το μέσον του, όπως άλλωστε και στα δύο προηγούμενα πρανή που εξετάσαμε.

Για την υπερύψωση στο μέσον του πρανούς ισχύει κι εδώ $u_M = \frac{u}{2}$. Η κλίση του

πρανού-b στο μέσον του RM σύμφωνα με το σχήμα είναι

$$\frac{1}{m_b} = \frac{\frac{u}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{l_b}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{m_b} = \frac{3u}{2l_b} = 1.5 \frac{u}{l_b} \dots\dots\dots(1.4.1.1) \text{ ή}$$

$$m_b = \frac{2l_b}{3u} = 0.66667 \frac{l_b}{u} \dots\dots\dots(1.4.1.3)$$

Η ποσότητα m_b είναι κατά 33,3% μεγαλύτερη απ' ότι στο p-πρανές (που εκφράζεται από την εξίσωση $m_p = 0.5 \frac{l_p}{u}$), ή αλλιώς η κλίση του p-πρανούς (που είναι $\frac{1}{m_p} = 2 \frac{u}{l_p}$)

είναι 33,3% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη κλίση του b-πρανούς (που είναι $\frac{1}{m_b} = 1.5 \frac{u}{l_b}$).

Θα γίνει έλεγχος της περιστροφικής επιτάχυνσης α'' . Στο πρανές Bloss, αυτή μεταβάλλεται κατά μήκος του πρανούς σύμφωνα με την σχέση

$$\alpha'' = \left(1 - \frac{2x}{l_b}\right) \cdot \frac{19.649 V^2 \cdot u}{l_b^2} \dots\dots\dots(1.4.1.4)$$

Στα σημεία αρχής και τέλους RA και RE αντίστοιχα, η περιστροφική επιτάχυνση λαμβάνει την απόλυτα μέγιστη τιμή:

$$\alpha'' = \pm 19.649 \frac{V^2 \cdot u}{l_b^2} \dots\dots\dots(1.4.1.5)$$

όπου α'' σε gons/s², u και l_b σε m και V σε km/h.

Για να γίνει προσδιορισμός του μήκους l_b θα ληφθεί υπόψη οι διάφοροι περιορισμοί.

Έτσι, αν θεωρηθεί ότι η τιμή του τινάγματος, έτσι ώστε να αποφεύγονται οι ενοχλήσεις στην άνεση των επιβατών, είναι

$C_{\max} = 0.50m/sec^3$, προκύπτει ο περιορισμός

$$(l_b)_{\min} = \frac{V^3}{15.6R} - 5.447V \cdot u \dots\dots\dots(1.4.1.6)$$

Επίσης, από την μέγιστη κατασκευαστική τιμή για τις κλίσεις $(\frac{1}{m})_{\max} = \frac{1}{400}$

$$\text{προκύπτει } \frac{1}{400} = 1.5 \frac{u}{l_b} \Leftrightarrow (l_b)_{\min} = 600 \cdot u \dots\dots\dots(1.4.1.7).$$

Από το δυναμικό όριο για τις κλίσεις των πρανών $(\frac{1}{m})_{\max} = \frac{1}{4V}$ προκύπτει

$$\frac{1}{4V} = 1.5 \frac{u}{l_b} \Leftrightarrow (l_b)_{\min} = 6V \cdot u \dots\dots\dots(1.4.1.8).$$

$$\text{Δηλαδή } (l_b)_{\min} = \max(600u, 6V \cdot u) \dots\dots\dots(1.4.1.9).$$

$$\text{Έτσι συνολικά } (l_b)_{\min} = \begin{cases} 600u \dots\dots\dots V < 100km/h \\ 6V \cdot u \dots\dots\dots V > 100km/h \\ \frac{V^3}{15.6R} - 5.447V \cdot u \end{cases} \dots\dots\dots(1.4.1.10)$$

Όσον αφορά την εξίσωση (1.4.1.6) ότι αυτή μπορεί να είναι καθοριστική, δηλαδή να δίνει τη μεγαλύτερη τιμή μόνο σε περίπτωση μεγάλης ταχύτητας και μικρής υπερύψωσης.

Ο περιορισμός $(l_b)_{\min} = 600u$ είναι καθοριστικός μόνο για ταχύτητες $V < 100km/h$, γιατί σε άλλη περίπτωση είναι $V > 100km/h \rightarrow 6 \cdot V > 600$ κι επομένως θα παραγκωνίζεται ούτως ή άλλως από τον περιορισμό $(l_b)_{\min} = 6V \cdot u$. Δεδομένου όμως ότι πρανή τέτοιου είδους χρησιμοποιούνται μόνο για ταχύτητες μεγαλύτερες των $100km/h$, ο περιορισμός $(l_b)_{\min} = 600u$ καθίσταται χωρίς καμία πρακτική σημασία.

1.4.2 Το τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής- Το τόξο συναρμογής Bloss

Η μεταβολή της υπερύψωσης στο πρηνές υπερύψωσης Bloss δίνεται από τον τύπο

$$u_b = \left(\frac{3}{l_b^2} \cdot x^2 - \frac{2}{l_b^3} \cdot x^3 \right) \cdot u \dots\dots\dots(1.4.2.1). \text{ Επειδή η μεταβολή της καμπυλότητας}$$

ακολουθεί ακριβώς την μεταβολή της υπερύψωσης και ισχύει $\frac{k_x}{k} = \frac{u_x}{u} \dots\dots\dots(1.4.2.2)$, η μεταβολή της καμπυλότητας στο τόξο Bloss θα δίνεται

$$\text{από τη σχέση } k_b = \left(\frac{3}{l_b^2} \cdot x^2 - \frac{2}{l_b^3} \cdot x^3 \right) \cdot k \dots\dots\dots(1.4.2.3), \text{ όπου } k \text{ η καμπυλότητα του}$$

κυκλικού τόξου και αν ληφθεί υπόψη ότι $K=1/R$, η σχέση γίνεται

$$k_b = \frac{3}{r \cdot l_b^2} \cdot x^2 - \frac{2}{r \cdot l_b^3} \cdot x^3 \dots\dots\dots(1.4.2.4).$$

Παρακάτω προσδιορίζεται η εξίσωση του τόξου συναρμογής Bloss.

$$\text{Κατά τα γνωστά ισχύει } k_x = \frac{d\phi}{dx} \text{ οπότε } d\phi_x = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{3x^2}{l_u^2} - \frac{2x^3}{l_u^3} \right) dx.$$

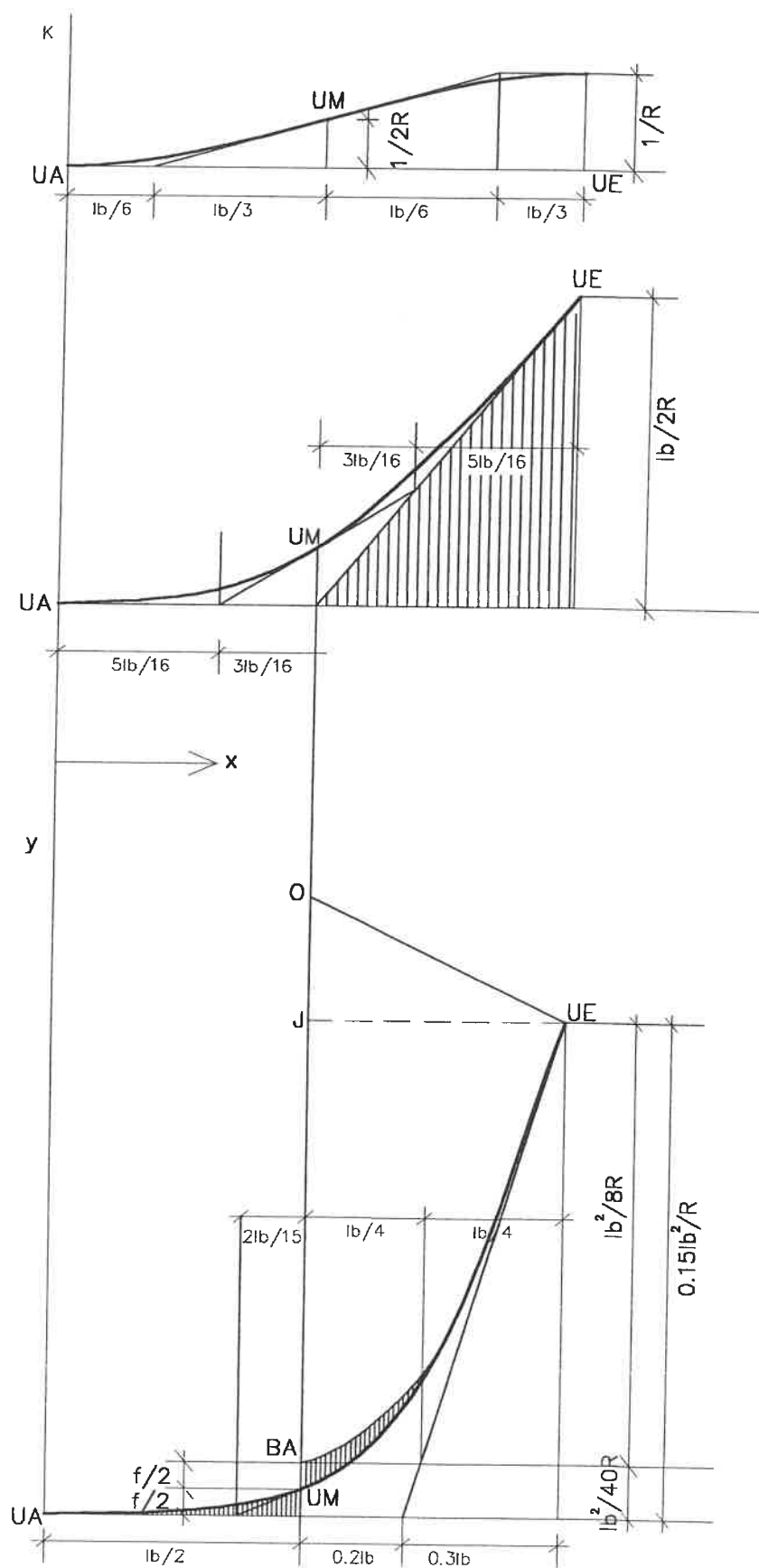
Με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης προκύπτει η γωνία ϕ :

$$\int d\phi_x = \int \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{3x^2}{l_u^2} - \frac{2x^3}{l_u^3} \right) dx \Leftrightarrow \phi_x = \frac{1}{R} \left(\frac{x^3}{l_u^2} - \frac{x^4}{2l_u^3} \right) \dots\dots\dots(1.4.2.5)$$

(Το C_1 παραλείπεται ως μηδενικό, εφόσον πάλι για $x=0, \phi=0$).

Στο τέλος του τόξου συναρμογής ($x=l_u$), προκύπτει από την εξίσωση (1.4.2.5):

$$\phi_{l_u} = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{l_u^3}{l_u^2} - \frac{l_u^4}{2l_u^3} \right) = \frac{1}{R} \cdot \left(l_u - \frac{l_u}{2} \right) \Leftrightarrow \phi_{l_u} = \frac{l}{2R} \dots\dots\dots(1.4.2.6)$$



Σχήμα 1.4.2.1

i/ Διάγραμμα καμπυλότητας ii/ Τόξο συναρμογής Bloss

Πηγή: [8] Bild 4.4, σελ 34

Στο μέσον UM ($x = l_u/2$) του τόξου συναρμογής προκύπτει από την εξίσωση (1.4.2.5):

$$\phi_{u/2} = \frac{1}{R} \left(\frac{l_u^3}{8} - \frac{l_u^4}{32} \right) = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{l_u}{8} - \frac{l_u}{32} \right) \Leftrightarrow \phi_{u/2} = \frac{3l}{32R} \dots\dots\dots (1.4.2.7)$$

Επίσης ισχύει $\phi_x = \frac{dy}{dx}$ οπότε $dy = \frac{1}{R} \left(\frac{x^3}{l_u^2} - \frac{x^4}{2l_u^3} \right) \cdot dx$ και με ολοκλήρωση της σχέσης

αυτής προκύπτει:

$$\int dy = \int \frac{1}{R} \left(\frac{x^3}{l_u^2} - \frac{x^4}{2l_u^3} \right) \cdot dx \Leftrightarrow y_x = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{x^4}{4l_u^2} - \frac{x^5}{10l_u^3} \right) + C_2 \dots\dots\dots (1.4.2.8)$$

Η σταθερά C_2 παραλείπεται ως μηδενική, γιατί στην αρχή του πρανούς $x=0, y=0$.

Επομένως

$$y_x = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{x^4}{4l_u^2} - \frac{x^5}{10l_u^3} \right) \dots\dots\dots (1.4.2.9)$$

Η εξίσωση (1.4.2.9) αποτελεί την εξίσωση του τόξου συναρμογής που μελετάμε.

Για το τέλος του τόξου συναρμογής ($x = l_u$), προκύπτει από την εξίσωση (1.4.2.9):

$$y_{l_u} = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{l_u^4}{4l_u^2} - \frac{l_u^5}{10l_u^3} \right) \Leftrightarrow y_{l_u} = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{l_u^2}{4} - \frac{l_u^2}{10} \right) \Leftrightarrow y_{l_u} = \frac{3l_u^2}{20R} = 0.15 \frac{l_u^2}{R} \dots\dots\dots (1.4.2.10)$$

Στο μέσον UM ($x = l_u/2$) του τόξου συναρμογής προκύπτει από την εξίσωση (1.4.2.9):

$$y_{\frac{l_u}{2}} = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{l_u^4}{4l_u^2} - \frac{l_u^5}{10l_u^3} \right) \Leftrightarrow y_{\frac{l_u}{2}} = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{l_u^2}{64} - \frac{l_u^2}{320} \right) \Leftrightarrow y_{\frac{l_u}{2}} = \frac{4l_u^2}{320R} = 0.0125 \frac{l_u^2}{R} \dots\dots\dots (1.4.2.11)$$

Σημείωση: Διαπιστώσαμε ότι για αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή μιας κυβικής παραβολής, το τόξο συναρμογής που προκύπτει είναι 5^{ου} βαθμού.

Κάθε ανοιχτό τόξο- όπως στο σχήμα το (BA-J)- ισούται με το τετράγωνο της αντίστοιχης χορδής, διαιρεμένης με το 4πλάσιο του τετραγώνου της ακτίνας,

$$\text{δηλαδή } (BA-J) = \frac{l_u^2}{8R} \dots\dots\dots (1.4.2.12)$$

Αυτό σημαίνει ότι η αρχή BA του κυκλικού τόξου μετατοπίστηκε πλευρικά κατά

$$f = y_u - (BA - J) = \frac{3I_u^2}{20R} - \frac{I_u^2}{8R} = \frac{I_u^2}{40R} = 0.025 \frac{I_u^2}{R} \dots\dots\dots(1.4.2.13)$$

Συμπέρασμα: Η παραβολή 5^{ου} βαθμού (αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής) λοιπόν απαιτεί σε σχέση με την κυβική παραβολή ίδιου μήκους (γραμμική αύξηση της καμπυλότητας), μια κατά $\frac{24}{40} = 0.60$ φορές μικρότερη εκτροπή f .

1.5 Το πρανές υπερύψωσης και το τόξο συναρμογής Sinus

Το Sinus πρανές (s-πρανές) χαρακτηρίζεται, όπως φαίνεται κι από το σχήμα 1.5.1 από το μήκος του l_s και την υπερύψωση u στο τέλος του RE. Η αύξηση της υπερύψωσης από την αρχή RA μέχρι το τέλος του πρανού RE υπακούει στον τύπο (ή αλλιώς για κάθε σημείο στο εσωτερικό του πρανού που απέχει απόσταση x από την αρχή, η υπερύψωση είναι:) $u_s = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{l_s} \cdot x\right) \right] \cdot \frac{u}{2} \dots\dots\dots(1.5.1)$, ενώ η μεταβολή καμπυλότητας στο αντίστοιχο τόξο είναι $k_s = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{l_s} \cdot x\right) \right] \cdot \frac{k}{2}$.

Όπως και το p-πρανές, έτσι και το s-πρανές είναι αντισυμμετρικό ως προς το μέσον του RM, ενώ αναλόγως ισχύει η εξίσωση $u_M = \frac{u}{2}$.

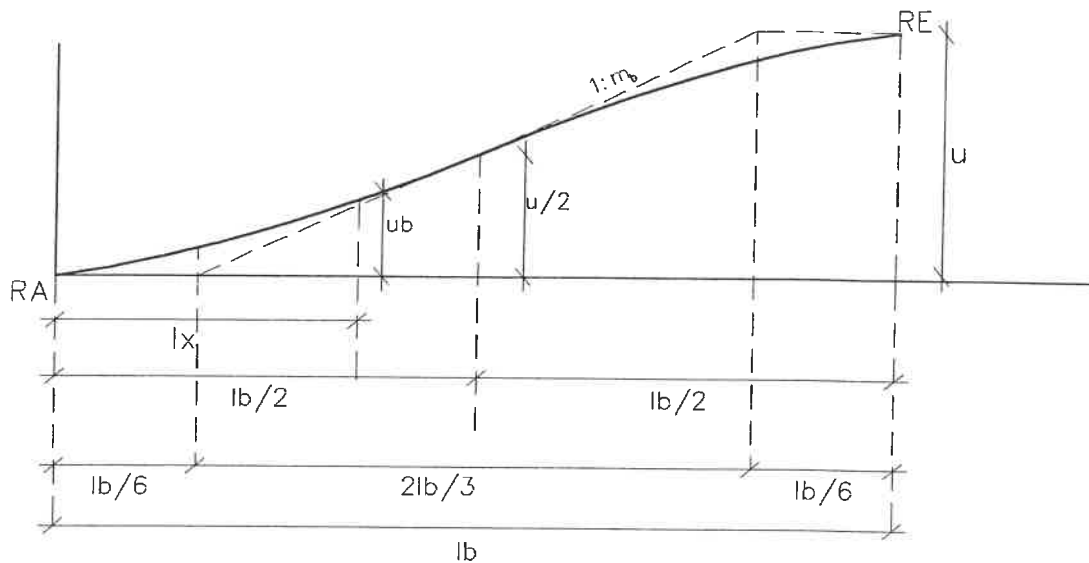
Η κλίση του s-πρανούς στο μέσον RM σύμφωνα με το σχήμα είναι:

$$\frac{1}{m_s} = \frac{\frac{u}{2}}{\frac{0.63662}{2} l_s} \Leftrightarrow \frac{1}{m_s} = \frac{1.5708u}{l_s} \dots\dots\dots(1.5.2) \quad \text{ή}$$

$$m_s = \frac{l_s}{1.5708u} = 0.63662 \frac{l_s}{u} \dots\dots\dots(1.5.3).$$

Από την μέγιστη κατασκευαστική τιμή για τις κλίσεις $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$ προκύπτει

$$\frac{1}{400} = 1.5708 \frac{u}{l_s} \Leftrightarrow (l_s)_{\min} = 628.32u \dots\dots\dots(1.5.4).$$



Σχήμα 1.5.1

Πρανές υπερύψωσης Sinus

Πηγή: [9] Bild 4, σελ 102

u: υπερύψωση στο τέλος του πρανού σε mm

u_s: υπερύψωση τυχαιού σημείου του πρανού υπερύψωσηςl_s: μήκος τόξου συναρμογήςl_x: απόσταση τυχαιού σημείου του πρανού υπερύψωσης από την αρχή του

1:m : κλίση πρανού-s-b

Από το δυναμικό όριο για τις κλίσεις των πρανών $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{4V}$ προκύπτει

$$\frac{1}{4V} = 1.5708 \frac{u}{l_s} \Leftrightarrow (l_s)_{\min} = 6.2832V \cdot u \dots\dots\dots(1.5.5).$$

Δηλαδή, για το μήκος του πρανού ισχύουν οι περιορισμοί:

$$(l_s)_{\min} = \max(628.32u, 6.2832V \cdot u) \dots\dots\dots(1.5.6).$$

Ο περιορισμός $(l_s)_{\min} = 628.32u$ είναι καθοριστικός μόνο για ταχύτητες $V < 100 \text{ km/h}$.

Πράγματι, για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h το γινόμενο $6.2832V$ θα είναι μεγαλύτερο από 628.32, άρα ούτως ή άλλως θα επικρατεί ο περιορισμός $(l_s)_{\min} = 6.2832V \cdot u$. Δεδομένου όμως ότι γενικά το p-πρανές χρησιμοποιείται για

ταχύτητες μεγαλύτερες των 100km/h, ο περιορισμός $(l_s)_{\min} = 628.32m$ δεν έχει καμία πρακτική σημασία.

Η κλίση του p-πρανούς στο μέσον του είναι κατά 27,3% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του s-πρανούς, ενώ αντίθετα το m_s του s-πρανούς είναι κατά 27,3% μεγαλύτερο από το αντίστοιχο m_s του p-πρανούς.

Η εκτροπή f του κυκλικού τόξου κατά την εφαρμογή του τόξου συναρμογής που αντιστοιχεί στο πρανές που μελετάμε είναι $f_s = \frac{l_s^2}{42.232R} = 0.02368 \frac{l_s^2}{R} \dots\dots\dots(1.5.7).$

Αυτή είναι κατά 13,7% μεγαλύτερη από την εκτροπή που υπολογίσαμε για την εφαρμογή του τόξου συναρμογής που αντιστοιχεί στο p-πρανές.

2. Νέος κανονισμός επιδομής γραμμής του ΟΣΕ

Τα παρακάτω βασίζονται στον Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ και αναλύονται περεταίρω.

2.1 Το πρανές υπερύψωσης

Η μεταβολή της υπερύψωσης από την μηδενική τιμή στην ευθυγραμμία στην τελική τιμή της στο κυκλικό τόξο είναι γραμμική και παρομοιάζεται σαν ένα πρανές υπερύψωσης (ή κεκλιμένη επιφάνεια υπερύψωσης) που έχει μήκος ίσο με το μήκος του τόξου συναρμογής, για τους λόγους που είδαμε προηγουμένως. Δηλαδή η μεταβολή της υπερύψωσης πρέπει να ξεκινάει στο ίδιο σημείο με την καμπύλη συναρμογής, δηλαδή στο ίδιο σημείο με την μεταβολή της καμπυλότητας και να παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σημείο που και η καμπυλότητα παίρνει τη μέγιστη τιμή της, δηλαδή στο τέλος του τόξου συναρμογής.

Το πρανές υπερύψωσης, μαζί με την παράλληλη μεταβολή της καμπυλότητας, απεικονίζεται για τις τρεις παρακάτω βασικές περιπτώσεις:[1] Ν.Κ.Ε.Γ. Άρθρο 7.(9,10,11,12)

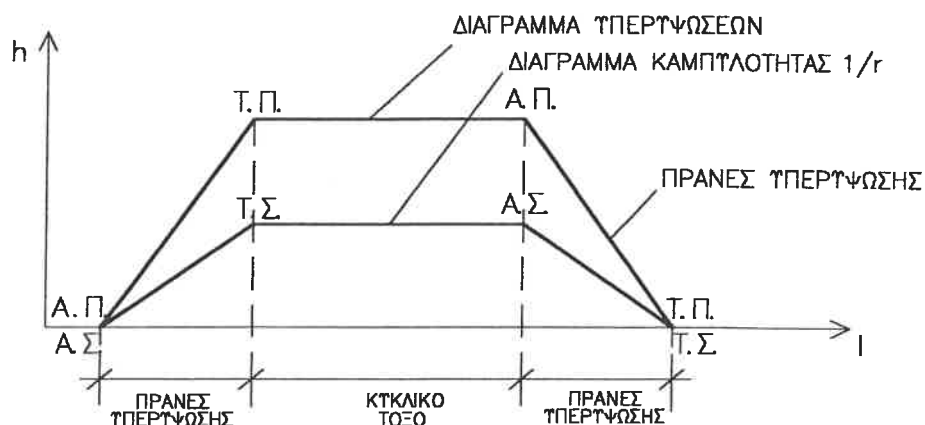
Επίσης παρατίθενται και τα διαγράμματα των σιδηροτροχιών για τις παρακάτω περιπτώσεις.

α/ ευθυγραμμία–κυκλικό τόξο–ευθυγραμμία

i/ γραμμική μεταβολή(αύξηση) από την τιμή 0 ως την τιμή h

ii/ σταθερή υπερύψωση h

iii/ γραμμική μεταβολή(μείωση) από την τιμή h ως την τιμή 0



Σχήμα 2.1.1

Διάγραμμα υπερυψώσεων και καμπυλότητας για μετάβαση από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο με ευθύγραμμο πρηνές υπερύψωσης

Πηγή: Ν.Κ.Ε.Γ. Άρθρο 7.11 σελ. 17

Α.Π., Τ.Π.: αρχή και τέλος πρηνούς υπερύψωσης

Α.Σ., Τ.Σ.: αρχή και τέλος συναρμογής

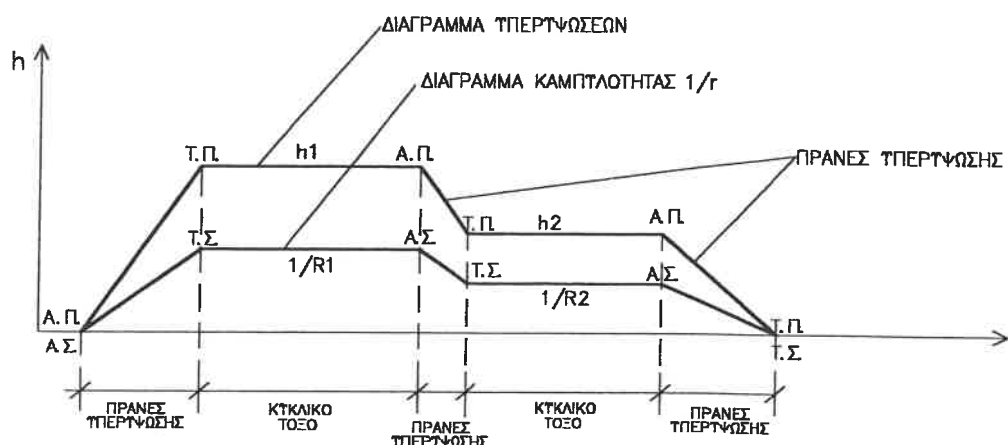


Σχήμα 2.1.2

Διάγραμμα σιδηροτροχιών για μετάβαση από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο με ευθύγραμμο πρηνές υπερύψωσης

Α.Π., Τ.Π.: αρχή και τέλος πρηνούς υπερύψωσης

β/ ευθυγραμμία–κυκλικό τόξο–κυκλικό τόξο ομόρροπο με το αρχικό
μεγαλύτερης καμπυλότητας–ευθυγραμμία



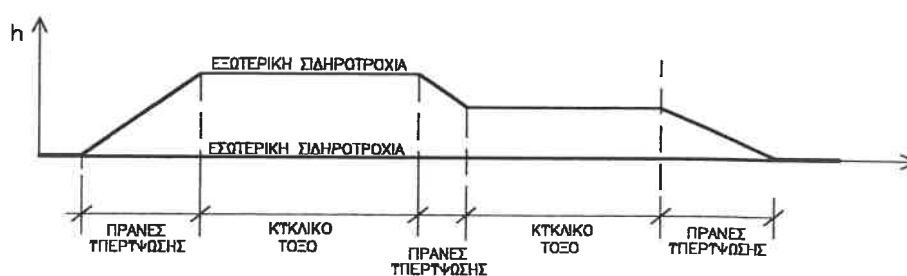
Σχήμα 2.1.3

Διάγραμμα υπερυψώσεων και καμπυλότητας για μετάβαση από κυκλικό τόξο σε ομόρροπο κυκλικό τόξο με ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης

Πηγή: Ν.Κ.Ε.Γ. Άρθρο 7.11 σελ. 17

Α.Π., Τ.Π.: αρχή και τέλος πρανούς υπερύψωσης

Α.Σ., Τ.Σ.: αρχή και τέλος συναρμογής



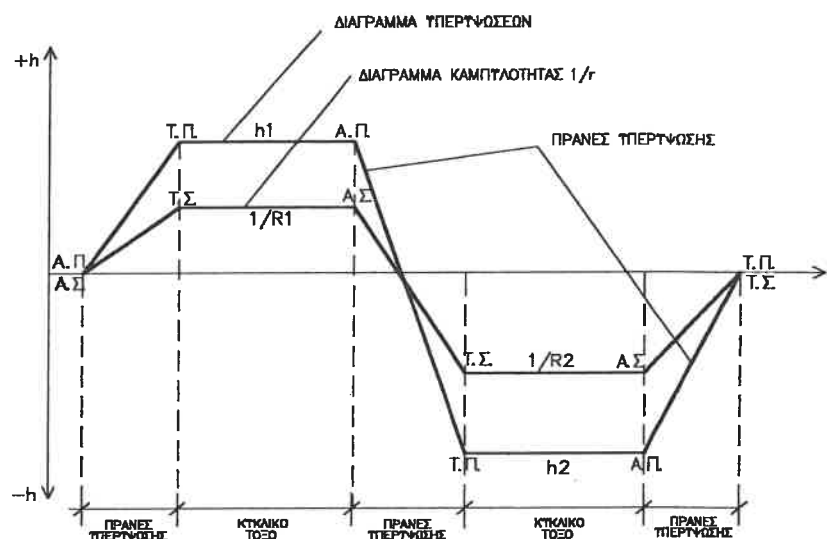
Σχήμα 2.1.4 (διάγραμμα σιδ/χιών)

Διάγραμμα σιδηροτροχιών για μετάβαση από κυκλικό τόξο σε ομόρροπο κυκλικό τόξο με ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης

Α.Π., Τ.Π.: αρχή και τέλος πρανούς υπερύψωσης

γ/ ευθυγραμμία–κυκλικό τόξο–κυκλικό τόξο αντίρροπο από το αρχικό–ευθυγραμμία

- i/ γραμμική μεταβολή(αύξηση) από την τιμή 0 ως την τιμή h_1
- ii/ σταθερή υπερύψωση h_1
- iii/ γραμμική μεταβολή(μείωση) από την τιμή h_1 ως την τιμή h_2
- iv/ σταθερή υπερύψωση h_2
- v/ γραμμική μεταβολή(μείωση) από την τιμή h_2 ως την τιμή 0



Σχήμα 2.1.5

Διάγραμμα υπερυψώσεων και καμπυλότητας για μετάβαση από κυκλικό τόξο σε αντίρροπο κυκλικό τόξο με ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης

Πηγή: Ν.Κ.Ε.Γ. Άρθρο 7.11 σελ. 17

Α.Π., Τ.Π.: αρχή και τέλος πρανούς υπερύψωσης

Α.Σ., Τ.Σ.: αρχή και τέλος συναρμογής



Σχήμα 2.1.6

Διάγραμμα σιδηροτροχιών για μετάβαση από κυκλικό τόξο σε αντίρροπο κυκλικό τόξο με ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης

Α.Π., Τ.Π.: αρχή και τέλος πρανούς υπερύψωσης

Παρακάτω εξετάζεται αναλυτικά ένα πρανές υπερύψωσης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Το πρανές ξεκινάει από μία αρχική τιμή $h_{αρχ}$ (που μπορεί να είναι είτε μηδενική είτε διάφορη του μηδενός) και καταλήγει στην τιμή h , μέσα σε μήκος L (ίσο με το μήκος του τόξου συναρμογής).

Αν i είναι η κλίση του πρανούς υπερύψωσης τότε $i = εφβ = \frac{\Delta h}{\Delta L}$.

2.1.1 Λαμβάνοντας υπόψη κατασκευαστικούς παράγοντες των οχημάτων καθώς και την άνεση των επιβατών, η κλίση του πρανούς υπερύψωσης, δηλαδή η γραμμική μεταβολή της υπερύψωσης δεν μπορεί να ξεπεράσει την τιμή

$$i_{\max} = \frac{144}{V_{\max}} (mm/m) \quad [1] \text{ Άρθρο 2(3.4) ή } i_{\max} = \frac{144}{V_{\max}} (mm/m) \% \quad \text{ή} \quad i_{\max} = \frac{0.144}{V_{\max}} \quad \text{όπου } V_{\max} \text{ η}$$

μέγιστη ταχύτητα που εμφανίζεται στην γραμμή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Το μέγιστο αυτό όριο αυτό έχει προκύψει με παραδοχή μέγιστου ρυθμού αύξησης της υπερύψωσης $r = 40mm/sec$. Σε χρονικό διάστημα $1sec$ η υπερύψωση έχει αυξηθεί κατά $40mm$, ενώ το όχημα έχει διανύσει απόσταση $\Delta l = ut(m) = u \cdot 1(m) = \frac{V_{\max}}{3.6}(m)$. Από τον

$$\text{ορισμό της κλίσης του πρανούς υπερύψωσης: } i = \frac{\Delta h}{\Delta l} = \frac{40(mm)}{\frac{V_{\max}}{3.6}(m)} = \frac{144}{V_{\max}} (mm/m).$$

Με παραδοχή μέγιστου ρυθμού αύξησης της υπερύψωσης $r = 60mm/sec$, που ισχύει σε ειδικές περιπτώσεις, προκύπτει με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως

$$i_{\max} = \frac{216}{V_{\max}} (mm/m) \quad \text{ή} \quad i_{\max} = \frac{216}{V_{\max}} (mm/m) \% \quad \text{ή} \quad i_{\max} = \frac{0.216}{V_{\max}}.$$

Όπως η υπερύψωση, έτσι και η ανεπάρκεια της υπερύψωσης πρέπει να μεταβάλλεται ομοιόμορφα μέσα στο τόξο συναρμογής.

Συγκεκριμένα, ο ρυθμός μεταβολής της ανεπάρκειας της υπερύψωσης εκφράζεται με το λόγο: $\mu = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} (mm/sec)$ όπου $\Delta \alpha$ η μεταβολή της ανεπάρκειας σε χρονικό διάστημα Δt . Η

μεταβολή αυτή μπορεί να εκφραστεί επίσης συναρτήσει του λόγου $\frac{\Delta\alpha}{\Delta L}$ δηλαδή της

μεταβολής της ανεπάρκειας ανά μονάδα μήκους ως εξής:

$$\mu = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\left(\frac{L}{V}\right)} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta L} \cdot \Delta V \Leftrightarrow \mu = \frac{\alpha}{L} \cdot \frac{V_{\max}}{3.6} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta L} \cdot \frac{V_{\max}}{3.6}, \quad \text{όπου } \eta \text{ ανεπάρκεια}$$

εκφράζεται σε mm, το μήκος L σε m και η μέγιστη εφαρμόζόμενη ταχύτητα σε km/h. Η μέγιστη τιμή της μεταβολής αυτής είναι $\mu_{\max} = 60 \text{ mm/sec}$ [1] Ν.Κ.Ε.Γ. Άρθρο 6.

Τέλος, σε κάθε περίπτωση η κλίση του πρανούς δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από

$$i_{\max} = 2.5\% \quad \text{ή} \quad i_{\max} = \frac{1}{400} \quad (\text{κατασκευαστικό όριο}).$$

2.1.2 Από το σχήμα γίνεται εύκολα κατανοητό ότι σε κάθε σημείο του πρανούς υπερύψωσης που απέχει από την αρχή (Α.Π.) απόσταση x, η υπερύψωση ισούται με

$$h_x = h_{\alpha\rho\chi} + \varepsilon\phi\beta \cdot x \Leftrightarrow h_x = h_{\alpha\rho\chi} + \frac{\Delta h}{L} \cdot x, \quad \text{όπου}$$

$h_{\alpha\rho\chi}$ η αρχική υπερύψωση στο πρανές υπερύψωσης σε mm

Δh η διαφορά υπερύψωσης σε mm

L το μήκος του πρανούς υπερύψωσης σε m και

x η απόσταση τυχαίου σημείου του πρανούς από την αρχή του πρανούς

$$\text{Αν } h_{\alpha\rho\chi} = 0 \text{ το } \Delta h = h \text{ και } h_x = \varepsilon\phi\beta \cdot x \Leftrightarrow h_x = \frac{\Delta h}{L} \cdot x$$

2.1.3 Στο τέλος του πρανούς υπερύψωσης έχει αποκτηθεί το μήκος L. Το μήκος αυτό υπολογίζεται, όπως θα δούμε, με βάση τους περιορισμούς που ισχύουν για την κλίση του πρανούς και που αναλύθηκαν στην παράγραφο 2.1.1.

Αναλυτικά:

Α. Συναρμογή ευθυγραμμίας με κυκλικό τόξο

α. Έστω ότι η αρχική υπερύψωση είναι μηδέν, ήτοι $h_{\alpha\rho\chi} = 0$,

και ο ρυθμός μεταβολής της είναι ο μέγιστος $i = \frac{144}{V_{\max}} (mm/m) \leq 2.5 mm/m$ τότε:

$$i = \frac{\Delta h}{L} = \frac{h - h_{\text{αρχ}}}{L} = \frac{h}{L} = \frac{144}{V_{\max}} \Leftrightarrow L = \frac{h V_{\max}}{144}$$

Συναρτήσει V,R: Δεδομένου ότι στο κυκλικό τόξο έχει εφαρμοστεί η κανονική υπερύψωση $h_k = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R} (mm)$, ισχύει $\left(\Leftrightarrow L = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R} \cdot \frac{V_{\max}}{144} \Leftrightarrow L = \frac{V_{\max}^3}{20.22R} \right)$

β. Με βάση τον μέγιστο ρυθμό αύξησης της ανεπάρκειας της υπερύψωσης $\mu_{\max} = 60 mm/sec$ προκύπτει:

$$\mu_{\max} = 60 (mm/sec) \Leftrightarrow \frac{\Delta \alpha}{L} \cdot \frac{V_{\max}}{3.6} = 60 \Leftrightarrow L = \frac{\alpha \cdot V_{\max}}{216} \text{ όπου } \alpha \text{ η ανεπάρκεια της υπερύψωσης που εμφανίζεται στο κυκλικό τόξο.}$$

γ. Τέλος με βάση το ανώτατο κατασκευαστικό όριο της κλίσης του πρανούς:

$$i = \frac{\Delta h}{L} = \frac{h - h_{\text{αρχ}}}{L} = \frac{h}{L} = \frac{1}{400} \Leftrightarrow L = 400 \cdot h \text{ (σε mm) ή } L = 0.4 \cdot h \text{ (σε m)}$$

με επικρατέστερη την μέγιστη από τις τρεις τιμές.

Β. Συναρμογή δύο κυκλικών τόξων με υπερυψώσεις h_1 και h_2 .

α. Αν ο ρυθμός μεταβολής της είναι ο μέγιστος $i = \frac{144}{V_{\max}} (mm/m) \leq 2.5 mm/m$ τότε:

$$i = \frac{\Delta h}{L} = \frac{h_2 - h_1}{L} = \frac{144}{V_{\max}} \Leftrightarrow L = \frac{(h_2 - h_1) V_{\max}}{144}$$

β. Με βάση τον μέγιστο ρυθμό αύξησης της ανεπάρκειας της υπερύψωσης $\mu_{\max} = 60 mm/sec$ προκύπτει:

$$\mu_{\max} = 60 mm/sec \Leftrightarrow \frac{\Delta \alpha}{L} \cdot \frac{V_{\max}}{3.6} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{L} \cdot \frac{V_{\max}}{3.6} = 60 \Leftrightarrow L = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) V_{\max}}{216} \text{ όπου } \alpha_1 \text{ και } \alpha_2 \text{ οι τιμές}$$

της ανεπάρκειας της υπερύψωσης που εμφανίζονται στα δύο κυκλικά τόξα αντίστοιχα.

γ. Τέλος με βάση το ανώτατο κατασκευαστικό όριο της κλίσης του πρανούς:

Γεωργοπούλου Ναταλία

$$i = \frac{\Delta h}{L} = \frac{h_2 - h_1}{L} = 2.5 \Leftrightarrow L = \frac{h_2 - h_1}{2.5}$$

με επικρατέστερη τον μέγιστο των τριών περιορισμών.

Ακόμα ένας περιορισμός για το μήκος του πρανούς μπορεί να υπολογιστεί με βάση το μέγιστο ρυθμό αύξησης της πλευρικής επιτάχυνσης ή τινάγμα $C = \frac{db}{dt} (m/s^3)$. Για υπεραστικούς σιδηρόδρομους η μέγιστη τιμή του είναι $C_{\max} = 0.50 m/sec^3$, ενώ ο κανονισμός του ΟΣΕ προβλέπει μέγιστη τιμή πλευρικής επιτάχυνσης ίση με $b_{\max} = 0.7 m/sec^2$.

Πιο αναλυτικά, ο χρόνος λοιπόν στον οποίο μπορεί να αποκτηθεί η μέγιστη τιμή της πλευρικής επιτάχυνσης με τον μέγιστο ρυθμό αύξησης της, κατά την μετάβαση από ευθυγραμμία ($b=0$) σε κυκλικό τόξο είναι $t_{\min} = \frac{b}{C} = \frac{0.70}{0.50} = 1.40 sec$

Στον ίδιο χρόνο το όχημα έχει διανύσει διάστημα L : $t = \frac{L}{v_{\max}} = \frac{L}{V} = \frac{3.6L}{V}$. Με εξίσωση των

χρόνων t που είναι ίσοι προκύπτει:

$$1.40 = \frac{3.6L}{V} \Leftrightarrow L_{\min} = 0.3889 V_{\max}, \quad V \text{ σε km/h και } L \text{ σε m.}$$

Κατά την μετάβαση από κυκλικό τόξο με b_1 σε κυκλικό τόξο με b_2 οι υπολογισμοί παίρνουν τη μορφή: $t_{\min} = \frac{\Delta b}{C} = \frac{b_2 - b_1}{0.50}$ οπότε $\frac{b_2 - b_1}{0.50} = \frac{3.6L}{V} \Leftrightarrow L_{\min} = \frac{(b_2 - b_1) \cdot V_{\max}}{1.80}$

Σε υψηλά επίπεδα εξυπηρέτησης απαιτείται $C_{\max} = 0.33 m/sec^3$, οπότε σ' αυτήν την περίπτωση κατά την μετάβαση από την ευθυγραμμία ($b=0$) σε κυκλικό τόξο

$$t_{\min} = \frac{b}{C} = \frac{0.70}{0.33} = 2.12 sec \text{ δηλαδή}$$

$$2.12 = \frac{3.6L}{V} \Leftrightarrow L_{\min} = 0.5889 V_{\max}, \quad V \text{ σε km/h και } L \text{ σε m.}$$

Κατά την μετάβαση από κυκλικό τόξο με b_1 σε κυκλικό τόξο με b_2 οι υπολογισμοί παίρνουν τη μορφή: $t_{\min} = \frac{\Delta b}{C} = \frac{b_2 - b_1}{0.33}$ οπότε $\frac{b_2 - b_1}{0.33} = \frac{3.6L}{V} \Leftrightarrow L_{\min} = \frac{(b_2 - b_1) \cdot V_{\max}}{1.188}$

Τέλος, σε δευτερεύουσες γραμμές είναι $C_{\max} = 0.65 \text{ m/sec}^3$, οπότε σ' αυτήν την περίπτωση κατά την μετάβαση από την ευθυγραμμία ($b=0$) σε κυκλικό τόξο

$$t_{\min} = \frac{b}{C} = \frac{0.70}{0.65} = 1.077 \text{ sec και άρα}$$

$$1.077 = \frac{3.6L}{V} \Leftrightarrow L_{\min} = 0.299 V_{\max}, \text{ V σε km/h και L σε m.}$$

Κατά την μετάβαση από κυκλικό τόξο με b_1 σε κυκλικό τόξο με b_2 οι υπολογισμοί παίρνουν τη μορφή: $t_{\min} = \frac{\Delta b}{C} = \frac{b_2 - b_1}{0.65}$ οπότε $\frac{b_2 - b_1}{0.65} = \frac{3.6L}{V} \Leftrightarrow L_{\min} = \frac{(b_2 - b_1) \cdot V_{\max}}{2.34}$.

Δεδομένης λοιπόν μίας κλίσης i του πρανούς υπερύψωσης και έχοντας υπολογίσει την υπερύψωση που απαιτείται στο κυκλικό τόξο, μπορεί να υπολογιστεί το μήκος L του πρανούς υπερύψωσης, που είναι ταυτόχρονα και το μήκος τόξου συναρμογής που θα χρησιμοποιηθεί. (Βλέπε πίνακα 3.1.1.1, Κεφάλαιο Γ)

Τα πρανή υπερύψωσης πρέπει να επιδιώκεται να βρίσκονται ολόκληρα έξω από αλλαγές τροχιάς, συσκευές διαστολής και γενικά συσκευές γραμμής. Όπου αυτό δεν είναι δυνατό λόγω τοπικών συνθηκών, επιβάλλεται περιορισμός της ταχύτητας.

2.2 Γενικά για τις καμπύλες συναρμογής

Είναι γνωστό ότι το κυκλικό τόξο είναι μια καμπύλη σταθερής καμπυλότητας $1/r$. Η καμπυλότητα $1/r$ για λόγους απλούστευσης των υπολογισμών πολλαπλασιάζεται με το 1000: $K_{\text{κυκλικού τόξου}} = \frac{1000}{r}$, όπου r η ακτίνα του κυκλικού τόξου. Αντίθετα, η ευθυγραμμία είναι μία καμπύλη σταθερής καμπυλότητας $1000/r$, όπου $r \rightarrow \infty$, δηλαδή μηδενικής καμπυλότητας.



Σχήμα 2.2.1

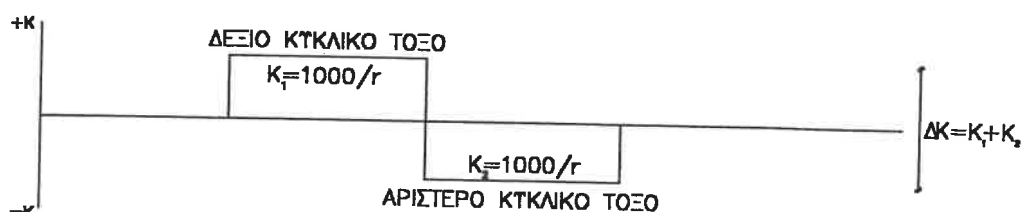
Διάγραμμα καμπυλότητας για απ' ευθείας μετάβαση από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο

Η διαφορά καμπυλότητας μεταξύ ευθυγραμμίας και κυκλικού τόξου είναι

$$\Delta K = K_{\text{κυκλικό τόξο}} - K_{\varepsilon} = \frac{1000}{r} - 0 = \frac{1000}{r}$$

Η διαφορά καμπυλότητας μεταξύ δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων (δηλαδή δύο κυκλικών τόξων που στο σημείο επαφής τους έχουν κοινή εφαπτομένη και οι ακτίνες τους στο ίδιο σημείο συμπίπτουν κατά διεύθυνση) είναι:

$$\Delta K = K_1 + K_2 = \frac{1000}{r_1} + \frac{1000}{r_2} = 1000 \times \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}$$



Σχήμα 2.2.2

Διάγραμμα καμπυλότητας για απ' ευθείας μετάβαση από κυκλικό τόξο σε αντίρροπο κυκλικό τόξο

Η διαφορά καμπυλότητας μεταξύ δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων (δηλαδή δύο κυκλικών τόξων που στο σημείο επαφής τους έχουν κοινή εφαπτομένη και οι ακτίνες τους στο ίδιο σημείο είναι προέκταση η μία της άλλης) είναι:

$$\Delta K = K_1 - K_2 = \frac{1000}{r_1} - \frac{1000}{r_2} = 1000 \times \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$



Σχήμα 2.2.3

Διάγραμμα καμπυλότητας για απ' ευθείας μετάβαση από κυκλικό τόξο σε ομόρροπο κυκλικό τόξο

Η απότομη αυτή μεταβολή της καμπυλότητας-ή της ακτίνας καμπυλότητας r - προκαλεί απότομη μεταβολή της πλευρικής επιτάχυνσης ($b = \frac{u^2}{r} - g \frac{h}{s}$) της οποίας η τιμή εξαρτάται άμεσα από την ακτίνα.

Η μεταβολή της πλευρικής επιτάχυνσης με το χρόνο $\frac{db}{dt}$ ονομάζεται τίναγμα κι εκφράζει την ταχύτητα μεταβολής της επιτάχυνσης

$$C = \frac{db}{dt} (m \cdot s^{-3})$$

Στην περίπτωση ισοταχούς κίνησης σε καμπύλη μεταβαλλόμενης καμπυλότητας

$$\text{ισχύει: } C = \frac{db}{dt} = \frac{d \frac{u^2}{r}}{dt} = \frac{du^2 k}{dt} = u^2 \frac{dk}{dt} \quad \text{ή} \quad C = \frac{V^2}{13} \cdot \frac{dk}{dt}$$

Όπου το μέγεθος $dk = \frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{r} \neq 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$ δηλαδή το τίναγμα C είναι ιδιαίτερα μεγάλο.

Το τίναγμα έχει άμεση σχέση με την άνεση των επιβατών, την καταπόνηση των μεταφερόμενων εμπορευμάτων και την καταπόνηση των στοιχείων του συστήματος. Τα όρια που έχουν θεσπιστεί με βάση τα παραπάνω κριτήρια είναι $C_{max}=0.5\text{msec}^{-3}$ για υπεραστικούς σιδηρόδρομους, $C_{max}=0.33\text{msec}^{-3}$ για υψηλότερα επίπεδα εξυπηρέτησης όπως για παράδειγμα σύγχρονους ταχείς και υπερταχείς συρμούς και τέλος $C_{max}=0.65\text{msec}^{-3}$ για κίνηση σε δευτερεύουσες γραμμές.

Έτσι γίνεται φανερό ότι κατά την μετάβαση από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο ή από κυκλικό τόξο σε κυκλικό τόξο διαφορετικής καμπυλότητας είναι απαραίτητη η τοποθέτηση καμπύλης συναρμογής.

Σκοπός της καμπύλης συναρμογής είναι η βαθμιαία μετάβαση από την μηδενική καμπυλότητα της ευθυγραμμίας στην μη μηδενική του κυκλικού τόξου- ή από την μη μηδενική ενός κυκλικού τόξου στην επίσης μη μηδενική αλλά διάφορη καμπυλότητα ενός άλλου κυκλικού τόξου.

Η καμπύλη συναρμογής, όμως, έχει ακόμα μία πολύ σημαντική προσφορά. Όπως παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, κατά μήκος του κυκλικού τόξου η υπερύψωση που εφαρμόζεται είναι η κανονική υπερύψωση που όπως υπολογίστηκε $h_k = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R}$ σταθερή, ενώ στην ευθυγραμμία δεν εφαρμόζεται υπερύψωση. Η μεταβολή

της υπερύψωσης δεν είναι δυνατόν να γίνει απότομα, αλλά να αυξάνεται βαθμιαία. Το τμήμα της γραμμής στο οποίο λαμβάνει χώρα αυτή η βαθμιαία μεταβολή της υπερύψωσης από την μηδενική μέχρι την κανονική της τιμή-ή αντίστροφα, ανάλογα με την φορά της μετάβασης ευθυγραμμία↔κυκλικό τόξο- ονομάζεται πρηνές υπερύψωσης. Από τον νέο κανονισμό επιδομής γραμμής αλλά και σε όλες τις άλλες μεθόδους συναρμογής, προβλέπεται ότι το μήκος του πρηνούς υπερύψωσης είναι ίσο με το μήκος της καμπύλης συναρμογής.

Η πρόβλεψη αυτή γίνεται για τους εξής δύο λόγους:

α. Αν το μήκος του πρηνούς υπερύψωσης ήταν μεγαλύτερο από το μήκος της καμπύλης συναρμογής αυτό θα σήμαινε ότι ένα μέρος του πρηνούς θα βρισκονταν στην ευθυγραμμία ή στην καμπύλη, με αποτέλεσμα η υπερύψωση σε αυτό το κομμάτι της

ευθυγραμμίας να είναι διάφορη του μηδενός. Στην περίπτωση αυτή, απουσία της φυγοκέντρου λόγω ευθυγραμμίας, θα καταπονείτο η εσωτερική σιδηροτροχιά.

β. Αν το μήκος του πρανούς υπερύψωσης ήταν μικρότερο, τότε ένα τμήμα της καμπύλης θα στερείτο υπερύψωσης, με αποτέλεσμα την μη πλήρη εξισορρόπηση της φυγοκέντρου και την καταπόνηση της εξωτερικής σιδηροτροχιάς. [3]

Σχόλιο: Η καμπύλη συναρμογής λοιπόν είναι ένα τμήμα της σιδηροδρομικής γραμμής στην οποία λαμβάνει χώρα βαθμιαία μεταβολή- αύξηση ή μείωση- τόσο της καμπυλότητας K όσο και της υπερύψωσης h .

Παρακάτω εξετάζονται κάποια είδη καμπύλων που χρησιμοποιούνται στα τόξα συναρμογής της οριζοντιογραφίας, σύμφωνα με τον νέο κανονισμό του ΟΣΕ.

2.2.1 Είδη καμπύλων που χρησιμοποιούνται στα τόξα συναρμογής

2.2.1.1 Κυβική παραβολή

Ο γενικός τύπος της κυβικής παραβολής προκύπτει απ' την σχέση της συνεχώς αυξανόμενης υπερύψωσης και της γραμμικής αύξησης της καμπυλότητας.

Έστω μια καμπύλη όπως στο παρακάτω σχήμα. Αν τ είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας των x -ευθυγραμμία- με την κοινή εφαπτομένη της καμπύλης και του κυκλικού τόξου στο κοινό τους σημείο Β (σχήμα 2.2.1.1), τότε $\frac{dy}{dx} = \tan \tau$.

Επίσης η καμπυλότητα της καμπύλης αυτής περιγράφει το ρυθμό μεταβολής της γωνίας τ με την μεταβολή του μήκους του τόξου συναρμογής L , δηλαδή $k = \frac{d\tau}{dL}$.

Είναι:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} &= \left(\frac{dy}{dx} \right)' = (\tan \tau)' \cdot \frac{d\tau}{dx} = \left(\frac{\sin \tau}{\cos \tau} \right)' \cdot \frac{d\tau}{dx} = \frac{(\sin \tau)' \cos \tau - (\cos \tau)' \sin \tau}{\cos^2 \tau} \cdot \frac{d\tau}{dx} = \\ &= \frac{\sin^2 \tau + \cos^2 \tau}{\cos^2 \tau} \cdot \frac{d\tau}{dx} = (1 + \tan^2 \tau) \cdot \frac{d\tau}{dx} = (1 + \tan^2 \tau) \cdot \frac{d\tau}{dL} \cdot \frac{dL}{dx} = (1 + \tan^2 \tau) \cdot k \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \tau} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = (1 + \tan^2 \tau)^{3/2} \cdot k \dots \dots \dots (2.2.1.1.1)\end{aligned}$$

Όμως $(1 + \tan^2 \tau)^{3/2} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}$ άρα

$$(2.2.1.1.1) \Leftrightarrow k = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{1}{(1 + \tan^2 \tau)^{3/2}} = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}} \dots \dots \dots (2.2.1.1.2)$$

Επίσης η $k = \frac{d\tau}{dL}$ γίνεται $\frac{1}{r} = \frac{d\tau}{dL} \Leftrightarrow dl = r \cdot d\tau$ ή $\int L dL = \int L \cdot r d\tau \Leftrightarrow \frac{L^2}{2} = L \cdot r \cdot \tau \Leftrightarrow \frac{L}{2} = r \cdot \tau \Leftrightarrow$

$$\boxed{\tau = \frac{L}{2r}} \dots \dots \dots (2.2.1.1.3). \text{ Η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε σημείο του τόξου συναρμογής.}$$

Σημείωση: Σύμφωνα με τη σειρά Taylor είναι $\tan \tau = \tau + \frac{1}{3}\tau^3 + \dots$ όπου οι όροι μετά το τ μπορούν να παραλειφθούν ως πολύ μικροί, οπότε $\tan \tau = \tau \Leftrightarrow \tan \tau = \frac{L}{2r}$

Άρα $y' = \frac{dy}{dx} = \tan \tau = \frac{L}{2r}$ οπότε

$$(2.2.1.1.2) \Leftrightarrow y'' = k \cdot (1 + y'^2)^{3/2} = k \cdot \left(1 + \left(\frac{L}{2r} \right)^2 \right)^{3/2} = c \cdot x \Leftrightarrow c \cdot x = k \cdot \left(1 + \left(\frac{L^2}{4r^2} \right) \right)^{3/2}$$

Στη θέση $x=L \rightarrow k=L/R$ οπότε $c \cdot L = \frac{1}{R} \cdot \left(1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{3/2} \Leftrightarrow c = \frac{\left(1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{3/2}}{R \cdot L}$

άρα $y'' = \frac{\left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{R \cdot L} \cdot x \dots\dots\dots(2.2.1.1.4)$

$$(2.2.1.1.4) \rightarrow y' = \int \frac{\left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{RL} \cdot x dx = \frac{\left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2RL} \cdot x^2 + c_1 \dots\dots\dots(2.2.1.1.5)$$

$$(2.2.1.1.5) \rightarrow y = \int \left(\frac{\left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2RL} \cdot x^2 + c_1 \right) dx = \frac{\left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{6RL} \cdot x^3 + c_1 x + c_2 \dots\dots\dots(2.2.1.1.6)$$

Στη θέση $x=0$ είναι $y'=\tan\tau=L/2r=0$ (γιατί $L=x=0$) και $y=0$ οπότε από τις (2.2.1.1.5) και (2.2.1.1.6) προκύπτει

$$(2.2.1.1.5) \rightarrow y' = 0 = \frac{\left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)}{RL} \cdot 0^2 + c_1 \Leftrightarrow 0 = 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$(2.2.1.1.6) \rightarrow y = 0 = \frac{\left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)}{6RL} \cdot 0^3 + 0 \cdot 0 + c_2 \Leftrightarrow 0 = 0 + 0 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Τελικά λοιπόν προκύπτει από την (2.2.1.6) με $c_1=c_2=0$

$$y = \frac{x^3}{6RL} \left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}} \dots\dots\dots(2.2.1.1.7)$$

Όπου x, y : σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων

R : ακτίνα κυκλικού τόξου σε m

r : ακτίνα σε τυχαίο σημείο του τόξου συναρμογής σε m

L : μήκος τόξου συναρμογής σε m .

2.2.1.1.1 Τόξα συναρμογής μικρού μήκους κυβικής παραβολής

[1] Ν.Κ.Ε.Γ, Άρθρο 7.4

[3] Σιδροδρομική-Β.προφυλλίδη

Όταν το μήκος του τόξου συναρμογής L είναι $L \leq \frac{R}{3.5}$ θεωρείται πολύ μικρό σε σχέση με

την ακτίνα R . Επομένως ο όρος $\left(\frac{L}{2r}\right)^2$ θεωρείται αμελητέος και μπορεί να παραλειφθεί,

ενώ ο όρος $\left(1 + \left(\frac{L}{2r}\right)^2\right)^{3/2}$ μπορεί να θεωρηθεί ίσος με τη μονάδα. Ως εκ τούτου η εξίσωση

της κυβικής παραβολής μεταπίπτει στην $y = \frac{x^3}{6RL}$ (2.2.1.1.1)

που είναι η εξίσωση για τόξα μικρού μήκους κυβικής παραβολής.

Μία ακόμα παραδοχή είναι ότι το μήκος L θεωρείται ίσο με το I , δηλαδή ίσο με την προβολή του στον άξονα των x .

Η καμπυλότητα σε κάθε σημείο της κυβικής παραβολής ισούται με $k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ σύμφωνα με την εξίσωση (2.2.1.1.2).

Στην συγκεκριμένη περίπτωση $y = \frac{x^3}{6RL}$ οπότε

$$y' = \left(\frac{x^3}{6RL}\right)' = 3 \frac{x^2}{6RL} = \frac{x^2}{2RL}$$

$y'' = \left(\frac{x^2}{2RL}\right)' = 2 \frac{x}{2RL} = \frac{x}{RL}$ κι επομένως η καμπυλότητα σε κάθε σημείο του μικρού τόξου κυβικής παραβολής ισούται με

$$k = \frac{\frac{x}{RL}}{\left(1 + \left(\frac{x^2}{2RL}\right)^2\right)^{3/2}} \Leftrightarrow k = \frac{x}{RL \left(1 + \frac{x^4}{4R^2L^2}\right)^{3/2}} \dots\dots\dots(2.2.1.1.2)$$

Στο σημείο $x=0$ είναι $y=0$ και $k=0$ (τέλος ευθυγραμμίας και αρχή συναρμογής).

Στο σημείο $x=L$ (τέλος τόξου συναρμογής και αρχή κυκλικού τόξου) είναι:

$$y_{\text{Π}} = \frac{L^3}{6RL} = \frac{L^2}{6R} \dots\dots\dots(2.2.1.1.3)$$

$$k = \frac{L}{RL \left(1 + \frac{L^4}{4R^2 L^2} \right)^{3/2}} \Leftrightarrow k = \frac{1}{R \left(1 + \left(\frac{L}{2R} \right)^2 \right)^{3/2}} \dots\dots\dots(2.2.1.1.4)$$

Όμως ο όρος $\left(1 + \left(\frac{L}{2R} \right)^2 \right)^{3/2}$ θεωρείται όπως είδαμε ίσος με τη μονάδα, οπότε $k = \frac{1}{R}$ που είναι ως γνωστόν η καμπυλότητα του κυκλικού τόξου.

Ας δούμε τώρα μια συναρμογή ευθυγραμμίας και κυκλικού τόξου μέσω ενός τόξου συναρμογής είδους κυβικής παραβολής, όπως στο σχήμα 2.2.1.1.1. Για να υπάρξει χώρος για την τοποθέτηση του τόξου συναρμογής πρέπει ο κύκλος να υποχωρήσει εκ της ευθυγραμμίας κατά το μέγεθος f , που ονομάζεται εκτροπή. Η παραβολή κείται κατά το $\frac{1}{2}$ πάνω από την μαθηματική αφετηρία του κυκλικού τόξου και διχοτομεί την απόσταση f .

Από τα όμοια τρίγωνα OJB και EBH προκύπτει η αναλογία:

$$\frac{HB}{OB} = \frac{EB}{BJ} \Leftrightarrow \frac{t}{R} = \frac{y_L}{L/2} \Leftrightarrow \frac{t}{R} = \frac{L^2/6R}{L/2} \Leftrightarrow \frac{t}{R} = \frac{2L^2}{6RL} \Leftrightarrow t = \frac{L}{3}$$

Επίσης ισχύουν:

$$HE = c = t \cdot \cos \tau = \frac{L}{3} \cdot \cos \tau$$

Μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά ότι η γωνία τ είναι πολύ μικρή, άρα $\cos \tau = 1 \rightarrow HE = c = \frac{L}{3}$

Το ύψος ενός ανοιχτού τόξου, όπως είναι το JF , ισούται με το τετράγωνο της χορδής διαιρεμένη δια το 8πλάσιο της ακτίνας, ήτοι $JF = \frac{L^2}{8R}$ οπότε

$$FG = JG - JF = y_{\pi} - JF = \frac{L^2}{6R} - \frac{L^2}{8R} \Leftrightarrow FG = \frac{L^2}{24R} \Leftrightarrow f = \frac{L^2}{24R}$$

όπου f η εκτροπή, όπως είδαμε προηγουμένως, του κυκλικού τόξου σε σχέση με την ευθυγραμμία ώστε να μπορέσει να τοποθετηθεί επαρκώς το τόξο συναρμογής.

Τέλος, οι συντεταγμένες του κέντρου του κυκλικού τόξου είναι $x_o = x_{\pi} - R \sin \tau$ $y_o = y_{\pi} + R \cos \tau$ όπου x_o

και y_o η τεταγμένη και η τετμημένη του σημείου όπου το τόξο της κυβικής παραβολής μεταπίπτει στο κυκλικό τόξο. Με την βοήθεια των σχέσεων που αποδείχθηκαν

$$\begin{aligned} x_o &= x_{\pi} - \frac{L}{2} \\ \text{παραπάνω, είναι:} \quad y_o &= \frac{L^2}{6R} + R \end{aligned}$$

2.2.1.1.2 Τόξα συναρμογής μεγάλου μήκους κυβικής παραβολής

Είναι τα τόξα των οποίων το μήκος είναι $L \geq \frac{R}{3.5}$ και δεν θεωρείται μικρό σε σχέση με την ακτίνα.

$$\text{Υπολογίζονται από τον γενικό τύπο } y = \frac{x^3}{6RL} \left(1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{3/2} \dots\dots\dots(2.2.1.1.2.1)$$

Μια διαφορετική παραλλαγή του παραπάνω τύπου σε πολλές βιβλιογραφίες είναι η

$$y = \frac{x^3}{6RL \cos^3 \tau} \dots\dots\dots(2.2.1.1.2.2)$$

Παρακάτω αποδεικνύεται ότι οι εξισώσεις (2.2.1.1.2.1) και (2.2.1.1.2.2) που εκφράζουν την κυβική παραβολή, είναι ισότιμες.

$$\text{Καταρχήν } y = \frac{x^3}{6RL} \left(1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{3/2} \Leftrightarrow y = \frac{x^3}{6RL} (1 + \tan^2 \tau)^{3/2} \dots\dots\dots(2.2.1.1.2.3) \text{ γιατί } \tan \tau = \frac{L}{2R}.$$

$$\text{Είναι } (\tan \tau)' = \left(\frac{\sin \tau}{\cos \tau} \right)' = \frac{(\sin \tau)' \cos \tau - \sin \tau (\cos \tau)'}{\cos^2 \tau} = \frac{\sin^2 \tau + \cos^2 \tau}{\cos^2 \tau} = \frac{1}{\cos^2 \tau}$$

$$\text{ή } (\tan \tau)' = \left(\frac{\sin \tau}{\cos \tau} \right)' = \frac{\sin^2 \tau + \cos^2 \tau}{\cos^2 \tau} = \frac{\sin^2 \tau}{\cos^2 \tau} + \frac{\cos^2 \tau}{\cos^2 \tau} = \tan^2 \tau + 1$$

$$\text{δηλαδή } 1 + \tan^2 \tau = \frac{1}{\cos^2 \tau} \text{ και τελικά}$$

$$(2.2.1.1.2.3) \rightarrow y = \frac{x^3}{6RL} \left(\frac{1}{\cos^2 \tau} \right)^{3/2} = \frac{x^3}{6RL} \cdot \frac{1}{(\cos^2 \tau)^{3/2}} \Leftrightarrow y = \frac{x^3}{6RL \cos^3 \tau}.$$

Ξεκινώντας από την σχέση (2.2.1.1.2.1) προκύπτει η (2.2.1.1.2.2) δηλαδή οι δύο αυτές σχέσεις είναι ισότιμες.

Σ' αυτήν την περίπτωση το μήκος L του τόξου της κυβικής παραβολής είναι διάφορο του l , της προβολής του στον άξονα των x και οι διάφορες αποστάσεις του παραπάνω σχήματος υπολογίζονται ως εξής:

$$GE = \beta = BJ = R \sin \tau$$

$$\alpha = l - GE = l - R \sin \tau$$

$$l = L - \frac{L}{10} \cdot \left(\frac{L}{2r} \right)^2 = L - \frac{L^3}{40R^2}$$

Για το σημείο $x=L$ του τέλους του τόξου συναρμογής ισχύει

$$y_{\text{ΤΠ}} = \frac{L^3}{6RL} \left(1 + \left(\frac{L}{2r} \right)^2 \right)^{3/2} = \frac{L^2}{6R} \left(1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{3/2}$$

$$JF = OF - OJ = R - R \cos \tau = R(1 - \cos \tau)$$

$$f = y_{\text{ΤΠ}} - JF = y_{\text{ΤΠ}} - R(1 - \cos \tau) = \frac{L^2}{6R} \left(1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{3/2} - R(1 - \cos \tau)$$

Σε κάθε περίπτωση οι συντεταγμένες του κέντρου του κυκλικού τόξου είναι $x_o = x_{\text{ΤΠ}} - R \sin \tau$ όπου x_o και y_o η τεταγμένη και η τετμημένη του σημείου όπου το τόξο $y_o = y_{\text{ΤΠ}} + R \cos \tau$

της κυβικής παραβολής μεταπίπτει στο κυκλικό τόξο.*

* βλέπε ΠΙΝΑΚΑ 2.1.1 Κεφάλαιο Γ.

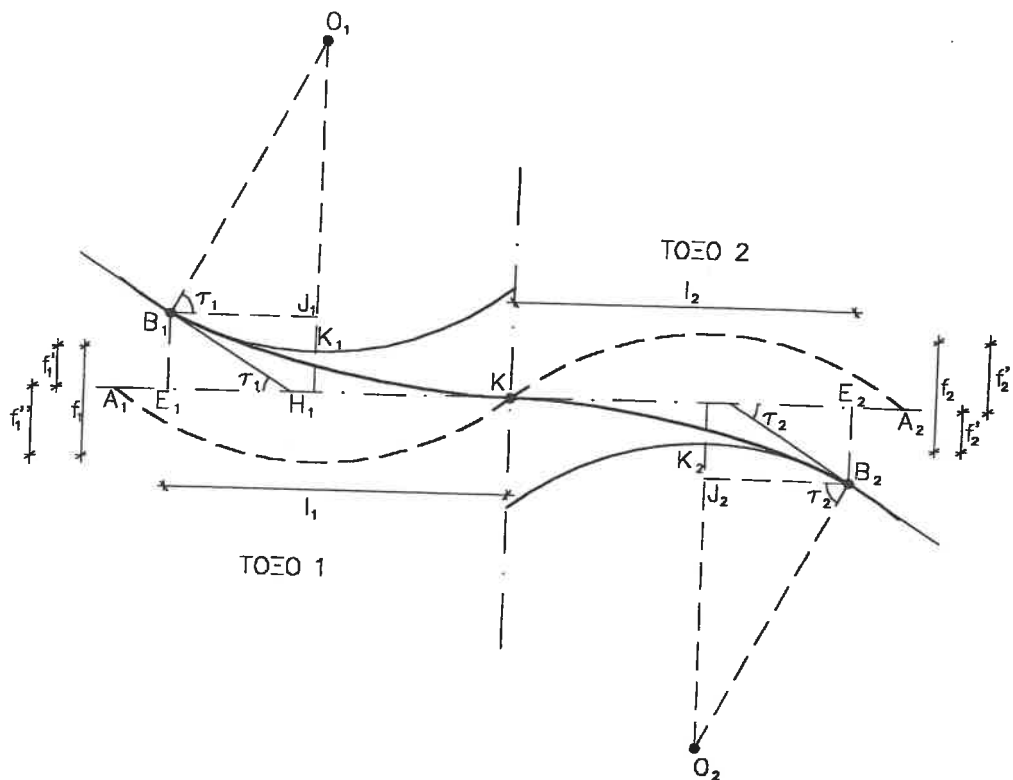
2.2.2 Συναρμογή δυο αντίρροπων κυκλικών τόξων

[1] Ν.Κ.Ε.Γ. Άρθρο 7.7

[3] Σιδηροδρομική-Β.Προφυλλίδη

Συχνά προκύπτει το πρόβλημα συνδέσεως δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων με καμπυλότητες K_1 και K_2 αντίστοιχα, ακτίνες R_1 και R_2 και απαιτούμενες υπερυψώσεις h_1 και h_2 . Τα κυκλικά αυτά τόξα είναι εφαιπτόμενα στο K πριν εφαρμοστεί η κατάλληλη συναρμογή. Στην περίπτωση των διαδοχικών αντίρροπων κυκλικών τόξων η εφαρμογή συναρμογής είναι ακόμη πιο απαραίτητη απ' ό,τι κατά την σύνδεση ευθυγραμμίας-κυκλικού τόξου. Πράγματι, το τίναγμα κατά την μετάβαση από μια υπερύψωση h_1 σε μια μη μηδενική υπερύψωση h_2 και μάλιστα αντίθετης φοράς, είναι μεγαλύτερο απ' ό,τι κατά την μετάβαση από την μηδενική σε μια τιμή υπερύψωσης h_1 . Κατά την συναρμογή μεταξύ δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων, παρεμβάλλονται από μια παραβολική καμπύλη προς κάθε κυκλικό τόξο κι ενδιάμεσο ευθύγραμμο τμήμα ελάχιστου μήκους 30 μέτρων. Αν το τελευταίο δεν είναι εφικτό, το ευθύγραμμο τμήμα παραλείπεται και οι δυο καμπύλες συναρμογής έχουν κοινή αρχή, κοινή εφαιπτομένη και ίδια μεταβολή καμπυλότητας.

Στο παρακάτω σχήμα 2.2.2.1 έχει οριστεί σύστημα συντεταγμένων $x-y$ με κέντρο το σημείο επαφής των δύο προς συναρμογή κυκλικών τόξων. Όμως, όπως φαίνεται και στο σχήμα, τα δύο κυκλικά τόξα έχουν, χάρην της συναρμογής, μετατοπισθεί κατά τι προς αντίθετες κατευθύνσεις και συγκεκριμένα το καθένα προς την φορά των κοίλων τους. Έτσι έχει εγγραφεί το τόξο συναρμογής B_1K , κατά το οποίο η υπερύψωση και η καμπυλότητα μειώνονται από τις τιμές h_1 και K_1 αντίστοιχα, στην τιμή μηδέν και για τα δύο μεγέθη. Αντίθετα, στο τόξο συναρμογής KB_2 , η υπερύψωση και η καμπυλότητα αυξάνονται από την μηδενική, στις τιμές h_2 και K_2 αντίστοιχα.



Σχήμα 2.2.2.1

Συναρμογή δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων με τόξο κυβικής παραβολής

O_1, O_2 : κέντρα κυκλικών τόξων 1,2

τ_1, τ_2 : γωνίες τ που αντιστοιχούν στα τόξα 1,2

f_1, f_2 : εκτροπές κυκλικών τόξων 1,2

Αν πρόκειται για τόξα συναρμογής μικρού μήκους, ισχύουν κατά τα γνωστά οι εξισώσεις της παραγράφου 2.2.1.1.1 και για τα δύο τόξα κυβικής παραβολής 1 και 2 του σχήματος.

Οι αποκλίσεις f_1 και f_2 έχουν χωριστεί ως εξής, όπως δείχνει και το σχήμα:

$$f_1 = f_1' + f_1'' \quad \text{όπου} \quad f_1' = J_1 \Delta_1 \quad \text{και} \quad f_1'' = \Delta_1 M_1$$

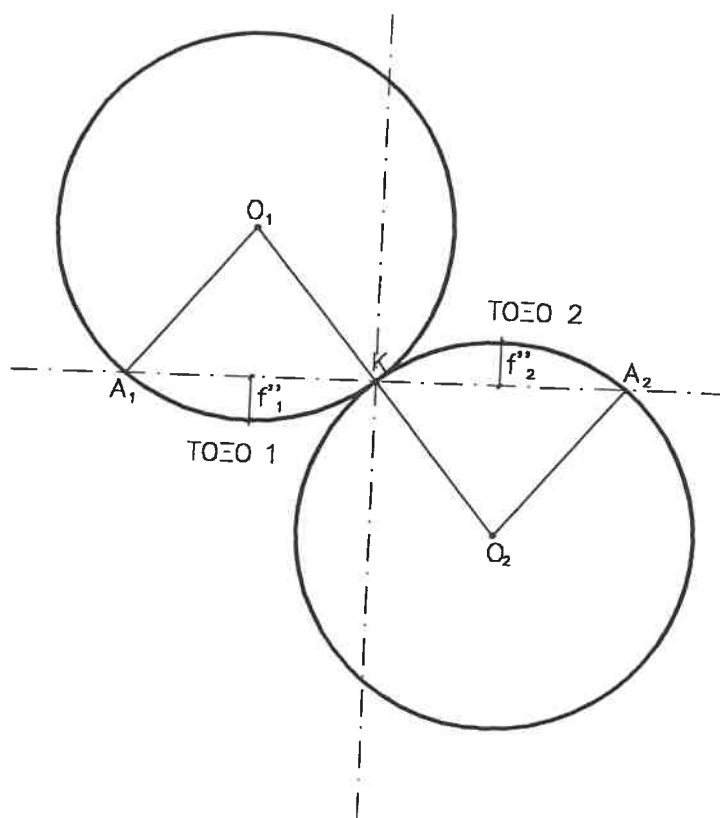
$$f_2 = f_2' + f_2'' \quad \text{όπου} \quad f_2' = J_2 \Delta_2 \quad \text{και} \quad f_2'' = \Delta_2 M_2$$

Οι f_1' και f_2' υπολογίζονται από την σχέση της παραγράφου 2.2.1.1.1 για μικρά

$$\text{μήκη: } f_1' = \frac{l_1^2}{24R_1} \quad \text{και} \quad f_2' = \frac{l_2^2}{24R_2}.$$

Μένει τώρα να υπολογισθούν οι f_1'' και f_2'' . Όμως για τα «παλιά» κυκλικά τόξα (αυτά πριν τη μετατόπιση), η χορδή E_1E_2 μήκους $l_1 + l_2$ είναι κοινή, ενώ οι f_1' και f_2' είναι τα αντίστοιχα ανοιχτά τόξα, όπως φαίνεται και στο βοηθητικό σχήμα 2.2.2.2. Ισχύει βέβαια η γενική σχέση $V = \frac{C^2}{8R}$, όπου C η χορδή, R η ακτίνα και V το ανοιχτό τόξο που αντιστοιχεί σε μια χορδή C του κύκλου. Τα f_1'' και f_2'' είναι ανοιχτά τόξα των αντίστοιχων κύκλων, οπότε

$$f_1'' = \frac{l_1^2}{8R_1} \text{ και } f_2'' = \frac{l_2^2}{8R_2}.$$



Σχήμα 2.2.2.2

Τέλος, συνολικά: $f_1 = f_1' + f_1'' = \frac{l_1^2}{24R_1} + \frac{l_1^2}{8R_1} \Leftrightarrow f_1 = \frac{l_1^2}{6R_1}$ εκτροπή κυκλικού τόξου 1.

Ομοίως $f_2 = f_2' + f_2'' = \frac{l_2^2}{24R_2} + \frac{l_2^2}{8R_2} \Leftrightarrow f_2 = \frac{l_2^2}{6R_2}$ εκτροπή κυκλικού τόξου 2.

Στην περίπτωση τόξων συναρμογής μεγάλου μήκους τα f_1'' και f_2'' παραμένουν όπως υπολογίσθηκαν λίγο πριν, ενώ τα f_1' και f_2' υπολογίζονται αναλυτικά όπως στην παράγραφο 2.3.1.2:

$$f_1' = y_{L_1} - R_1(1 - \cos \tau_1) = \frac{I_1^2}{6R_1} \left(1 + \frac{I_1^2}{4R_1^2} \right)^{3/2} - R_1(1 - \cos \tau_1)$$

$$f_2' = y_{L_2} - R_2(1 - \cos \tau_2) = \frac{I_2^2}{6R_2} \left(1 + \frac{I_2^2}{4R_2^2} \right)^{3/2} - R_2(1 - \cos \tau_2)$$

Άρα συνολικά:

$$f_1 = f_1' + f_1'' = \frac{I_1^2}{6R_1} \left(1 + \frac{I_1^2}{4R_1^2} \right)^{3/2} - R_1(1 - \cos \tau_1) + \frac{I_1^2}{8R_1}$$

$$f_2 = f_2' + f_2'' = \frac{I_2^2}{6R_2} \left(1 + \frac{I_2^2}{4R_2^2} \right)^{3/2} - R_2(1 - \cos \tau_2) + \frac{I_2^2}{8R_2}$$

Με την δυνατότητα παρεμβολής ενδιάμεσης ευθυγραμμίας η συναρμογή επιτυγχάνεται καλύτερα, αφού για λίγο διατηρείται η μηδενική υπερύψωση και καμπυλότητα της ενδιάμεσης ευθυγραμμίας, πριν το όχημα εισέλθει στην αντίρροπη περιοχή.

2.2.3 Συναρμογή μεταξύ ομόρροπων κυκλικών καμπύλων

[1] Ν.Κ.Ε.Γ. Άρθρο 7.(5,6)

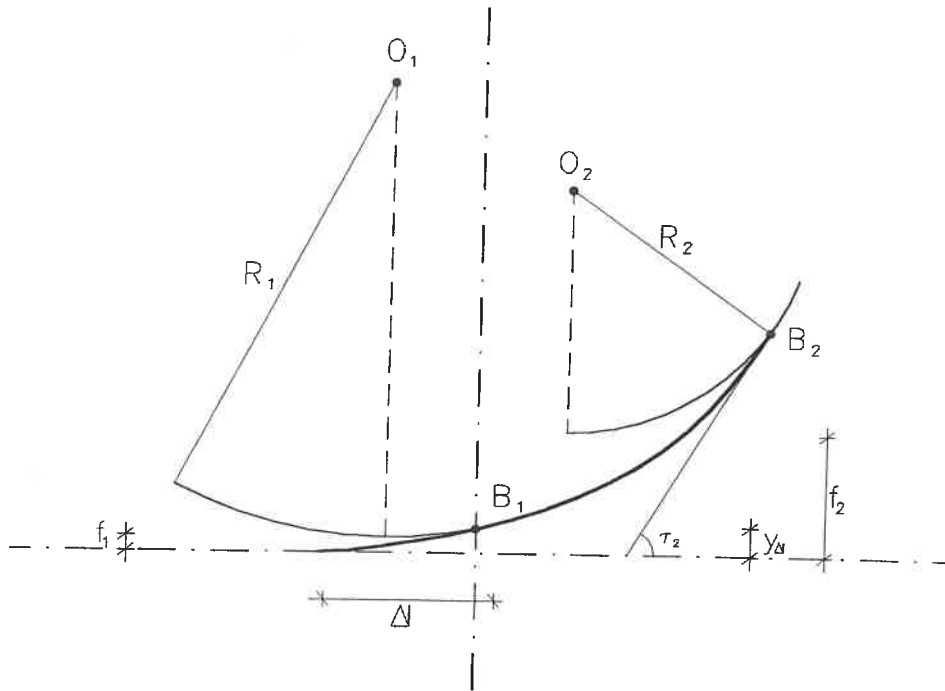
Μεταξύ δύο ομόστροφων κυκλικών τόξων διαφορετικής ακτίνας και καμπυλότητας, άρα και διαφορετικής εφαρμοζόμενης υπερύψωσης, η συναρμογή απαιτείται για το ομαλό πέρασμα μεταξύ των διαφορετικών υπερυψώσεων και καμπυλοτήτων των δύο κυκλικών τόξων. Η ενδιάμεση ευθυγραμμία που τυχόν μεσολαβεί είναι καθοριστική για τον τρόπο με τον οποίο θα υλοποιηθεί η συναρμογή κάτι που δεν συνέβαινε στην περίπτωση των αντίρροπων τόξων. Πράγματι, στην περίπτωση των αντίρροπων τόξων, ανεξάρτητα από την ύπαρξη ευθυγραμμίας ή όχι, η συναρμογή γινόταν αναγκαστικά με δύο κυβικές παραβολές αντίθετης μεταβολής της καμπυλότητας και της υπερύψωσης, ενώ υποχρεωτικά υπήρχε ένα σημείο μηδενισμού των δύο τελευταίων. Στην περίπτωση των ομόστροφων καμπύλων δεν είναι απαραίτητη η

ύπαρξη ούτε δύο καμπύλων συναρμογής, ούτε σημείου μηδενισμού καμπυλότητας και υπερύψωσης και το αν μπορεί να αποφευχθεί ή όχι, εξαρτάται από το μήκος της ενδιάμεσης ευθυγραμμίας. Έτσι διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

2.2.3.1 Αν το ενδιάμεσο ευθύγραμμο τμήμα είναι αρκετά μεγάλο ώστε να επαρκεί για δύο κανονικές παραβολικές συναρμογές και των δύο κυκλικών καμπύλων με την ευθυγραμμία, τότε η συναρμογή αποτελείται από δύο κυβικές παραβολές ξεχωριστά για το κάθε κυκλικό τόξο, και μεσολαβεί και το ευθύγραμμο τμήμα που απομένει, εφόσον το ευθύγραμμο αυτό τμήμα, μετά τις στρογγυλεύσεις, είναι μεγαλύτερο των 30 μέτρων. Μήκος 30 μέτρων είναι γενικά επαρκές να χωρέσει ένα φορείο του οχήματος, έτσι ώστε κάθε φορείο να μην βρίσκεται ταυτόχρονα σε δύο καμπύλες με διαφορετική υπερύψωση.

2.2.3.2 Όταν η ενδιάμεση ευθυγραμμία δεν επαρκεί για να χωρέσει δύο ξεχωριστά τόξα συναρμογής και προς τα δύο κυκλικά τόξα ή το ενδιάμεσο τμήμα που περισσεύει τελικά και μετά τις στρογγυλεύσεις είναι μικρότερο των 30 μέτρων, τότε η συναρμογή γίνεται με ένα μόνο τόξο συναρμογής, ως εξής:

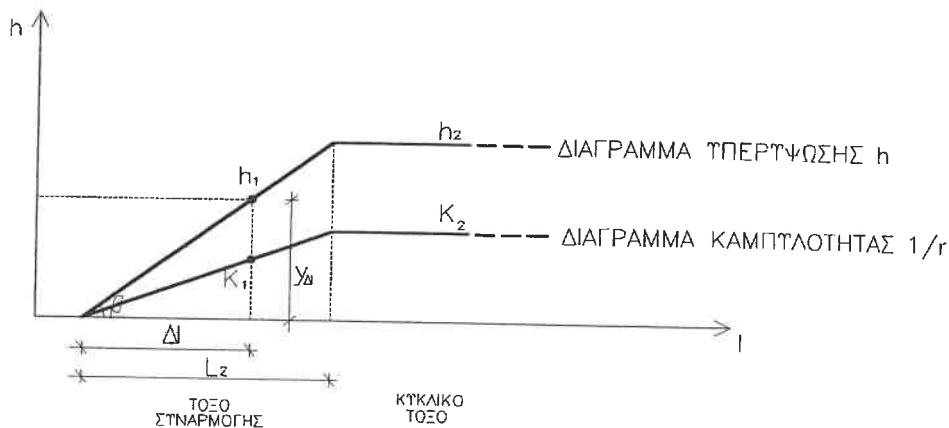
Όπως φαίνεται και από το σχήμα (Σχήμα 2.2.3.1), το τόξο συναρμογής κυβικής παραβολής ενώνει την ευθυγραμμία–ή την νοητή πρέκτασή της– με το κυκλικό τόξο 2. Η εξίσωση αυτού, καθώς και τα γεωμετρικά στοιχεία όλης της συναρμογής, ακολουθούν κατά τα γνωστά τις σχέσεις που παρουσιάστηκαν στις παραγράφους 2.2.1.1.1 και 2.2.1.1.2.



Σχήμα 2.2.3.1

Συναρμογή δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων στην περίπτωση που η ενδιάμεση ευθυγραμμία δεν επαρκεί για δύο τόξα συναρμογής και προς τα δύο κυκλικά τόξα ή το ενδιάμεσο ευθύγραμμο τμήμα που απομένει είναι μικρότερο των 30μ.

Πηγή: [1] Άρθρο 7.6, σελ.13



Σχήμα 2.2.3.2

Διάγραμμα υπερύψωσης και καμπυλότητας του τόξου με την μεγαλύτερη υπερύψωση και καμπυλότητα στην περίπτωση συναρμογής δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων στην περίπτωση που η ενδιάμεση ευθυγραμμία δεν επαρκεί για δύο τόξα συναρμογής και προς τα δύο κυκλικά τόξα ή το ενδιάμεσο ευθύγραμμο τμήμα που απομένει είναι μικρότερο των 30μ.

Το κυκλικό τόξο 1 ενώνεται με το τόξο συναρμογής στο σημείο Β₁ εκείνο, που συμπίπτει η υπερύψωση και η καμπυλότητά του με αυτό του τόξου συναρμογής. Η θέση του σημείου Β₁(ΔΙ, γ_{ΔΙ}) υπολογίζεται στις σειρές που ακολουθούν.

$$\text{Είναι } R_1 > R_2 \rightarrow K_1 = 1000/R_1 < K_2 = 1000/R_2$$

Αν παραδεχτούμε την εφαρμογή κανονικής υπερύψωσης στα κυκλικά τόξα, τότε

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R_1} \\ h_2 &= 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R_2} \end{aligned} \right\} \text{κι επειδή } R_1 > R_2 \text{ ισχύει } h_1 < h_2.$$

Στο τόξο συναρμογής η καμπυλότητα και η υπερύψωση θα αυξάνονται κατά τα γνωστά σύμφωνα με το διάγραμμα του σχήματος 2.2.3.2. Εφόσον, όπως είδαμε $h_1 < h_2$, η υπερύψωση του κυκλικού τόξου 1, h_1 , θα βρίσκεται σε κάποια θέση μέσα στο τόξο συναρμογής, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Επομένως, η θέση ΔΙ από την αρχή του τόξου συναρμογής (που συμπίπτει με την αρχή του πρανούς υπερύψωσης) θα ικανοποιεί τη σχέση

$$h_1 = h_{\alpha\rho\chi} + \varepsilon\phi\beta \cdot \Delta I \quad \text{όπου εδώ } h_{\alpha\rho\chi} = 0 \text{ και } \varepsilon\phi\beta \text{ η κλίση του πρανούς, ίση με } \varepsilon\phi\beta = \frac{h_2}{L_2}.$$

Οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$h_1 = 0 + \frac{h_2}{L_2} \cdot \Delta I \Leftrightarrow \Delta I = L_2 \cdot \frac{h_1}{h_2} = L_2 \cdot \frac{7.12 \frac{V_{\max}^2}{R_1}}{7.12 \frac{V_{\max}^2}{R_2}} \Leftrightarrow \Delta I = L_2 \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

Στο ίδιο σημείο, αν πρόκειται για τόξα μικρού μήκους, η τεταγμένη είναι

$$y_{\Delta I} = \frac{(\Delta I)^3}{6R_2L_2} = \frac{L_2^3 \cdot \frac{R_2^3}{R_1^3}}{6R_2L_2} \Leftrightarrow y_{\Delta I} = \frac{(R_2L_2)^2}{6R_1^3}$$

ενώ αν πρόκειται για τόξα μεγάλου μήκους

$$y = \frac{(\Delta I)^3}{6R_2L_2} \left(1 + \frac{L_2^2}{4R_2^2} \right)^{3/2} = \frac{(R_2L_2)^2}{6R_1^3} \left(1 + \frac{L_2^2}{4R_2^2} \right)^{3/2}$$

Προσδιορίστηκαν έτσι οι συντεταγμένες του σημείου Β₁ όπου το κυκλικό τόξο 1 συναντάει το τόξο συναρμογής του κυκλικού τόξου 2 με την ευθυγραμμία.

Η εκτροπή του κυκλικού τόξου 2 θα είναι κατά τα γνωστά

$$f_2 = \frac{L_2^2}{24R_2} \text{ αν πρόκειται για τόξο μικρού μήκους, ενώ}$$

$$f_2 = \frac{L_2^2}{6R_2} \left(1 + \frac{L_2^2}{4R_2^2} \right)^{3/2} - R_2(1 - \cos \tau_2)$$

$$\text{όπου } \tau_2 = \frac{L_2}{2R_2} \text{ αν πρόκειται για τόξο μεγάλου μήκους.}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η εκτροπή f_1 που θα λάβει το κυκλικό τόξο 1.

Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα των x να συμπίπτει με τον άξονα της ευθυγραμμίας και το άξονα των y να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου 1, τότε η εξίσωση του κύκλου 1 είναι:

$$[x - (R_1 + f_1)]^2 + y^2 = R_1^2 \Leftrightarrow y^2 = R_1^2 - [x - (R_1 + f_1)]^2$$

ενώ, αν πρόκειται για τόξα μικρού μήκους, η εξίσωση του τόξου συναρμογής είναι

$$y = \frac{x^3}{6R_2L_2} \text{ και άρα } y^2 = \left(\frac{x^3}{6R_2L_2} \right)^2$$

Στο σημείο τομής των δύο καμπύλων είναι το y κοινό και το $x = \Delta l$. Εξισώνοντας λοιπόν τα δεύτερα μέλη των δύο παραπάνω εξισώσεων και θέτοντας $x = \Delta l = L_2 \cdot \frac{R_2}{R_1}$

προκύπτει:

$$\begin{aligned}
R_1^2 - [\Delta - (R_1 + f_1)]^2 &= \frac{(\Delta)^6}{36R_2^2L_2^2} \Leftrightarrow R_1^2 - (\Delta)^2 - (R_1 + f_1)^2 + 2(\Delta)(R_1 + f_1) = \frac{(\Delta)^6}{36R_2^2L_2^2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow R_1^2 - (\Delta)^2 - R_1^2 - f_1^2 - 2R_1f_1 + 2(\Delta)R_1 + 2(\Delta)f_1 &= \frac{(\Delta)^6}{36R_2^2L_2^2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (\Delta)^2 + f_1^2 + 2R_1f_1 - 2(\Delta)R_1 - 2(\Delta)f_1 + \frac{(\Delta)^6}{36R_2^2L_2^2} &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{L_2^2R_2^2}{R_1^2} + f_1^2 + 2R_1f_1 - 2\frac{L_2R_2}{R_1} \cdot R_1 - 2\frac{L_2R_2}{R_1} \cdot f_1 + \frac{\frac{L_2^6R_2^6}{R_1^6}}{36R_2^2L_2^2} &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow f_1^2 + 2\left(R_1 - \frac{L_2R_2}{R_1}\right)f_1 + \left(\frac{L_2^2R_2^2}{R_1^2} - 2L_2R_2 + \frac{L_2^4R_2^4}{36R_1^6}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση λύνεται με την μέθοδο της διακρίνουσας:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4\left(R_1 - \frac{L_2R_2}{R_1}\right)^2 - 4\left(\frac{L_2^2R_2^2}{R_1^2} - 2L_2R_2 + \frac{L_2^4R_2^4}{36R_1^6}\right) = \\
&= 4\left(R_1^2 + \frac{L_2^2R_2^2}{R_1^2} - 2L_2R_2\right) - 4\left(\frac{L_2^2R_2^2}{R_1^2} - 2L_2R_2 + \frac{L_2^4R_2^4}{36R_1^6}\right) = \\
&= 4R_1^2 + 4\frac{L_2^2R_2^2}{R_1^2} - 8L_2R_2 - 4\frac{L_2^2R_2^2}{R_1^2} + 8L_2R_2 - 4\frac{L_2^4R_2^4}{36R_1^6} = \\
&= 4R_1^2 - 4\frac{L_2^4R_2^4}{R_1^6} = 4\left(R_1^2 - \frac{L_2^4R_2^4}{36R_1^6}\right) \\
f_1 &= \frac{-2\left(R_1 - \frac{L_2R_2}{R_1}\right) \pm 2\sqrt{R_1^2 - \frac{L_2^4R_2^4}{36R_1^6}}}{2} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

προκύπτουν οι δύο λύσεις:

$$f_1 = -\left(R_1 - \frac{L_2R_2}{R_1}\right) + \sqrt{R_1^2 - \frac{L_2^4R_2^4}{36R_1^6}} \text{ και } f_1 = -\left(R_1 - \frac{L_2R_2}{R_1}\right) - \sqrt{R_1^2 - \frac{L_2^4R_2^4}{36R_1^6}}$$

από τις οποίες η δεύτερη απορρίπτεται ως αρνητική. Έτσι

$$f_1 = \sqrt{R_1^2 - \frac{L_2^4R_2^4}{36R_1^6}} - \left(R_1 - \frac{L_2R_2}{R_1}\right)$$

Αναλόγως προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση από την οποία υπολογίζεται η τιμή του f_1 , όταν πρόκειται για τόξα μεγάλου μήκους.

Παρατήρηση: Το τόξο συναρμογής εφαρμόζεται ανάμεσα στην ευθυγραμμία και το κυκλικό τόξο με την μικρότερη ακτίνα. Είναι εκείνο που έχει την μεγαλύτερη καμπυλότητα και υπερύψωση από τα δύο κυκλικά τόξα, και μόνο έτσι είναι δυνατόν στο πρανές υπερύψωσής του (προηγούμενο σχήμα) να υπάρξει ενδιάμεσο σημείο με υπερύψωση h_1 (η υπερύψωση του μεγάλου κυκλου). Ανάλογα ισχύει και με το διάγραμμα καμπυλότητας. Με άλλα λόγια, με τον τρόπο αυτό μπορεί να ενωθεί το κυκλικό τόξο μεγαλύτερης ακτίνας στο τόξο συναρμογής του κυκλικού τόξου μικρότερης ακτίνας με την ευθυγραμμία. Στην αντίθετη περίπτωση, το κυκλικό τόξο μικρότερης ακτίνας, θα είχε ήδη μεγαλύτερη υπερύψωση και καμπυλότητα και υπερύψωση από αυτές του μεγαλύτερου κυκλικού τόξου, και άρα δεν θα υπήρχε στο πρανές υπερύψωσης και το διάγραμμα καμπυλότητας του μεγαλύτερου κυκλικού τόξου ένα σημείο με υπερύψωση και καμπυλότητα ίση με h_2 και K_2 αντιστοίχως.

2.2.3.3 Τέλος, υφίσταται και το πρόβλημα σύνδεσης δύο ομόρροπων συνεχόμενων κυκλικών τόξων, χωρίς ενδιάμεση ευθυγραμμία.

Τα κυκλικά τόξα έχουν ακτίνες R_1 και R_2 . Επίσης, με τις εκατέρωθεν ευθυγραμμίες, καμπύλες συναρμογής μήκους L_1 και L_2 , με προβολές l_1 και l_2 και μετατοπίσεις f_1 και f_2 . Η παραβολική συναρμογή, λοιπόν, θα ορίζεται από τις εξισώσεις: [1] Ν.Κ.Ε.Γ. Άρθρο 7.5

α. Για την πλευρά προς την καμπύλη με ακτίνα R_1 :

$$y = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{f}{2} - \frac{1}{6l\rho} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{2} - x \right)^3 \right]$$

β. Για την πλευρά προς την καμπύλη με ακτίνα R_2 :

$$y = \frac{x^2}{2R_2} + \frac{f}{2} + \frac{1}{6l\rho} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{2} - x \right)^3 \right]$$

$$\text{όπου } f = f_2 - f_1 = \frac{l_2^2}{24R_2} - \frac{l_1^2}{24R_1}$$

$$\rho = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2}$$

$$l = \sqrt{24\rho f} = \sqrt{24 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} \left(\frac{l_2^2}{24R_2} - \frac{l_1^2}{24R_1} \right)} = \sqrt{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} \left(\frac{l_2^2}{R_2} - \frac{l_1^2}{R_1} \right)} =$$

$$\sqrt{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} \left(\frac{R_1 l_2^2 - R_2 l_1^2}{R_1 \cdot R_2} \right)} \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{R_1 l_2^2 - R_2 l_1^2}{R_1 - R_2}}$$

Παρατήρηση: Στον Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ προτείνεται κάτι διαφορετικό σε σχέση με τους γερμανικούς κανονισμούς. όσον αφορά την ένωση δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων. Πράγματι, στον Ν.Κ.Ε.Γ προτείνεται η συναρμογή των τόξων ανάλογα με την ενδιάμεση ευθυγραμμία ή την ευθυγραμμία που απομένει μεταξύ των τόξων μετά την συναρμογή. Διακρίνονται έτσι 3 περιπτώσεις, οι 2.2.3.1, 2.2.3.2 και 2.2.3.3. Στους γερμανικούς κανονισμούς προτείνεται απ' ευθείας η ένωση των κυκλικών τόξων με τόξο κλωθοειδούς.

2.2.4 Βασικά στοιχεία της πολυγωνικής της χάραξης

[2] Σιδηροδρομική-Απ.Γιώτη

Η μελέτη της χάραξης της πολυγωνικής προϋποθέτει την χρησιμοποίηση κυκλικών τόξων και κυβικών παραβολών εκατέρωθεν στις θέσεις των καμπύλων στην οριζοντιογραφία (Σχήμα 2.2.4).

Οι σχέσεις με τις οποίες υπολογίζονται τα στοιχεία αυτά είναι οι ακόλουθες:

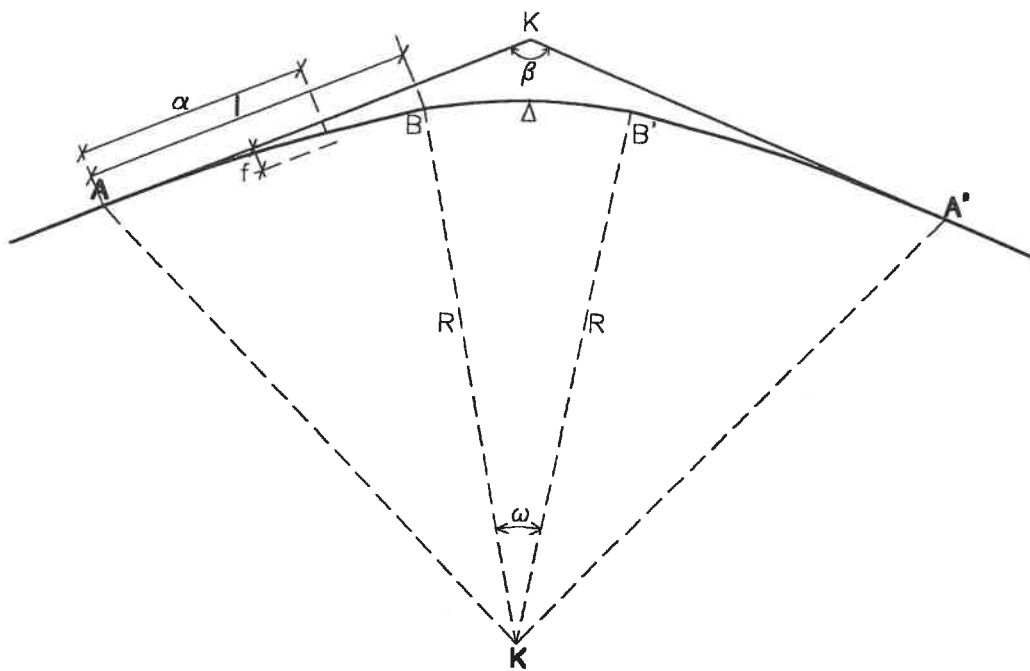
$$\frac{\omega}{2} + \frac{\beta}{2} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\omega}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ \rightarrow \sin \frac{\omega}{2} = \cos \frac{\beta}{2}, \cos \frac{\omega}{2} = \sin \frac{\beta}{2}, \tan \frac{\omega}{2} = \cot \frac{\beta}{2}, \cot \frac{\omega}{2} = \tan \frac{\beta}{2}$$

$$AK = (R + f) \tan \frac{\omega}{2} + a = (R + f) \cot \frac{\beta}{2} + a$$

$$K\Delta = (R + f) \left(\frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} - 1 \right) + f$$

$$AB\Delta = \frac{1}{2}(R\frac{\pi\omega}{180^\circ} + L) = \frac{1}{2}(R\frac{\pi(180^\circ - \beta)}{180^\circ} + L)$$

$$AB\Delta B'A' = R \frac{\pi\omega}{180^\circ} + L = R \frac{\pi(180^\circ - \beta)}{180^\circ} + L$$



Σχήμα 2.2.4

Πολυγωνική της χάραξης όπου φαίνονται τα δύο τόξα συναρμογής AB και $A'B'$ του κυκλικού τόξου BB' με την ευθυγραμμία.

Πηγή: [2] σελ.66

Ι: προβολή του μήκους του τόξου συναρμογής στον άξονα της ευθυγραμμίας σε

β : εσωτερική γωνία της κορυφής της πολυγωνικής

ω: επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στο κυκλικό τόξο ακτίνας R

R: ακτίνα κυκλικού τόξου σε m

f: εκτροπή του κυκλικού τόξου σε m

3. Οι βρετανικοί κανονισμοί για τις καμπύλες συναρμογής

3.1 Ευθυγραμμία-Κυκλικό τόξο

Όταν μια κυκλική καμπύλη ενώνεται απ' ευθείας με μία ευθυγραμμία, τότε στο σημείο επαφής τους πραγματοποιείται απ' ευθείας μετάβαση από την μηδενική υπερύψωση- που εφαρμόζεται στην ευθυγραμμία-στην μέγιστη για την γραμμή υπερύψωση, που απαιτείται στο κυκλικό τόξο. Για την υλοποίηση της παραπάνω απαίτησης υπάρχουν οι εξής εναλλακτικές:

α/ η αύξηση της υπερύψωσης μέσα στην ευθυγραμμία, έτσι ώστε στο τέλος της και στο σημείο επαφής της με το κυκλικό τόξο να έχει αποκτηθεί η απαιτούμενη για το κυκλικό τόξο υπερύψωση.

β/ την αύξηση της υπερύψωσης μέσα στο κυκλικό τόξο έτσι ώστε να αποκτηθεί η απαιτούμενη για το κυκλικό τόξο υπερύψωση.

γ/ την αύξηση της υπερύψωσης τόσο μέσα στην ευθυγραμμία όσο και μέσα στο κυκλικό τόξο με την απόκτηση της απαιτούμενης υπερύψωσης μέσα στο κυκλικό τόξο.

Οι εναλλακτικές αυτές είναι κακές, τόσο στη θεωρία όσο και στην πράξη [4] :

Στην περίπτωση α, λόγω της υπερύψωσης της εξωτερικής σιδηροτροχιάς, το φορτίο του οχήματος μετατοπίζεται στην εσωτερική σιδηροτροχιά, ενώ στο σημείο επαφής με το κυκλικό τόξο το φορτίο απότομα ισοκατανέμεται πάλι στις δύο σιδηροτροχιές. Όταν δε η τιμή της υπερύψωσης είναι σημαντική, το τίναγμα είναι μεγάλο και μπορεί να προκαλέσει φθορές στις σιδηροτροχιές και στα οχήματα καθώς και μερικές φορές την απώλεια της ισορροπίας.

Στην περίπτωση β, όσο η επιθυμητή υπερύψωση μες στο κυκλικό τόξο δεν έχει αποκτηθεί ακόμα, η εξωτερική σιδηροτροχιά αναλαμβάνει αυξημένο φορτίο σε σχέση με

την εσωτερική, με αποτέλεσμα την γρηγορότερη φθορά της και μειονεκτήματα στην άνεση των επιβατών. Και σ' αυτή την περίπτωση παρατηρείται το τίναγμα που αναφέρθηκε στην προηγούμενη περίπτωση, με όλες τις συνέπειές του.

Τέλος, στην περίπτωση γ υπάρχει συνδυασμός των παραπάνω μειονεκτημάτων, τόσο μέσα στην ευθυγραμμία (περίπτωση α) όσο και μέσα στο κυκλικό τόξο (περίπτωση β), με αποτέλεσμα την μείωση της άνεσης των επιβατών, την φθορά των σιδηροτροχιών και ενίοτε την απώλεια ισορροπίας.

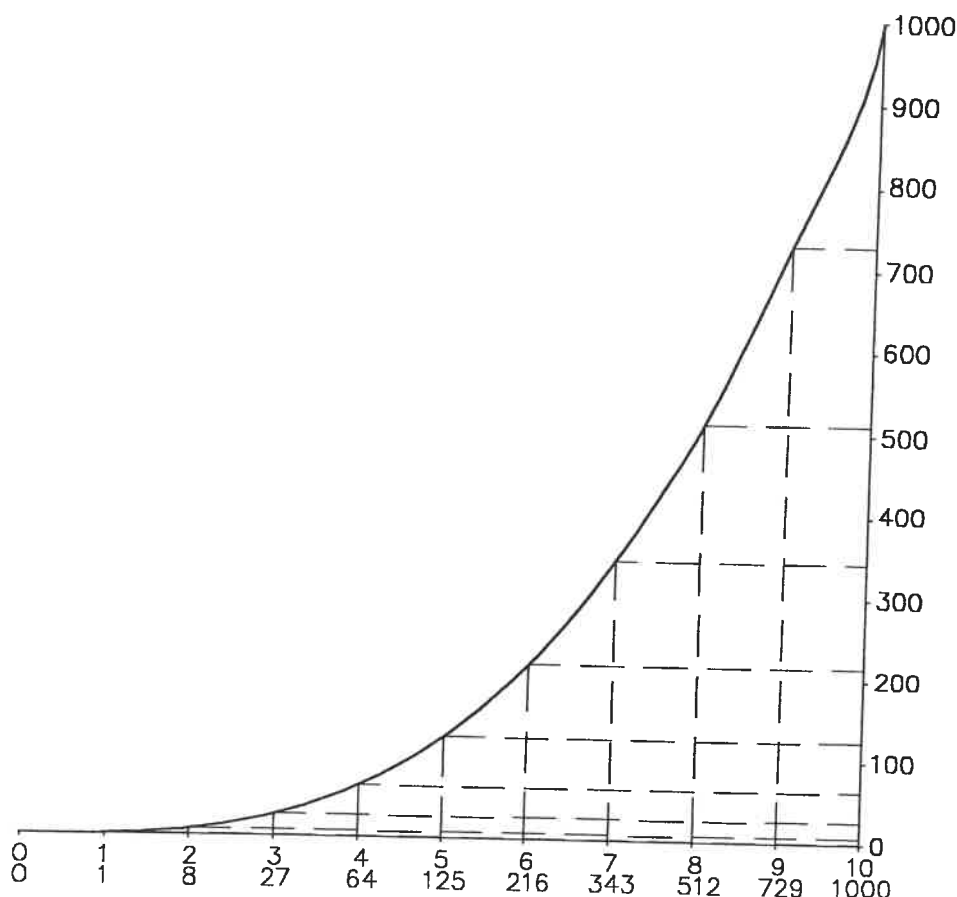
Η μόνη μέθοδος για να ξεπεραστούν τέτοιες σοβαρές δυσκολίες είναι η εισαγωγή, ανάμεσα στην ευθυγραμμία και το κυκλικό τόξο, ενός άλλου τόξου, του οποίου η ακτίνα θα μειώνεται βαθμιαία από την τιμή άπειρο της ευθυγραμμίας στην συγκεκριμένη τιμή του κυκλικού τόξου. Αντιστρόφως, στο τέλος του κυκλικού τόξου είναι απαραίτητη η εισαγωγή ενός τόξου του οποίου η ακτίνα θα αυξάνεται αντιθέτως βαθμιαία από την τιμή της ακτίνας του κυκλικού τόξου στη τιμή άπειρο της ευθυγραμμίας. Αυτό επίσης έχει ως αποτέλεσμα την σταδιακή μεταβολή-αύξηση ή μείωση-της φυγόκεντρου δύναμης από την τιμή μηδέν της ευθυγραμμίας στην τιμή που λαμβάνει στο κυκλικό τόξο-ή αντίθετα-αντί για την απότομη μεταβολή που λαμβάνει χώρα όταν η ευθυγραμμία ενώνεται απ' ευθείας στο κυκλικό τόξο.

Ένα τέτοιο τόξο καλείται τόξο συναρμογής (transition curve or easement) και το είδος του τόξου που συνήθως χρησιμοποιείται είναι η κυβική παραβολή. Στην κυβική παραβολή οι τεταγμένες της αυξάνουν κατά ποσότητα ίση με τον κύβο των τετμημένων της και σε κάθε σημείο της η ακτίνα είναι σχεδόν αντιστρόφως ανάλογη με την τετμημένη, δηλαδή της απόστασης του εκάστοτε σημείου από την αρχή της παραβολής.

Ένα τόξο κυβικής παραβολής φαίνεται στο σχήμα 3.1.1: Το τόξο αυτό της κυβικής παραβολής έχει χωριστεί σε δέκα τμήματα. Αν καθένα από αυτά τα δέκα τμήματα ήταν 1 μέτρο, τότε μέχρι το τέλος του τόξου θα μετρούνταν 10 μέτρα και οι αντίστοιχες τεταγμένες τους θα αυξάνονταν κατά τον κύβο της αντίστοιχης τετμημένης, δηλαδή κατά 1,8,27,64,125,216,343,512,729 και 1000. Αν όμως μέχρι το τέλος του τόξου δεν ήταν 10, αλλά για παράδειγμα 4 μέτρα, η τεταγμένη κάθε σημείου θα βρισκόταν

αναλογικά. Έτσι, η τεταγμένη στο 5^ο τμήμα θα ήταν $\frac{125}{1000}$ επί 4³ μέτρα, δηλαδή

$$\frac{125}{1000} \times 4^3 m = 0.125 * 64m = 8m$$



Σχήμα 3.1.1

Τόξο κυβικής παραβολής όπου οι τετμημένες του έχουν χωριστεί σε 10 ίσα τμήματα

Πηγή: [2] σελ 482

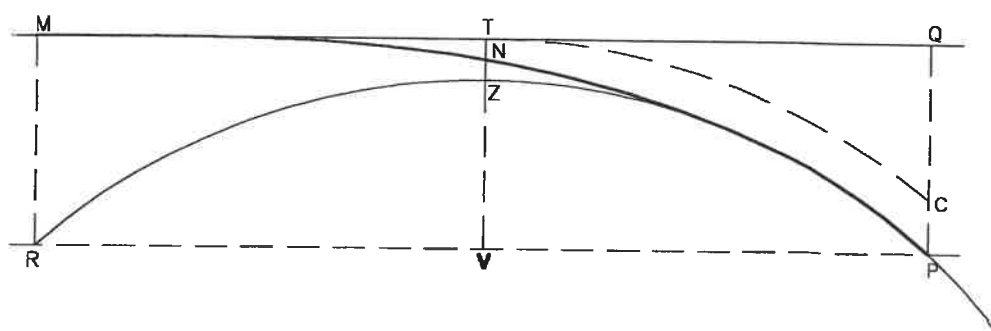
Το σημείο αρχής του τόξου είναι το 0, ενώ πρέπει να αναφερθεί ότι η τεταγμένη στο σημείο 4 είναι ίση με 2³ ή 8 φορές την τεταγμένη στο σημείο 2. Αντίστοιχα, η τεταγμένη στο σημείο 9 είναι 3³ ή 27 φορές την τεταγμένη στο σημείο 3.

Επίσης, η ακτίνα του τόξου στο σημείο 4 είναι η μισή της ακτίνας του τόξου στο σημείο 2, ενώ αντίστοιχα η ακτίνα στο σημείο 6 είναι το ένα τρίτο της ακτίνας στο σημείο 2, κ.ο.κ.

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει το συμπέρασμα ότι η εξίσωση στην οποία υπακούει η αύξηση των τεταγμένων της κυβικής παραβολής σε συνάρτηση με τις τιμές των τετμημένων είναι η $y = x^3$.

Ένα τέτοιο τόξο δεν μπορεί να παρεμβληθεί ανάμεσα σε μία ευθυγραμμία και ένα κυκλικό τόξο, αν, τόσο η ευθυγραμμία όσο και το κυκλικό τόξο δεν μετατοπιστούν κατά τι, σε μια θέση παράλληλη στην αρχική. Αν δε γίνει αυτό, τότε επιβάλλεται μια εξομάλυνση του κυκλικού τόξου, έτσι ώστε να ενωθεί ομαλά με το τόξο συναρμογής. Παρόλο που μια τέτοια εφαρμογή είναι λανθασμένη, είναι καλύτερη από την χρησιμοποίηση καθόλου συναρμογής, για το λόγο ότι τουλάχιστον επιτρέπει την βαθμιαία μεταβολή της υπερύψωσης.

Η σωστή εφαρμογή του τόξου συναρμογής στην περίπτωση ευθυγραμμίας-κυκλικού τόξου, απεικονίζεται στο σχήμα 3.1.2.



Σχήμα 3.1.2

Τόξο συναρμογής κυβικής παραβολής, όπου απεικονίζεται η αρχική TC και η τελική ZP θέση του κυκλικού τόξου, καθώς και η μετατόπισή του TZ.

Πηγή: [2] σελ 483

Το κυκλικό τόξο TC πριν τη μετατόπιση εφάπτεται της ευθυγραμμίας στο σημείο T. Στη συνέχεια μετατοπίζεται στη θέση ZP, και TZ είναι το ποσό της μετατόπισης.

Το τόξο συναρμογής MNP διχοτομεί την μετατόπιση TZ στο σημείο N.

Το συνολικό μήκος του τόξου συναρμογής, μετρούμενο στον οριζόντιο άξονα είναι MQ και το τμήμα MT είναι ίσο με το TQ.

Ακόμα, η τεταγμένη QP στο τέλος της συναρμογής είναι $2^3=8$ φορές την τεταγμένη TN στο μέσο της συναρμογής, σύμφωνα πάντα με το προηγούμενο σχήμα(γιατί τετμημένες $MQ=2MT \Leftrightarrow QP=2^3TN$). Όμως η τεταγμένη TN είναι η μισή της μετατόπισης S(shift) και άρα: $QP=4S$.

Χαράσσοντας την οριζόντια χορδή από το σημείο P,PR, προκύπτει ότι το ανοιχτό τόξο VZ συν TZ είναι $VZ + TZ = QP = 4S$. Όμως $TZ = S$ οπότε $VZ = 3S$

Έστω λοιπόν ένα κυκλικό τόξο γνωστής ακτίνας που απαιτείται να ενωθεί μέσω συναρμογής με μία ευθυγραμμία. Απο την στιγμή που θα καθοριστεί το επιθυμητό μήκος συναρμογής, δηλαδή η χορδή $PR=C$ του σχήματος, θα είναι γνωστό το ανοιχτό τόξο $V=VZ$, αφού ισχύει γενικά $V = \frac{C^2}{8R}$.

Όμως $VZ=3S$, οπότε υπολογίζεται και η μετατόπιση S: $S = \frac{VZ}{3} = \frac{\frac{C^2}{8R}}{3} = \frac{C^2}{24R}$.

Όμως η χορδή C συμπίπτει με το μήκος του τόξου συναρμογής (εφόσον στην κυβική παραβολή έχει γίνει η παραδοχή ότι το μήκος του παραβολικού τόξου είναι σχεδόν ίσο με την προβολή του στον άξονα των x) και άρα τελικά $S = \frac{L^2}{24R}$.

Έτσι λοιπόν υπολογίστηκε η σχέση που υπολογίζει την μετατόπιση του κυκλικού τόξου σε μικρά τόξα συναρμογής, από άλλο δρόμο, χωρίς δηλαδή να είναι γνωστή η εξίσωση του τόξου συναρμογής, όπως στον Ν.Κ.Ε.Γ..

Για τον υπολογισμό της μέγιστης τιμής της κλίσης του πρανούς και της ελάχιστης τιμής του μήκους του τόξου συναρμογής, χρησιμοποιούνται κάποια ανώτατα όρια για τα εξής μεγέθη:

-μέγιστος ρυθμός αύξησης της υπερύψωσης τα 55mm/sec.

Είναι μεγαλύτερος από τα 40mm/sec που προτείνει ο Ν.Κ.Ε.Γ.

Από το ανώτατο αυτό όριο προσδιορίζεται η μέγιστη κλίση του πρανούς υπερύψωσης, ως εξής:

Ρυθμός αύξησης της υπερύψωσης 55mm/sec σημαίνει αύξηση της υπερύψωσης κατά 55mm σε 1sec. Επίσης σε 1sec το όχημα έχει διανύσει απόσταση

$$\Delta l = u(m/sec) \cdot t = u(m/sec) \cdot 1sec = \frac{V}{3.6}(m). \text{ Οπότε}$$

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta l} \Leftrightarrow i_{\max} = \frac{55mm}{\frac{V_{\max}}{3.6}(m)} \Leftrightarrow i_{\max} = \frac{198}{V_{\max}}(mm/m) \text{ ή } i_{\max} = \frac{198}{V_{\max}}\% \text{ ή } i_{\max} = \frac{0.198}{V_{\max}}. \text{ Μέγιστη κλίση}$$

λοιπόν μεγαλύτερη προβλέπουν οι βρετανικοί κανονισμοί απ' ότι ο κανονισμός του ΟΣΕ. Επακόλουθα, η ελάχιστη τιμή για το μήκος του πρανούς προκύπτει από τον παραπάνω περιορισμό:

$$i_{\max} = \frac{h}{L_{\min}} = \frac{198}{V_{\max}} \Leftrightarrow L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{198}, \text{ δηλαδή λίγο μικρότερη απ' ότι στον κανονισμό του ΟΣΕ.}$$

-μέγιστος ρυθμός αύξησης της ανεπάρκειας της υπερύψωσης τα 55mm/sec

Είναι κατά τι μικρότερος από τα 60mm/sec που προτείνει Ν.Κ.Ε.Γ.

Από το παραπάνω μέγιστο όριο για την αύξηση της ανεπάρκειας της υπερύψωσης, προκύπτει:

Αν μ ο ρυθμός αύξησης της ανεπάρκειας της υπερύψωσης τότε

$$\mu = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta \left(\frac{L}{u} \right)} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta L} \cdot \Delta u \Leftrightarrow \mu = \frac{\alpha}{L} \cdot \frac{V_{\max}}{3.6}. \text{ Για την τιμή } \mu = 55mm/sec:$$

$$55mm/sec = \frac{\alpha}{L_{\min}} \cdot \frac{V_{\max}}{3.6} \Leftrightarrow L_{\min} = \frac{\alpha \cdot V_{\max}}{198}, \text{ που είναι λίγο μεγαλύτερο από το } L_{\min} = \frac{\alpha \cdot V_{\max}}{216}$$

που προβλέπει ο Ν.Κ.Ε.Γ.

-μέγιστη κλίση πρανούς ίση με $\frac{1}{400}$ (κατασκευαστικό όριο). Είναι ίση με την μέγιστη

κλίση 2,5% που προβλέπεται στον Ν.Κ.Ε.Γ. Απ' αυτό προκύπτει για το μήκος του

πρανούς $L_{\min} = \frac{h}{2.5}$ σε m ή $L_{\min} = 400 \cdot h$ σε mm.

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζονται οι περιορισμοί για την κλίση και το μήκος του πρανούς και στην περίπτωση μετάβασης από κυκλικό τόξο σε κυκλικό τόξο, με την λογική ότι τώρα οι τιμές της υπερύψωσης και της ανεπάρκειας της υπερύψωσης δεν είναι πουθενά μηδενικές, όπως ήταν στην ευθυγραμμία, αλλά έχουν κάποια αρχική τιμή.*

3.2 Ομόρροπες καμπύλες

Στην περίπτωση ομόρροπων καμπύλων που διαδέχονται η μία την άλλη χωρίς ενδιάμεση ευθυγραμμία, είναι απαραίτητη η εφαρμογή συναρμογής όταν οι ακτίνες αυτών είναι διαφορετικές εκτός αν διαφέρουν κατά λιγότερο από 15%.

Προβλέπεται, λοιπόν, από το αγγλικό βιβλίο, αποφυγή της εφαρμογής συναρμογής, όταν η διαφορά των ακτινών, άρα και των υπερυψώσεων είναι μικρότερη από 15%.

Σημείωση: Από την σχέση $V = \frac{C^2}{8R}$ προκύπτει ότι για κάθε τιμή της χορδής C, όσο πιο

μικρή είναι η ακτίνα R, τόσο πιο μεγάλο είναι το ανοιχτό τόξο V, δηλαδή για συγκεκριμένη τιμή της χορδής το ανοιχτό τόξο V μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με την ακτίνα R.

Είδαμε επίσης ότι στην κυβική παραβολή η ακτίνα σε κάθε σημείο της είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης του σημείου από την αρχή της παραβολής(τετμημένη του σημείου), που σημαίνει ότι η ακτίνα μειώνεται με ρυθμό ομοιόμορφο από την αρχή, μέχρι το σημείο που η κυβική παραβολή συναντάει το κυκλικό τόξο.

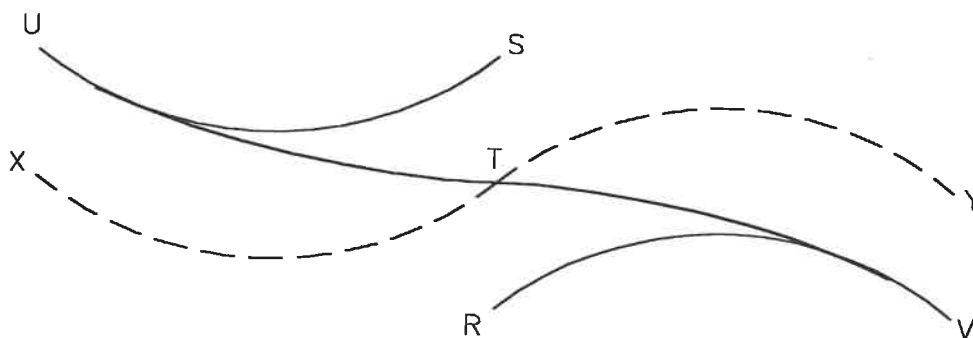
Εφόσον λοιπόν, σε μια κυβική παραβολή το ανοιχτό τόξο μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με την ακτίνα και η ακτίνα με τη σειρά της αντιστρόφως ανάλογα με την απόσταση του εκάστοτε σημείου από της αρχή, τότε το ανοιχτό τόξο μεταβάλλεται ανάλογα με την απόσταση του σημείου από την αρχή(τετμημένη του σημείου). Αυτό σημαίνει ότι το ανοιχτό τόξο αυξάνει με σταθερό ρυθμό κατά μήκος της κυβικής παραβολής.

* βλέπε ΠΙΝΑΚΑ 3.3.1.1
Γεωργοπούλου Ναταλία

3.3 Αντίρροπες καμπύλες

Όταν δύο καμπύλες αντίστροφης φοράς ενώνονται χωρίς την παρεμβολή ενδιάμεσης ευθυγραμμίας, το τινάγμα στο σημείο αλλαγής είναι ακόμα μεγαλύτερο απ' ότι στην προηγούμενη περίπτωση.

Στο σχήμα 3.3 απεικονίζονται δύο κυκλικές καμπύλες ΧΤ και ΤΥ αντίθετης φοράς που εφάπτονται στο σημείο Τ. Για ένα όχημα που εισέρχεται στην καμπύλη ΧΤ η φυγόκεντρη δύναμη είναι προς το εξωτερικό της καμπύλης μέχρι το σημείο Τ όπου η φυγόκεντρη δύναμη γίνεται αντίθετη σε φορά, καθώς το όχημα εισέρχεται στην καμπύλη ΤΥ. Το τόξο συναρμογής είναι, λοιπόν, ακόμα πιο απαραίτητη ανάμεσα σε δύο τέτοιες καμπύλες. Υπάρχει ένας αριθμός από τρόπους με τους οποίους μια καμπύλη συναρμογής μπορεί να εισαχθεί ανάμεσα στις δύο αντίστροφες κυκλικές καμπύλες. Για παράδειγμα, μία από τις δύο μπορεί να μετατοπισθεί σε σχέση με την άλλη, ή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και οι δύο μπορούν να μετατοπισθούν στις νέες θέσεις US και RV, και να εισαχθεί η συναρμογή UTV.



Σχήμα 3.3.1

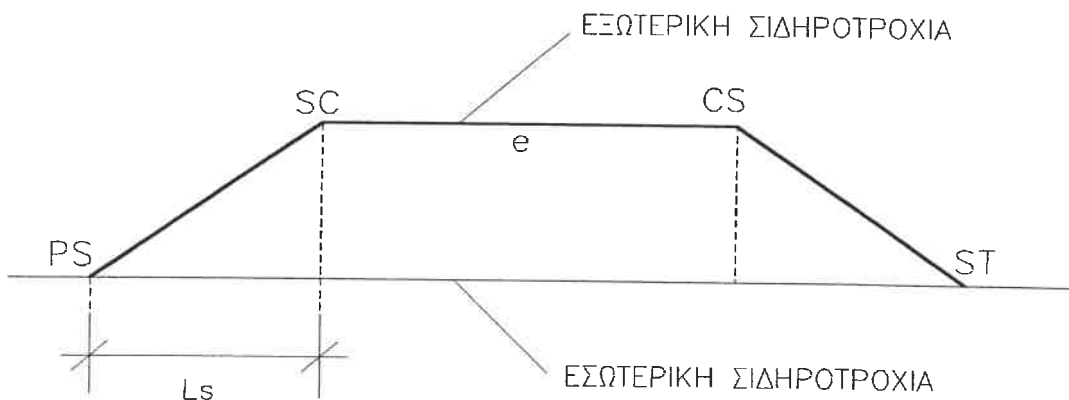
Συναρμογή δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων ΧΤ και ΤΥ με τόξο συναρμογής κυβικής παραβολής UTV.

Πηγή: [2], σελ 485.

4. Οι Αμερικάνοι για τις καμπύλες συναρμογής

4.1 Γενικά

Οι καμπύλες συναρμογής χρησιμοποιούνται για να προσφέρουν μια ομαλή μεταβολή της γωνίας και καλύτερη εγγραφή των οχημάτων κατά την μετάβαση από την ευθυγραμμία στον πλήρη κύκλο. Επίσης προσφέρουν ένα μέσο για την εισαγωγή της υπερύψωσης με ένα ρυθμό ανάλογο με αυτόν της αύξησης της καμπυλότητας από μία τιμή 0 inch. στην ευθυγραμμία(ή στην αρχή PS ή TS της συναρμογής) στην μέγιστη τιμή του κυκλικού τόξου(στο τέλος SC της συναρμογής).



Σχήμα 4.1.1

Ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης

Πηγή: [3] Figure 26.6, σελ 106

PS: αρχή πρανούς υπερύψωσης

SC: τέλος πρανούς υπερύψωσης

Ls: μήκος πρανούς υπερύψωσης σε ft

e: υπερύψωση σε inches

Τέλος, επιτρέπουν μία ομαλή αύξηση της ανεπάρκειας της υπερύψωσης με έναν άνετο για τους επιβάτες ρυθμό.

Η καμπύλη συναρμογής που συνήθως χρησιμοποιείται είναι ένα τμήμα κυβικής παραβολής, όπου οι τεταγμένες από την αρχή του τόξου μεταβάλλονται περίπου ανάλογα με τον κύβο την απόστασης από την αρχή (τετμημένη), τα ανοιχτά τόξα αυξάνονται με σταθερό ρυθμό και οι γωνίες μεταβάλλονται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή του τόξου. Οι βαθμοί της γωνίας του τόξου αυξάνονται με έναν σταθερό ρυθμό k .

Από τα παραπάνω προκύπτει $D = kS = kL_s / 100$(4.1.1) όπου

D =η γωνία που αντιστοιχεί στο πλήρες κυκλικό τόξο

k =ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας του τόξου συναρμογής ανά στάση
(καμπυλότητα)

S =το μήκος του τόξου συναρμογής για στάσεις των 100feet

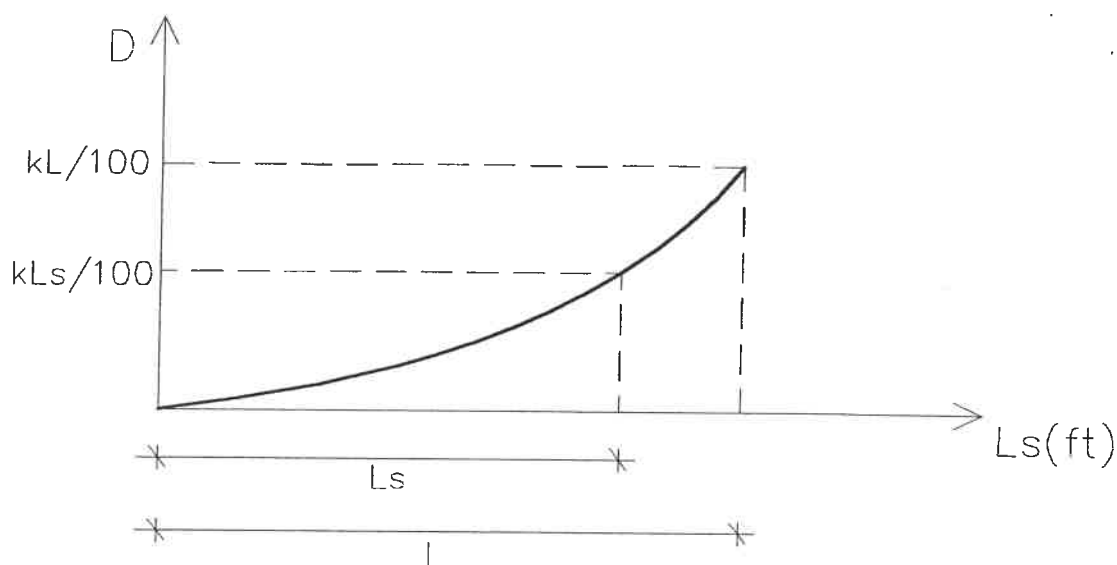
L_s =το μήκος του τόξου συναρμογής σε feet.

Για παράδειγμα, αν το κυκλικό τόξο έχει γωνία 4° και η γωνία του τόξου συναρμογής αυξάνει 1° κάθε 100 πόδια($k=1^\circ$), τότε η γωνία του τόξου συναρμογής ξεκινώντας από την αρχή της συναρμογής θα είναι $d_0=0^\circ$, $d_1=1^\circ$, $d_2=2^\circ$, $d_3=3^\circ$, $d_4=4^\circ=D$ και το τόξο συναρμογής θα είναι $400\text{πόδια}=L_s$.

Η εξίσωση (4.1.1) αποτελεί την εξίσωση για ένα τόξο κυβικής παραβολής.

$$D = kS = kL_s / 100$$

και πρόκειται για μία παραβολική εξίσωση, εφόσον το k (καμπυλότητα) που πολλαπλασιάζει το μήκος L_s αυξάνεται γραμμικά, σύμφωνα με το διάγραμμα του σχήματος 4.1.1. Η μεταβολή λοιπόν της γωνίας D που υπακούει στην εξίσωση 4.1.1 φαίνεται στο σχήμα 4.1.2 και είναι μια παραβολή.



Σχήμα 4.1.2

Διάγραμμα μεταβολής της γωνίας D° συναρτήσει του μήκους του τόξου συναρμογής L_s

D : η γωνία που αντιστοιχεί σε τόξο 100ft της καμπύλης

k : ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας του τόξου συναρμογής ανά στάση
(καμπυλότητα)

S : το μήκος του τόξου συναρμογής για στάσεις των 100feet

L_s : το μήκος του τόξου συναρμογής σε feet.

Για να γίνει πιο κατανοητή η σχέση (4.1.1), θα γίνει μία προσπάθεια αντιστοιχηθεί η σχέση 4.1.1 με την σχέση που εκφράζει την μεταβολή της καμπυλότητας στον Ν.Κ.Ε.Γ

Οι αμερικάνοι εκφράζουν τα τόξα με μοίρες γωνίας- και συγκεκριμένα της επίκεντρης γωνίας που αντιστοιχεί σε τόξο 100ft της καμπύλης- και όχι με μέτρα ακτίνας όπως οι ευρωπαίοι. Έτσι:

-η γωνία D° του πλήρους τόξου αντιστοιχεί στην ακτίνα του τόξου και μάλιστα μέσω της σχέσης $D = \frac{1746}{R(m)}$ (παράγραφος 2, κεφάλαιο Α-υπερυψώσεων)

-Ο ρυθμός k μεταβολής της γωνίας του τόξου συναρμογής ανά στάση των 100ft(=30.50m) αντιστοιχεί σε ένα ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του τόξου συναρμογής ή αλλιώς μεταβολής της καμπυλότητας Δk ανά στάση των 30.50m, ως εξής:

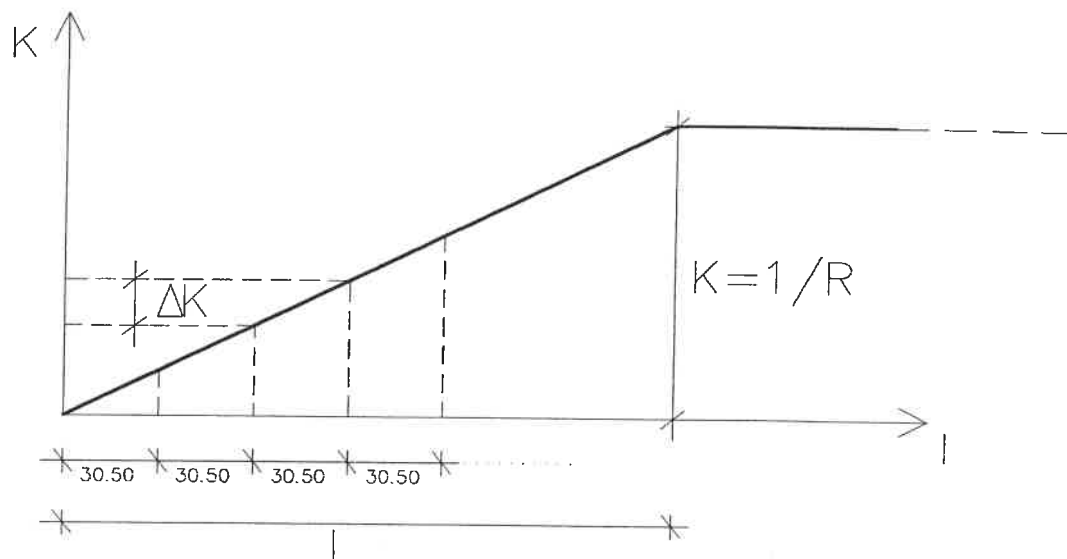
$$k(^{\circ}/ft) = 5730 \cdot \Delta K(m^{-1})$$

- το μήκος $L_s(ft)$ αντιστοιχεί στο μήκος $L(m)$ του τόξου συναρμογής και μάλιστα

$$L_s(ft) = \frac{L(m)}{3.28}$$

Επομένως, η σχέση $D = kS = kL_s/100$ γίνεται:

$$\frac{1746}{R(m)} = 5730 \Delta k(m^{-1}) \cdot \frac{L(m)}{30.50} \Leftrightarrow \frac{5730}{R} = 5730 \Delta k \cdot \frac{L}{30.50} \Leftrightarrow R = \frac{30.50}{L \cdot \Delta k}$$



Σχήμα 4.1.3

Διάγραμμα μεταβολής καμπυλότητας συναρτήσει του μήκους l του τόξου συναρμογής στον Ν.Κ.Ε.Γ.

k : καμπυλότητα κυκλικού τόξου

Δk : διαφορά καμπυλότητας ανάμεσα σε δύο σημεία του τόξου συναρμογής που απέχουν μεταξύ τους 30.50m

Αν το διάγραμμα καμπυλότητας που προτείνει ο Ν.Κ.Ε.Γ. χωριστεί σε ίσα τμήματα των 30.50m, (γίνεται λόγος πάντα για την κυβική παραβολή και άρα για γραμμική αύξηση της καμπυλότητας), προκύπτει το παραπάνω σχήμα 4.1.3, και είναι

$$\frac{K}{L} = \frac{\Delta k}{30.50} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{\Delta k}{30.50} \Leftrightarrow R = \frac{30.50}{\Delta k \cdot L}$$

(χωρίσαμε το διάγραμμα σε τμήματα των 30.50μέτρων=100ft ώστε να υπάρχει αντιστοιχία με το αμερικανικό εγχειρίδιο) όπου K και R η καμπυλότητα και η ακτίνα του κυκλικού τόξου, και Δk η μεταβολή της καμπυλότητας του τόξου συναρμογής σε μήκος 30.50m.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Και από τις δύο εξισώσεις προέκυψε το ίδιο αποτέλεσμα, πράγμα που σημαίνει ότι η εξίσωση 4.1.1 περιγράφει με τον ίδιο ταρόπο την μεταβολή των μεγεθών (γωνία-ακτίνα) με τις εξισώσεις που χρησιμοποιεί ο Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ.

Κατά τον υπολογισμό ενός τόξου συναρμογής, η γωνία D του κυκλικού τόξου που ακολουθεί είναι συνήθως γνωστή, ενώ άγνωστα είναι το μήκος του τόξου συναρμογής καθώς και ο ρυθμός k με τον οποίο αυξάνεται η τιμή της γωνίας του τόξου συναρμογής. Από την στιγμή, βέβαια, που το μήκος είναι γνωστό, μπορεί να υπολογισθεί και ο ρυθμός k.

Το μήκος συνήθως υπολογίζεται γνωρίζοντας την υπερύψωση που πρόκειται να εφαρμοστεί στο κυκλικό τόξο. Αν L_s είναι το μήκος του τόξου συναρμογής, τότε $L_s = ut \Leftrightarrow t = \frac{L_s}{u}$ θεωρώντας ότι u είναι η σταθερή κατά μέσο όρο ταχύτητα των οχημάτων σε miles/h και t είναι ο χρόνος σε sec. Επίσης, στον χρόνο t, η εξωτερική σιδηροτροχιά υπερυψώνεται κατά υπερύψωση e, έτσι ώστε $e = r_e t$ όπου r_e είναι ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η υπερύψωση ανά sec ($r_e = \frac{de}{dt}$). Ο χρόνος t είναι ο ίδιος και στις δύο περιπτώσεις, οπότε εξισώνοντας: $\frac{L_s}{u} = \frac{e}{u'} \Leftrightarrow L_s = e \frac{u}{r_e}$.

Προκύπτει δηλαδή ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του μήκους του τόξου συναρμογής, συναρτήσει της υπερύψωσης του κυκλικού τόξου, της ταχύτητας των οχημάτων κατά μέσο όρο (πάλι εδώ χρησιμοποιείται από τους αμερικάνους ο μέσος όρος ταχύτητας και όχι κάποια άλλη τιμή, όπως π.χ. η μέγιστη) και του ρυθμού μεταβολής της υπερύψωσης.

Ο ρυθμός αύξησης της υπερύψωσης καθορίζει στην άνεση για τους επιβάτες και την ομαλότητα στην λειτουργία του τόξου συναρμογής. Η ελάχιστη τιμή $1 \frac{1}{4}$ in/sec έχει ορισθεί για ταχύτητες μέχρι 60mph ενώ και η $1 \frac{1}{6}$ in/sec για ταχύτητες από 60 μέχρι 80mph. Κάποιες γραμμές που εξυπηρετούν ταχύτητες 80-100mph έχουν χρησιμοποιήσει και ρυθμούς μέχρι $1 \frac{1}{8}$ in/sec.

Ωστόσο, για να γίνει η σύγκριση με τις σχέσεις που δίνουν το μήκος του πρανούς στον Ν.Κ.Ε.Γ. πρέπει να μετατραπούν οι παραπάνω μονάδες μέτρησης ως εξής:

$$L_s(ft) \rightarrow L(m), e(inches) \rightarrow h(mm), u(miles/h) \rightarrow V(km/h), r_e(inch/sec) \rightarrow r_h(mm/sec)$$

Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{L(m)}{3.28} = \frac{12 \cdot 3.28}{1000} h(mm) \cdot \frac{1.609 V_{\max}(km/h)}{r_e(inch/sec)} \Leftrightarrow L(m) = 0.2077 \frac{h(mm) \cdot V_{\max}(km/h)}{r_e(inch/sec)}. \text{ Από τη σχέση}$$

αυτή και δεδομένου ότι η κλίση του πρανούς υπερύψωσης είναι $i = \frac{h}{L}$, προκύπτει:

$$\frac{h}{L} = \frac{r_e}{0.2077 V_{\max}} \Leftrightarrow i = \frac{r_e}{0.2077 V_{\max}}. \text{ Έτσι:}$$

Για ταχύτητες $\leq 60mph = 95km/h$ το αμερικανικό εγχειρίδιο θεσπίζει μέγιστο ρυθμό αύξησης της υπερύψωσης ίσο με $1 \frac{1}{4}$ inch/sec, ήτοι

$$r_{e_{\max}} = 1.25 inch/sec \rightarrow r_{h_{\max}} = 1.25 \cdot \frac{1000}{12 \cdot 3.28} = 31.758 mm/sec \text{ και άρα}$$

$$L_{\min} = 0.2077 \frac{h \cdot V_{\max}}{31.758} \Leftrightarrow L(m) = \frac{h \cdot V_{\max}}{152.90} \text{ και}$$

$$i_{\max} = \frac{31.785}{0.2077 V_{\max}} = \frac{152.90}{V_{\max}} (mm/m) \text{ ή } i_{\max} = \frac{152.90}{V_{\max}} \% \text{ ή } i_{\max} = \frac{0.1529}{V_{\max}}.$$

Για ταχύτητες $60mph - 80mph = 95km/h - 130km/h$ το αμερικανικό εγχειρίδιο θεσπίζει μέγιστο ρυθμό αύξησης της υπερύψωσης ίσο με

$1 \frac{1}{6}$ inch/sec, ήτοι

$$r_{e_{\max}} = 1.1667 inch/sec \rightarrow r_{h_{\max}} = 1.1667 \cdot \frac{1000}{12 \cdot 3.28} = 29.642 mm/sec \text{ και άρα}$$

$$L_{\min} = 0.2077 \frac{h \cdot V_{\max}}{29.642} \Leftrightarrow L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{142.72} \text{ και}$$

$$i_{\max} = \frac{29.642}{0.2077V_{\max}} = \frac{142.72}{V_{\max}} (mm/m) \text{ ή } i_{\max} = \frac{142.72}{V_{\max}} \% \text{ ή } i_{\max} = \frac{0.14272}{V_{\max}}.$$

Τέλος, για ταχύτητες $80mph - 100mph = 130km/h - 160km/h$ το αμερικανικό εγχειρίδιο θεσπίζει μέγιστο ρυθμό αύξησης της υπερύψωσης ίσο με $1 \frac{1}{8} inch/sec$, ήτοι

$$r_{e_{\max}} = 1.125 inch/sec \rightarrow r_{h_{\max}} = 1.125 \cdot \frac{1000}{12 \cdot 3.28} = 28.582 mm/sec \text{ και άρα}$$

$$L_{\min} = 0.2077 \frac{h \cdot V_{\max}}{28.582} \Leftrightarrow L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{137.61} \text{ και}$$

$$i_{\max} = \frac{28.582}{0.2077V_{\max}} = \frac{137.61}{V_{\max}} (mm/m) \text{ ή } i_{\max} = \frac{137.61}{V_{\max}} \% \text{ ή } i_{\max} = \frac{0.13761}{V_{\max}}.$$

Συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.1

ΜΕΓΙΣΤΕΣ ΚΛΙΣΕΙ Σ ΠΡΑΝΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΜΗΚΗ ΠΡΑΝΩΝ-ΤΟΞΩΝ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ ΓΙΑ 3 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ AMERICAN TRACK GEOMETRY

	$r_{e_{\max}}$ (inch/sec)	$r_{h_{\max}}$ (mm/sec)	$i_{\max}$ (mm/m) ή %	$L_{\min}$ (m)
$V < 60mph$ ή $V < 95km/h$	1.25	31.758	$i_{\max} = \frac{152.90}{V_{\max}} \%$ $i_{\max} = \frac{0.1529}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{152.90}$
$60mph < V < 80mph$ ή $95km/h < V < 130km/h$	1.1667	29.642	$i_{\max} = \frac{142.72}{V_{\max}} \%$ $i_{\max} = \frac{0.1427}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{142.72}$
$80mph < V < 100mph$ ή $130km/h < V < 160km/h$	1.125	28.582	$i_{\max} = \frac{137.61}{V_{\max}} \%$ $i_{\max} = \frac{0.1376}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{137.61}$

Το αμερικανικό εγχειρίδιο λοιπόν κατηγοριοποιεί τους περιορισμούς για το μήκος και τη κλίση του πρανούς με βάση την ίδια κατηγοριοποίηση των τιμών του ρυθμού αύξησης της υπερύψωσης ανάλογα με τις ταχύτητες. Όσο η ταχύτητα αυξάνεται, ο μέγιστος ρυθμός αύξησης της υπερύψωσης μικραίνει, το ελάχιστο μήκος του πρανούς αυξάνεται και η μέγιστη κλίση του πρανούς μειώνεται. Οι ελάχιστες τιμές για το μήκος του πρανούς δεν διαφέρουν πολύ από την τιμή $L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{144}$ του Ν.Κ.Ε.Γ.

Η πλευρική επιτάχυνση b πρέπει επίσης να μεταβάλλεται με έναν αποδεκτό ρυθμό. Ο ρυθμός αυτός μεταβολής της πλευρικής επιτάχυνσης πρόκειται για το τίναγμα που συναντήσαμε στον κανονισμό του ΟΣΕ: $C = \frac{db}{dt} (m/sec^3)$. Από σχετικές μελέτες, η μέγιστη τιμή της πλευρικής επιτάχυνσης b είναι $0.10g/sec = 1.00m/sec^3$, ενώ μια λογική τιμή για το τίναγμα C είναι $0.03g/sec = 0.3m/sec^3$

όσο ακριβώς ορίζει και ο Ν.Κ.Ε.Γ. Ο ελάχιστος χρόνος λοιπόν για την απόκτηση της πλήρους τιμής της πλευρικής επιτάχυνσης θα είναι $t_{\min} = \frac{b}{C} = \frac{0.10}{0.03} = 3.33sec$. Όμως

$t = \frac{L}{v_{\max}}$ όπου L το μήκος του πρανούς και v η ταχύτητα σε m/sec . Μετατρέποντας την

ταχύτητα σε km/h προκύπτει: $t = \frac{L}{\frac{V_{\max}}{3.6}} = \frac{3.6L}{V_{\max}}$, όπου V σε km/h . Έτσι

$$\frac{3.6L}{V_{\max}} = 3.33 \Leftrightarrow L_{\min} = 0.91667V_{\max} \text{ όπου } V \text{ σε } km/h.$$

Μετατρέποντας την ταχύτητα $V(km/h)$ σε $V'(miles/h)$ διαιρώντας με 1.609, προκύπτει $L_{\min} = 0.5697V'$, όπου V' σε $miles/h$.

Στην περίπτωση μετάβασης από κυκλικό τόξο με b_1 σε κυκλικό τόξο με b_2 οι υπολογισμοί γίνονται: $t_{\min} = \frac{\Delta b}{C} = \frac{b_2 - b_1}{0.3}$ και $\frac{L}{u_{\max}} = \frac{b_2 - b_1}{0.3} \Leftrightarrow L = \frac{b_2 - b_1}{0.3} u_{\max}$ όπου v σε m/sec .

Μετατρέποντας την ταχύτητα σε km/h , προκύπτει:

$$L = \frac{b_2 - b_1}{0.3} \cdot \frac{V_{\max}}{3.6} \Leftrightarrow L_{\min} = 3.33(b_2 - b_1)V_{\max}, V \text{ σε } km/h.$$

Διαιρώντας την παραπάνω εξίσωση με 1.609 μετατρέποντας την $V(\text{km/h})$ σε $V'(\text{miles/h})$:

$$L_{\min} = 2.07(b_2 - b_1)V', \quad V' \text{ σε miles/h.}$$

Τέλος, με βάση την ανεπάρκεια της υπερύψωσης $e_u(\text{inch})$, το ελάχιστο μήκος του πρανούς υπερύψωσης δίνεται από την σχέση $L_{\min} = 1.63e_u V_{\max}$ όπου η ταχύτητα V εκφράζεται σε miles/h. Δίνοντας την τιμή $e_u = 3\text{in}$ που είναι μια μέγιστη τιμή για την ανεπάρκεια της υπερύψωσης, προκύπτει πάλι $L_{\min} = 4.89V_{\max}$ όπου $V(\text{mph})$.

Αν στην παραπάνω σχέση $L_{\min} = 1.63e_u V_{\max}$ μετατραπεί η $e_u(\text{inches})$ σε $a(\text{mm})$ και οι μονάδες της ταχύτητας από miles/h σε km/h προκύπτει

$$L_{\min} = 1.63 \frac{a(\text{mm})}{1000} \cdot \frac{V_{\max}}{1.609} \Leftrightarrow L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{25.10}.$$

12 * 3.28

Η παραπάνω ελάχιστη τιμή είναι πολύ μεγαλύτερη από την $L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{216}$ που προτείνει ο κανονισμός του ΟΣΕ με βάση την ανεπάρκεια της υπερύψωσης.

Το μήκος λοιπόν του τόξου συναρμογής πρέπει να υπολογίζεται με βάση τον ρυθμό αύξησης της υπερύψωσης, τον ρυθμό μεταβολής της πλευρικής επιτάχυνσης και τον ρυθμό μεταβολής της ανεπάρκειας της υπερύψωσης, με επικρατέστερη την μεγαλύτερη τιμή. (βλέπε πίνακα 3.3.1.2).

4.2 Αντίρροπες καμπύλες

Οι αντίρροπες καμπύλες είναι κυκλικές διαδοχικές καμπύλες με αντίθετη κατεύθυνση. Θεωρητικά, το τέλος της πρώτης συμπίπτει με την αρχή της δεύτερης, ενώ η ακτίνα της μίας είναι η προέκταση της άλλης. Πρακτικά, θα πρέπει να υπάρχει κάποια ευθυγραμμία μεταξύ των δύο καμπύλων τουλάχιστον ίση με το μήκος του μακρύτερου συρμού που χρησιμοποιεί την γραμμή, έτσι ώστε το όχημα να ανακτά μία ουδέτερη οριζόντια θέση, υπερύψωση, πλευρική επιτάχυνση και ανεπάρκεια υπερύψωσης, πριν να εισέλθει στην επόμενη καμπύλη της αντίθετης κατεύθυνσης. 100-200feet

ευθυγραμμίας είναι αποδεκτά: παρόλα αυτά, ορισμένες φορές, τοπογραφικές συνθήκες δεν επιτρέπουν παρά την εύρεση χώρου για το απαραίτητο τόξο συναρμογής ανάμεσα στις αντίρροπες καμπύλες.

4.3 Ομόρροπες καμπύλες

Είναι οι διαδοχικές κυκλικές καμπύλες ίδιας κατεύθυνσης με όμως διαφορετικές γωνίες, κέντρα και ακτίνες. Και στην περίπτωση αυτή επιβάλλεται η χρησιμοποίηση τόξων συναρμογής για την σύνδεση των διαδοχικών καμπύλων.

Ορισμένες φορές δύο τέτοιες καμπύλες μπορεί να έχουν μόνο ένα ή δύο μήκη οχημάτων ευθυγραμμίας που να παρεμβάλεται ανάμεσά τους. Ο σχεδιασμός αυτός είναι ελλιπής: παρουσιάζει δυσκολίες στην ευθυγράμμιση, και απαιτεί μεταβολές της πλευρικής επιτάχυνσης του οχήματος που είναι πάντα ανώφελες. Αν 500feet ευθυγραμμίας δεν είναι δυνατόν να παρεμβληθεί ανάμεσα στις δύο καμπύλες, είναι προτιμότερο να συμπτυχθούν οι δύο καμπύλες σε μία της ίδιας κατεύθυνσης.

Γ. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ

1. Σύγκριση μεθόδων εφαρμογής υπερύψωσης που προτείνονται στα τρία εγχειρίδια που αναλύθηκαν

Τα τρία εγχειρίδια που συγκρίνονται παρακάτω είναι: ο Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ, το British Railway Track και το American Track Geometry.

1.1 Ως προς τις μεθόδους εφαρμογής της υπερύψωσης στη γραμμή

1.1.1 Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ

Όσον αφορά την υπερύψωση που εφαρμόζεται σε μια σιδηροδρομική γραμμή, ο Ν.Κ.Ε.Γ. προτείνει την εφαρμογή της κανονικής υπερύψωσης, που δίνεται από τον τύπο $h_k = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R}$. Στην θέση της ταχύτητας χρησιμοποιείται η μέγιστη προβλεπόμενη ταχύτητα της γραμμής. Ο παραπάνω τύπος προέκυψε με παραδοχή μικτής κυκλοφορίας, χωρίς να υπερισχύει καμία από την επιβατική (ταχεία) ή την εμπορική (αργή) κίνηση.

Η μέθοδος αυτή εξασφαλίζει ότι, με μια καλή πρόβλεψη της μέγιστης και της ελάχιστης ταχύτητας στη γραμμή, δεν θα ξεπεραστούν τα όρια της μέγιστης ανεπάρκειας της υπερύψωσης και του μέγιστου πλεονάσματος, δηλαδή οι ανώτατες τιμές της παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης προς τα εσωτερικά και προς τα εξωτερικά της καμπύλης, με αποτέλεσμα να διασφαλίζεται σε όλα τα είδη οχημάτων η άνεση των επιβατών. Παρ' όλα αυτά, είναι δυνατόν να δημιουργούνται μεγάλες τιμές παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης-μέχρι τα ανώτατα όριά της- εφόσον δεν λαμβάνεται υπόψη η ποσοστιαία κατανομή των ταχυτήτων στη γραμμή και δεν ευνοείται καμία κατηγορία οχημάτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την υπερβολική φθορά της σιδηροτροχιάς που καταπονείται περισσότερο, σε σχέση με την άλλη. Για παράδειγμα, αν στο δίκτυο επικρατούν οι ταχείς-επιβατικοί συρμοί, ενώ η γραμμή έχει σχεδιαστεί για ισόποση επιβατική-εμπορική κυκλοφορία, η εξωτερική σιδηροτροχιά θα

φθαρεί πολύ γρηγορότερα σε σχέση με την εσωτερική, εφόσον θα καταπονείται περισσότερο.

1.1.2 Αμερικάνικοι κανονισμοί

Οι αμερικάνικοι κανονισμοί προτείνουν ως λύση την εφαρμογή της θεωρητικής υπερύψωσης που αντιστοιχεί στην ταχύτητα του επικρατέστερου αριθμού των οχημάτων. Χρησιμοποιείται λοιπόν ο τύπος $e = 0.0007DV^2$, όπου V είναι η παραπάνω ταχύτητα.

Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνεται υπόψη η ποσοστιαία κατανομή των ταχυτήτων. Με την λύση αυτή μετριάζεται η φθορά της σιδηροτροχιάς που καταπονείται περισσότερο. Για παράδειγμα, αν στο δίκτυο επικρατούν οι ταχείς-επιβατικοί συρμοί και ο σχεδιασμός της γραμμής γίνει με βάση την ταχύτητά τους-κάτι που σημαίνει ότι η υπερύψωση που θα κατασκευαστεί θα είναι μεγάλη-η εξωτερική σιδηροτροχιά θα ανακουφίζεται από τις υπερβολικές φθορές. Όσο για την εσωτερική σιδηροτροχιά, αυτή θα δέχεται ούτως ή άλλως λιγότερες καταπονήσεις από τους σχετικά πιο λίγους εμπορικούς που θα χρησιμοποιούν την γραμμή.

Απ' την άλλη, αν ο επικρατέστερος αριθμός ανήκει στους αργούς-εμπορικούς συρμούς, με μια ευνοϊκή μεταχείριση αυτών των οχημάτων η εσωτερική σιδηροτροχιά θα φθείρεται λιγότερο, όμως ορισμένοι ταχείς συρμοί θα αναγκαστούν σε επιβράδυνση, ώστε να αποφευχθούν υπερβολικές ενοχλήσεις στην άνεση των επιβατών, λόγω της μεγάλης πλευρικής επιτάχυνσης που θα προκληθεί- κάτι που δεν συμβαίνει με την εφαρμογή της κανονικής υπερύψωσης.

Παρακάτω εξετάζεται η αποτελεσματικότητα της παραπάνω μεθόδου σε σχέση με την μέθοδο της κανονικής υπερύψωσης, με ένα παράδειγμα:

Είναι γνωστό ότι η κανονική υπερύψωση δίνεται από τον τύπο $h_K = \frac{h_{R_{\min}}}{h_{R_{\min}} + \max \alpha} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}}$

όπου $h_{R_{\min}}$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$ -όπως είδαμε από την γραφική προσέγγιση της κανονικής

υπερύψωσης- ή δίνεται από τον γενικευμένο τύπο $h_k = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R}$ παραδεχόμενοι ότι

$$h_{R_{\min}} = 160mm.$$

Έστω μια γραμμή με μικτή κυκλοφορία 80,100,120 και 160km/h ήτοι 50,62,75 και 100miles/h αφού 1mile=1,609km.

Η εφαρμοζόμενη υπερύψωση στην γραμμή σύμφωνα με την μέθοδο της κανονικής υπερύψωσης θα είναι

$$h_k = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R} = 7.12 \frac{160^2}{R} = \frac{302080}{R} \text{ σε mm. Για να μετατραπεί η τιμή αυτή σε ίντσες}$$

εφόσον στους αμερικάνικους κανονισμούς η υπερύψωση μετριέται σε ίντσες, θα πολλαπλασιαστεί επί $3,28 \cdot 12 \cdot 0,001 = 0,03936$ δηλαδή:

$$h_k = \frac{302080}{R} \cdot 0.03936 \text{ inches} = \frac{11889.87}{R} \text{ inches}.$$

Όμως η σχέση ακτίνας R και επίκεντρης γωνίας D ενός κυκλικού τόξου είναι όπως αποδείχθηκε προηγουμένως $R = \frac{5730}{D}$ οπότε $h_k = \frac{11889.87}{5730/D} = 2.075D$.

Εκφράστηκε με τον τρόπο αυτό λοιπόν η κανονική υπερύψωση συναρτήσει της επίκεντρης γωνίας του τόξου D (μοίρες) σε ίντσες. Ακολουθούν οι παρακάτω τέσσερις περιπτώσεις:

α. περίπτωση 1^η: ο επικρατέστερος αριθμός των οχημάτων έχει ταχύτητα 50miles/h.

Θα εφαρμοστεί επομένως η θεωρητική υπερύψωση των 50miles/h:

$e_e = 0.007DV^2 = 0.0007 \cdot 50^2 \cdot D = 1.75D \text{ inches}$ που είναι μικρότερη από την κανονική υπερύψωση και η μέγιστη ταχύτητα με

την οποία θα μπορούσε να εγγραφεί ένα τραίνο στο τόξο με εξασφαλισμένη την άνεση των επιβατών του θα ήταν $V_{\max} = \left(\frac{1.75D + 3}{0.0007D} \right)^{1/2} \Leftrightarrow V_{\max}^2 = \frac{1.75D + 3}{0.0007D}$ δεδομένης μέγιστης ανεπάρκειας υπερύψωσης ίσης με $3 \text{ inch} = 3 \cdot 2.54 \cdot 10 \text{ mm} = 76.2 \text{ mm}$.

Αν $V_{\max}=100\text{km/h}=62\text{miles/h}$:

$$62^2 = \frac{1.75D + 3}{0.0007D} \Leftrightarrow 2.6908D = 1.75D + 3 \Leftrightarrow 0.9408D = 3 \Leftrightarrow D = 3.189^\circ \text{ δηλαδή}$$

$$R_{\min} = \frac{5730}{3.189^\circ} = 1796.9 \text{ ft} \text{ ή } \frac{1796.9}{3.28} = 547.84 \text{ m}$$

Δηλαδή απαιτείται τόξο ακτίνας τουλάχιστον 547.84m.

Αν $V_{\max}=120\text{km/h}=75\text{miles/h}$:

$$75^2 = \frac{1.75D + 3}{0.0007D} \Leftrightarrow 3.9375D = 1.75D + 3 \Leftrightarrow 2.1875D = 3 \Leftrightarrow D = 1.37^\circ \text{ δηλαδή}$$

$$R_{\min} = \frac{5730}{1.37^\circ} = 4178.125 \text{ ft} \text{ ή } \frac{4178.125}{3.28} = 1273.8 \text{ m}$$

Δηλαδή απαιτείται τόξο ακτίνας τουλάχιστον 1273.8m.

Αν $V_{\max}=160\text{km/h}=100\text{miles/h}$:

$$100^2 = \frac{1.75D + 3}{0.0007D} \Leftrightarrow 7D = 1.75D + 3 \Leftrightarrow 5.25D = 3 \Leftrightarrow D = 0.57^\circ \text{ δηλαδή}$$

$$R_{\min} = \frac{5730}{0.57^\circ} = 10027.5 \text{ ft} \text{ ή } \frac{10027.5}{3.28} = 3057.165 \text{ m}$$

Δηλαδή απαιτείται τόξο ακτίνας τουλάχιστον 3057.165m.

Ενώ στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις η απαίτηση για την ελάχιστη ακτίνα είναι εύκολα εφαρμόσιμη, μια και στον σιδηρόδρομο συναντάμε συχνά αυτά τα μεγέθη των ακτινών και μεγαλύτερα, εδώ προκύπτει πρόβλημα. Πράγματι, ακτίνα 3057.165m για ταχύτητα $160\text{km/h}=100\text{miles/h}$ είναι πολύ μεγάλη, δύσκολα εφαρμόσιμη και ασύμφορη. Ίσως στην περίπτωση αυτή το όχημα θα αναγκαστεί σε επιβράδυνση για να διασφαλίσει την διατήρηση του ορίου της ανεπάρκειας της υπερύψωσης και επακόλουθα την άνεση των επιβατών του.

β. περίπτωση 2η: ο επικρατέστερος αριθμός των οχημάτων έχει ταχύτητα 62miles/h.

Θα εφαρμοστεί επομένως η θεωρητική υπερύψωση των 62miles/h:

$e_e = 0.007DV^2 = 0.0007 * 62^2 * D = 2.6908Dinches$ που είναι λίγο μεγαλύτερη από την κανονική υπερύψωση και η μέγιστη ταχύτητα με

την οποία θα μπορούσε να εγγραφεί ένα τραίνο στο τόξο χωρίς ενοχλήσεις στην άνεση των επιβατών του θα ήταν $V_{\max} = \left(\frac{2.6908D + 3}{0.0007D} \right)^{1/2} \Leftrightarrow V_{\max}^2 = \frac{2.6908D + 3}{0.0007D}$ δεδομένης μέγιστης ανεπάρκειας υπερύψωσης ίσης με $3inch = 3 * 2.54 * 10mm = 76.2mm$.

Αν $V_{\max} = 120km/h = 75miles/h$:

$$75^2 = \frac{2.6908D + 3}{0.0007D} \Leftrightarrow 3.9375D = 2.6908D + 3 \Leftrightarrow 1.2467D = 3 \Leftrightarrow D = 2.406^\circ \text{ δηλαδή}$$

$$R_{\min} = \frac{5730}{2.406^\circ} = 2380.197ft \text{ ή } \frac{2380.197}{3.28} = 725.975m$$

Δηλαδή απαιτείται τόξο ακτίνας τουλάχιστον 725.975m.

Αν $V_{\max} = 160km/h = 100miles/h$:

$$100^2 = \frac{2.6908D + 3}{0.0007D} \Leftrightarrow 7D = 2.6908D + 3 \Leftrightarrow 4.3092D = 3 \Leftrightarrow D = 0.696^\circ \text{ δηλαδή}$$

$$R_{\min} = \frac{5730}{0.696^\circ} = 8230.572ft \text{ ή } \frac{8230.572}{3.28} = 2509.32m$$

Δηλαδή απαιτείται τόξο ακτίνας τουλάχιστον 2509.32m.

Και στην περίπτωση αυτή, ακτίνα 2509.32 είναι πολύ μεγάλη, δύσκολα εφαρμόσιμη και ασύμφορη για ταχύτητα $160km/h = 100miles/h$. Έτσι, το όχημα ίσως αναγκαστεί σε επιβράδυνση, όπως και προηγουμένως, ώστε να διασφαλιστεί η άνεση των επιβατών.
γ. περίπτωση 3η: ο επικρατέστερος αριθμός των οχημάτων έχει ταχύτητα $75miles/h$.

Θα εφαρμοστεί επομένως η θεωρητική υπερύψωση των $75miles/h$:

$e_e = 0.007DV^2 = 0.0007 * 75^2 * D = 3.9375Dinches$ που είναι αρκετά μεγαλύτερη από την κανονική υπερύψωση και η μέγιστη ταχύτητα με

την οποία θα μπορούσε να εγγραφεί ένα τραίνο με ασφάλεια στο τόξο θα ήταν

$$V_{\max} = \left(\frac{3.9375D + 3}{0.0007D} \right)^{1/2} \Leftrightarrow V_{\max}^2 = \frac{3.9375D + 3}{0.0007D} \text{ δεδομένης μέγιστης ανεπάρκειας υπερύψωσης}$$

ίσης με $3\text{inch} = 3 * 2.54 * 10\text{mm} = 76.2\text{mm}$.

Αν $V_{\max} = 160\text{km/h} = 100\text{miles/h}$:

$$100^2 = \frac{3.9375D + 3}{0.0007D} \Leftrightarrow 7D = 3.9375D + 3 \Leftrightarrow 3.0625D = 3 \Leftrightarrow D = 0.9796^\circ \text{ δηλαδή}$$

$$R_{\min} = \frac{5730}{0.9796^\circ} = 5849.375 \text{ ft} \text{ ή } \frac{5849.375}{3.28} = 1783.346\text{m}$$

Δηλαδή απαιτείται τόξο ακτίνας τουλάχιστον 1783.346m.

δ. περίπτωση 4^η: ο επικρατέστερος αριθμός των οχημάτων έχει ταχύτητα 100miles/h.

Θα εφαρμοστεί επομένως η θεωρητική υπερύψωση των 100miles/h:

$e_e = 0.007DV^2 = 0.0007 * 100^2 * D = 7D\text{inches}$ που είναι πολύ μεγαλύτερη από την κανονική υπερύψωση και που, φυσικά, σ' αυτήν την περίπτωση κανένα όχημα δεν θα υποχρεούνταν να επιβραδύνει για να διανύσει χωρίς ενοχλήσεις για τους επιβάτες οποιοδήποτε τόξο στην γραμμή.

1.1.3 Βρετανικοί κανονισμοί

Για την εφαρμοζόμενη υπερύψωση, στους βρετανικούς κανονισμούς προτείνεται η εφαρμογή της θεωρητικής υπερύψωσης $h_\theta = 11,8 \frac{V^2}{R}$ που αντιστοιχεί στον μέσο όρο των ταχυτήτων της γραμμής. Δεδομένου ότι ο μέσος όρος γενικά πλησιάζει προς τις επικρατέστερες τιμές, η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με την αμερικάνικη. Παρουσιάζει έτσι τα ίδια πλεονεκτήματα αλλά και τα ίδια μειονεκτήματα με την αμερικάνικη μέθοδο ως προς τις συνθήκες λειτουργίας και την συμπεριφορά των οχημάτων.

Παρακάτω εξετάζεται η μέθοδος αυτή και συγκρίνεται με την μέθοδο της κανονικής υπερύψωσης του Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ, με ένα παράδειγμα:

Σημείωση: Είναι γνωστό ότι η κανονική υπερύψωση δίνεται από τον τύπο $h_K = \frac{h_{R_{\min}}}{h_{R_{\min}} + \max \alpha} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}}$ όπου $h_{R_{\min}}$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$ -όπως παρουσιάστηκε στην γραφική προσέγγιση της κανονικής υπερύψωσης της παραγράφου 1.8.4- ή δίνεται από τον γενικευμένο τύπο $h_K = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R}$ παραδεχόμενοι ότι $h_{R_{\min}} = 160mm$.

Έστω μια γραμμή με μικτή κυκλοφορία 80,100,120 και 160km/h δηλαδή με ένα φάσμα ταχυτήτων $V_{\min}=80km/h$ έως $V_{\max}=160km/h$. Σύμφωνα με την μέθοδο της κανονικής υπερύψωσης η εφαρμοζόμενη υπερύψωση θα ήταν: -από την γραφική προσέγγιση της κανονικής υπερύψωσης του διαγράμματος 1.8.2 ότι το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $h_{80} + \max \pi, h_{160} - \max \alpha$ είναι το (0.9048 , 168.33) το οποίο ευλόγως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον γενικό τύπο $h_K = \frac{h_{R_{\min}}}{h_{R_{\min}} + \max \alpha} \cdot h_{\theta}^{V_{\max}}$ εφόσον υπερβαίνει το όριο της μέγιστης κατασκευαστικής $\max h_{κατ}=160mm$. Επομένως θα χρησιμοποιηθεί η μέγιστη τιμή των 160mm ή αλλιώς τον γενικευμένο τύπο $h_K = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R}$ με

$V_{\max}=160km/h$:

$$h_K = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R} = 7.12 \frac{160^2}{R} = \frac{182272}{R} \text{ ή σε συνάρτηση με την καμπυλότητα } K :$$

$$h_K = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{1000/K} = \frac{7.12}{1000} * V_{\max}^2 K = \frac{7.12}{1000} 160^2 K = 182.272K$$

Η εφαρμοζόμενη αυτή υπερύψωση, σε συνάρτηση με την ακτίνα καμπυλότητας R ή την καμπυλότητα K, είναι εντελώς ανεξάρτητη από την ποσοστιαία συμβολή των ταχυτήτων στην κυκλοφορία. Επίσης, όλα τα οχήματα ταχύτητας μικρότερης από την ταχύτητα ισορροπίας της εφαρμοζόμενης υπερύψωσης (που είναι

$\frac{182272}{R} = 11.8 \frac{V_{10}^2}{R} \Leftrightarrow V_{10} = 124.285 \text{ km/h}$ θα ήταν υποχρεωμένα να εκμεταλλευτούν το πλεόνασμα μέχρι του ορίου των 100mm, ενώ αντίθετα τα οχήματα με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα ισορροπίας θα εκμεταλλεύονταν της ανεπάρκειας της υπερύψωσης μέχρι την μέγιστη τιμή των 110mm, χωρίς να «ευνοείται» καμία από τις δύο κατηγορίες των οχημάτων. Άλλωστε, ο τύπος της κανονικής υπερύψωσης προέκυψε με την παραδοχή ότι λόγος των οχημάτων που υπερβαίνουν την ταχύτητα ισορροπίας προς εκείνα που έχουν ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα ισορροπίας είναι περίπου ίσος-κάτι που είναι εμφανές από τα διαγράμματα (h-K) όλων των συνδυασμών ταχυτήτων: η ευθεία hK σχεδόν ισαπέχει από τις ευθείες $h_{\theta}^{V_{\max}} - \max \alpha, h_{\theta}^{V_{\min}} + \max \pi$.

Στη συνέχεια αναλύεται η περίπτωση της μεθόδου του μέσου όρου των ταχυτήτων, πάνω στο παραπάνω παράδειγμα. Εφόσον δεν είναι γνωστά τα ακριβή ποσοστά με τα οποία οι διάφορες ταχύτητες παίρνουν μέρος στην κυκλοφορία, και τα οποία φυσικά είναι κάθε φορά και διαφορετικά, αναγκαστικά εξετάζονται τρία γενικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα.

- περίπτωση 1^η: το ποσοστό των οχημάτων με χαμηλές ταχύτητες είναι αυξημένο, και η κυκλοφορία κατανέμεται ως εξής:

40% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 80km/h

30% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 100km/h

20% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 120km/h

10% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 160km/h

Μέσος όρος ταχυτήτων: $\frac{40 \cdot 80 + 30 \cdot 100 + 20 \cdot 120 + 10 \cdot 160}{100} = 102 \text{ km/h}$

Η υπερύψωση που θα εφαρμοστεί είναι λοιπόν $h_{\theta}^{102} = 11.8 \frac{102^2}{R} = \frac{122767.2}{R}$ ή

$$h_{\theta}^{102} = \frac{11.8}{1000} * 102^2 K = 122.7672 K$$

Σαν μία πρώτη παρατήρηση, η εφαρμοζόμενη σ' αυτήν την περίπτωση υπερύψωση είναι μικρότερη σε σχέση με την κανονική υπερύψωση που υπολογίστηκε προηγουμένως, κάτι που ευνοεί τα βραδέα οχήματα, που άλλωστε είναι και τα

περισσότερα στην γραμμή. Επομένως υπάρχει το πλεονέκτημα ότι λιγότερο τα βραδέα οχήματα θα «αναγκαστούν» να εκμεταλλευτούν το πλεόνασμα, ενώ τα ταχέα θα εκμεταλλευτούν, με τη σειρά τους, μεγαλύτερες τιμές ανεπάρκειας, εφόσον η υπερύψωση έχει μικρύνει. Συμπέρασμα, εξυπηρετείται καλύτερα ο επικρατέστερος αριθμός των οχημάτων.

Προκύπτει όμως το ερώτημα αν οχήματα με την V_{min} και πολύ περισσότερο με την V_{max} μπορούν να εγγραφούν στην καμπύλη ακτίνας R χωρίς αρνητικές συνέπειες στην άνεση των επιβατών. Για το λόγο αυτό γίνεται μια επαλήθευση:

$$V_{min} = 80 \text{ km/h}$$

$$h_{\theta}^{80} = 11,8 \frac{80^2}{R} = \frac{75520}{R}$$

$$h - h_{\theta}^{80} = \pi \Leftrightarrow \frac{122767,2}{R} - \frac{75520}{R} = \pi \Leftrightarrow \pi = \frac{47247,2}{R}$$

$$\max \pi = 100 \text{ mm} \Leftrightarrow \min R = \frac{47247,2}{100} \Leftrightarrow \min R = 472,472 \text{ m}$$

δηλαδή ένα όχημα με ταχύτητα 80km/h μπορεί να εγγραφεί ασφαλώς για την άνεση των επιβατών σε ακτίνες μεγαλύτερες των 472,472m.

$$V_{min} = 160 \text{ km/h}$$

$$h_{\theta}^{160} = 11,8 \frac{160^2}{R} = \frac{302080}{R}$$

$$h_{\theta}^{160} - h = \alpha \Leftrightarrow \frac{302080}{R} - \frac{122767,2}{R} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{179312,8}{R}$$

$$\max \alpha = 110 \text{ mm} \Leftrightarrow \min R = \frac{179312,8}{110} \Leftrightarrow \min R = 1630,12 \text{ m}$$

δηλαδή ένα όχημα με ταχύτητα 160km/h μπορεί να εγγραφεί ασφαλώς για την άνεση των επιβατών σε ακτίνες μεγαλύτερες των 1630,12m. Η απαίτηση αυτή είναι εφαρμόσιμη οριακά. Εφόσον για μεγάλες ταχύτητες όπως τα 160km/h κατασκευάζονται τέτοιες ακτίνες. Σε περίπτωση όμως που η κατασκευή μιας τέτοιας ακτίνας είναι αδύνατη, το όχημα θα αναγκαστεί να επιβραδύνει για να διασφαλιστεί το όριο στην πλευρική επιτάχυνση και άρα η άνεση των επιβατών.

- περίπτωση 2η: το ποσοστό των οχημάτων με χαμηλές ταχύτητες είναι σχεδόν ίσο με αυτό των ταχέων οχημάτων, και η κυκλοφορία κατανέμεται ως εξής:

20% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 80km/h

35% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 100km/h

30% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 120km/h

15% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 160km/h

Μέσος όρος ταχυτήτων: $\frac{20 \cdot 80 + 35 \cdot 100 + 30 \cdot 120 + 15 \cdot 160}{100} = 111 \text{ km/h}$

Η υπερύψωση που θα εφαρμοστεί είναι λοιπόν $h_{\theta}^{102} = 11,8 \frac{111^2}{R} = \frac{145387,8}{R}$ ή $h_{\theta}^{102} = \frac{11,8}{1000} \cdot 111^2 \text{ K} = 145,3878 \text{ K}$

Σε αυτό το παράδειγμα παρατηρείται ότι η υπερύψωση που θα εφαρμοστεί με βάση τον μέσο όρο των ταχυτήτων δεν διαφέρει πολύ από την κανονική υπερύψωση. Αν, ακόμα, το ποσοστό των ταχέων οχημάτων είναι ίσο με αυτό των βραδέων, δηλαδή:

20% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 80km/h

30% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 100km/h

30% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 120km/h

20% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 160km/h

Μέσος όρος ταχυτήτων: $\frac{20 \cdot 80 + 30 \cdot 100 + 30 \cdot 120 + 20 \cdot 160}{100} = 114 \text{ km/h}$

$h_{\theta}^{102} = 11,8 \frac{114^2}{R} = \frac{153352,8}{R}$ ή $h_{\theta}^{102} = \frac{11,8}{1000} \cdot 114^2 \text{ K} = 153,3528 \text{ K}$

η προκύπτουσα υπερύψωση πλησιάζει ακόμα περισσότερο την κανονική. Λαμβάνοντας, λοιπόν, και πάλι υπόψη την ποσοστιαία κατανομή των ταχυτήτων, τόσο τα βραδέα όσο και τα ταχέα οχήματα έχουν την ίδια «μεταχείριση» στη γραμμή.

- περίπτωση 3η: το ποσοστό των οχημάτων με υψηλές ταχύτητες είναι αυξημένο, και η κυκλοφορία κατανέμεται ως εξής:

10% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 80km/h

20% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 100km/h

30% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 120km/h

40% των οχημάτων έχουν ταχύτητα 160km/h

$$\text{Μέσος όρος ταχυτήτων: } \frac{10 \cdot 80 + 20 \cdot 100 + 30 \cdot 120 + 40 \cdot 160}{100} = 128 \text{ km/h}$$

$$\text{Η υπερύψωση που θα εφαρμοστεί είναι λοιπόν } h_{\theta}^{102} = 11,8 \frac{128^2}{R} = \frac{193331.2}{R} \quad \text{ή}$$

$$h_{\theta}^{102} = \frac{11.8}{1000} * 128^2 K = 193.3312 K.$$

Η εφαρμοζόμενη σ' αυτήν την περίπτωση υπερύψωση είναι αρκετά μεγάλη, μεγαλύτερη από την κανονική υπερύψωση που υπολογίστηκε προηγουμένως, κάτι που ευνοεί τα ταχεία οχήματα, που άλλωστε είναι και τα περισσότερα στην γραμμή. Επομένως υπάρχει το πλεονέκτημα ότι λιγότερο τα ταχεία οχήματα θα «αναγκαστούν» να εκμεταλλευτούν την ανεπάρκεια, ενώ τα βραδέα θα εκμεταλλευτούν, με τη σειρά τους, μεγαλύτερες τιμές πλεονάσματος, εφόσον η υπερύψωση έχει μεγαλώσει. Συμπέρασμα, εξυπηρετείται καλύτερα ο επικρατέστερος αριθμός των οχημάτων.

Προκύπτει όμως το ερώτημα αν οχήματα με την $V_{\max}$ και πολύ περισσότερο με την $V_{\min}$ μπορούν να εγγραφούν με ασφάλεια για την άνεση των επιβατών στην καμπύλη ακτίνας R . Για το ερώτημα αυτό γίνεται παρακάτω μία επαλήθευση:

$$V_{\min} = 80 \text{ km/h}$$

$$h_{\theta}^{80} = 11,8 \frac{80^2}{R} = \frac{75520}{R}$$

$$h - h_{\theta}^{80} = \pi \Leftrightarrow \frac{193331.2}{R} - \frac{75520}{R} = \pi \Leftrightarrow \pi = \frac{117811.2}{R}$$

$$\max \pi = 100 \text{ mm} \Leftrightarrow \min R = \frac{117811.2}{100} \Leftrightarrow \min R = 1178,112 \text{ m}$$

δηλαδή ένα όχημα με ταχύτητα 80km/h μπορεί να εγγραφεί ασφαλώς σε ακτίνες μεγαλύτερες των 1178,112m.

$$V_{\min} = 160 \text{ km/h}$$

$$h_{\theta}^{160} = 11,8 \frac{160^2}{R} = \frac{302080}{R}$$

$$h_{\theta}^{160} - h = \alpha \Leftrightarrow \frac{302080}{R} - \frac{193331.2}{R} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{108748.8}{R}$$

$$\max \alpha = 110 \text{ mm} \Leftrightarrow \min R = \frac{108748.8}{110} \Leftrightarrow \min R = 988,6256 \text{ m}$$

δηλαδή ένα όχημα με ταχύτητα 160km/h μπορεί να εγγραφεί ασφαλώς για την άνεση των επιβατών σε ακτίνες μεγαλύτερες των 988.625m.

1.2 Ως προς τις μέγιστες τιμές της κατασκευαστικής υπερύψωσης, της ανεπάρκειας της υπερύψωσης και του πλεονάσματος της υπερύψωσης

Ως μέγιστη κατασκευαστική υπερύψωση στον Ν.Κ.Ε.Γ. προβλέπονται τα 160mm, ενώ στους βρετανικούς κανονισμούς τα 150mm. Στο αμερικάνικο εγχειρίδιο δεν αναφέρεται τιμή για την μέγιστη κατασκευαστική υπερύψωση.

Όσον αφορά την ανεπάρκεια υπερύψωσης, στον Ν.Κ.Ε.Γ. προβλέπεται ως μέγιστη τιμή της τα 105mm, ενώ στους βρετανικούς κανονισμούς τα 110mm (90mm για συνεχώς συγκολλημένες σιδηροτροχιές). Το αμερικάνικο εγχειρίδιο προτείνει τις 3inch=3*2.54*10mm=76.20mm ή 4inch=4*2.54*10mm=101.60mm σε ειδικές περιπτώσεις. Και τα τρία εγχειρίδια επιτρέπουν εκμετάλλευση της ανεπάρκειας της υπερύψωσης μέχρι εξάντλησης των μέγιστων τιμών της, με σκοπό να αντικατασταθεί το αντίστοιχο ποσό κατασκευαστικής υπερύψωσης.

1.3 Ως προς τον τρόπο έκφρασης της υπερύψωσης

Τόσο στον Ν.Κ.Ε.Γ. όσο και στους βρετανικούς κανονισμούς η υπερύψωση εκφράζεται σε mm συναρτήσει της ταχύτητας V(km/h) και της ακτίνας R(m). Ο τύπος που χρησιμοποιείται για την θεωρητική υπερύψωση είναι κατά τα γνωστά $h_{\theta} = 11,8 \frac{V^2}{R}$.

Αντίθετα, στους αμερικάνικους κανονισμούς η υπερύψωση εκφράζεται σε inches, συναρτήσει της ταχύτητας $u(\text{miles/h})$ και των μοιρών της γωνίας D° που αντιστοιχεί στο κυκλικό τόξο. Ο τύπος που δίνει την θεωρητική υπερύψωση για τους Αμερικανούς είναι $e = 0.0007DV^2$.

Όπως διαπιστώνεται, διαφέρουν οι μονάδες μέτρησης τόσο της υπερύψωσης όσο και των υπόλοιπων μεγεθών για τις δύο περιπτώσεις. Για να πραγματοποιηθεί η σύγκριση μεταξύ των δύο παραπάνω σχέσεων για την θεωρητική υπερύψωση, θα πρέπει να οι μονάδες μέτρησης του αμερικάνικου εγχειριδίου να μετατραπούν από inches σε mm, από miles/h σε km/h και τις μοίρες D με τον τύπο $D = \frac{1746}{R(m)}$ [5] σε μέτρα ακτίνας. Έτσι,

ο τύπος $e = 0.0007DV^2$ γίνεται:

$$e(\text{inch}) = \frac{1746}{R(m)} \cdot \frac{V^2(\text{km/h})}{1.609^2} = 0.4721 \frac{V^2(\text{km/h})}{R(m)} \quad \text{και μετατρέποντας τις inches σε mm}$$

$$\text{προκύπτει τελικά } e(\text{mm}) = 0.4721 \cdot \frac{1000}{3.28 \cdot 12} \cdot \frac{V^2(\text{km/h})}{R(m)} \Leftrightarrow e(\text{mm}) = 11.99 \frac{V^2(\text{km/h})}{R(m)}.$$

Οι δύο τύποι δίνουν παρεμφερή αποτελέσματα.

Στην επόμενη σελίδα φαίνονται πινακοποιημένα τα αποτελέσματα της σύγκρισης που έγινε στην παράγραφο 1 και αφορούσε τις μεθόδους εφαρμοζόμενης υπερύψωσης στα σιδηροδρομικά δίκτυα.

N.K.E.Γ. του ΟΣΕ	British Railway Track	American Track Geometry
υπερύψωση σε mm	υπερύψωση σε mm	υπερύψωση σε inches
έκφραση υπερύψωσης συναρτήσει ταχύτητας $V(\text{m/sec})$ και ακτίνας καμπυλότητας $R(\text{m})$	έκφραση υπερύψωσης συναρτήσει ταχύτητας $V(\text{m/sec})$ και ακτίνας καμπυλότητας $R(\text{m})$	έκφραση υπερύψωσης συναρτήσει ταχύτητας $V(\text{miles/h})$ και γωνίας καμπύλης D°
εφαρμογή κανονικής υπερύψωσης $h_k = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R}$	εφαρμογή θεωρητικής υπερύψωσης του μέσου όρου των ταχυτήτων της γραμμής	εφαρμογή θεωρητικής υπερύψωσης της ταχύτητας του επικρατέστερου αριθμού των οχημάτων
δεν λαμβάνεται υπόψη η ποσοστιαία κατανομή των ταχυτήτων	λαμβάνεται υπόψη η ποσοστιαία κατανομή των ταχυτήτων	λαμβάνεται υπόψη η ποσοστιαία κατανομή των ταχυτήτων
μπορεί να υπάρξει υπερβολική φθορά κάποιας σιδ/χιάς σε σχέση με την άλλη	μετριάζεται η φθορά της σιδ/χιάς που καταπονείται περισσότερο	μετριάζεται η φθορά της σιδ/χιάς που καταπονείται περισσότερο
δεν ευνοείται καμία κατηγορία οχημάτων	ευνοείται ο επικρατέστερος αριθμός των οχημάτων	ευνοείται ο επικρατέστερος αριθμός των οχημάτων
κανένα όχημα δεν αναγκάζεται σε επιβράδυνση	αναγκάζονται σε επιβράδυνση ταχεία οχήματα, εφόσον η ταχύτητά τους δεν ανήκει στον επικρατέστερο αριθμό των οχημάτων, ώστε να μην παρουσιαστούν ενοχλήσεις στην άνεση των επιβατών	αναγκάζονται σε επιβράδυνση ταχεία οχήματα, εφόσον η ταχύτητά τους δεν ανήκει στον επικρατέστερο αριθμό των οχημάτων, ώστε να μην παρουσιαστούν ενοχλήσεις στην άνεση των επιβατών
δεν υπάρχει περίπτωση υπέρβασης του ορίου της ανεπάρκειας. Άνεση επιβατών	υπάρχει περίπτωση υπέρβασης του ορίου της ανεπάρκειας. Ενοχλήσεις στην άνεση των επιβατών	υπάρχει περίπτωση υπέρβασης του ορίου της ανεπάρκειας. Ενοχλήσεις στην άνεση των επιβατών

2. Σύγκριση των πρανών και των τόξων συναρμογής ως προς την χρησιμότητά τους

2.1 Σύγκριση του p-πρανούς με το ευθύγραμμο πρανές

2.1.1 Ως προς την διαφορά των υπερυψώσεων

Αρχικά τα p-πρανή δεν γίνονταν αποδεκτά, διότι θεωρείτο ότι οι διαφορές στις υπερυψώσεις μεταξύ του ευθύγραμμου πρανού και του p-πρανούς ήταν τόσο μικρές ώστε δεν είχαν καμία επίδραση η μία πάνω στην άλλη και ότι η κατασκευή και συντήρηση τόξων με παραβολική αύξηση της καμπυλότητας ήταν πολύ δύσκολη.

Οι μεγαλύτερες διαφορές υπερύψωσης δεδομένου ίδιου μήκους πρανού ($l_p = l$) είναι [9]

$\Delta u = \pm \frac{u}{8} \dots \dots \dots (2.1.1.1)$ που για την μέγιστη υπερύψωση $u_{\max} = 150 \text{ mm}$ σημαίνει

$$\Delta u = \pm 18.75 \text{ mm}.$$

Αναλυτικότερα:

Η σύγκριση μπορεί να περιοριστεί στα πρώτα μισά των δύο πρανών, αφού είναι και τα δύο αντισυμμετρικά ως προς το μέσον τους. Έτσι, ό,τι ισχύει για την σύγκριση στο πρώτο μισό των πρανών, θα ισχύει και στο δεύτερο.

Ο τύπος που δίνει την μεταβολή της υπερύψωσης στο ευθύγραμμο πρανές είναι ο

$$u_x = \frac{u}{l} \cdot x = \frac{u}{l_p} \cdot x, \text{ ενώ ο αντίστοιχος τύπος που αφορά το p-πρανές είναι ο } u_p = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x^2$$

από την αρχή μέχρι το μέσον του. Έτσι, η διαφορά των υπερυψώσεων θα είναι

$$\Delta u = u_p - u_x \Leftrightarrow \Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x^2 - \frac{u}{l_p} \cdot x \dots \dots \dots (2.1.1.2)$$

Για να προσδιοριστεί το σημείο στο οποίο η συνάρτηση Δu παρουσιάζει ακρότατο-ενδιαφέρει μόνο η απόλυτη τιμή άρα αρκεί το ακρότατο και δεν εξετάζεται το μέγιστο ή ελάχιστο- θα μηδενιστεί την πρώτη παράγωγο (Δu)'.

$$\text{Έτσι: } (\Delta u)' = 0 \Leftrightarrow \frac{2u}{l_p^2} \cdot 2x - \frac{u}{l_p} = 0 \Leftrightarrow \frac{4ux}{l_p^2} = \frac{u}{l_p} \Leftrightarrow x = \frac{l_p}{4} \dots \dots \dots (2.1.1.3)$$

Για την τιμή αυτή προκύπτει η μέγιστη απόλυτη τιμή:

$$\Delta u = \left| \frac{2u}{l_p^2} \cdot \frac{l_p^2}{4^2} - \frac{u}{l_p} \cdot \frac{l_p}{4} \right| \Leftrightarrow \Delta u = \pm \left(\frac{u}{8} - \frac{u}{4} \right) \Leftrightarrow \Delta u = \pm \frac{u}{8} \text{ δηλαδή προέκυψε η εξίσωση (2.1.1.1).}$$

Φυσικά, η τιμή αυτή είναι αρνητική, όπως προκύπτει από την παραπάνω επίλυση, δηλαδή $\Delta u = -\frac{u}{8}$.

$$\text{Για } x = \frac{l_p}{2} = \frac{l}{2} \rightarrow \Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot \frac{l_p^2}{4} - \frac{u}{l_p} \cdot \frac{l_p}{2} \Leftrightarrow \Delta u = 0.$$

$$\text{Ενώ για } x = \frac{l_p}{3} = \frac{l}{3} \rightarrow \Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot \frac{l_p^2}{9} - \frac{u}{l_p} \cdot \frac{l_p}{3} \Leftrightarrow \Delta u = \frac{2u}{9} - \frac{u}{3} = -\frac{u}{9}$$

Όταν λοιπόν $x < \frac{l_p}{2}$ η διαφορά υπερύψωσης Δu είναι αρνητική και μάλιστα όσο μεγαλύτερη η υπερύψωση u του κυκλικού τόξου, τόσο μεγαλύτερη και η διαφορά Δu .

Μέγιστη απόλυτη τιμή εμφανίζεται και στο σημείο $x = \frac{3l_p}{4}$ (2.1.1.4)

(συμμετρικό ως προς το μέσον με το $x = \frac{l_p}{4}$) όπου για επαλήθευση

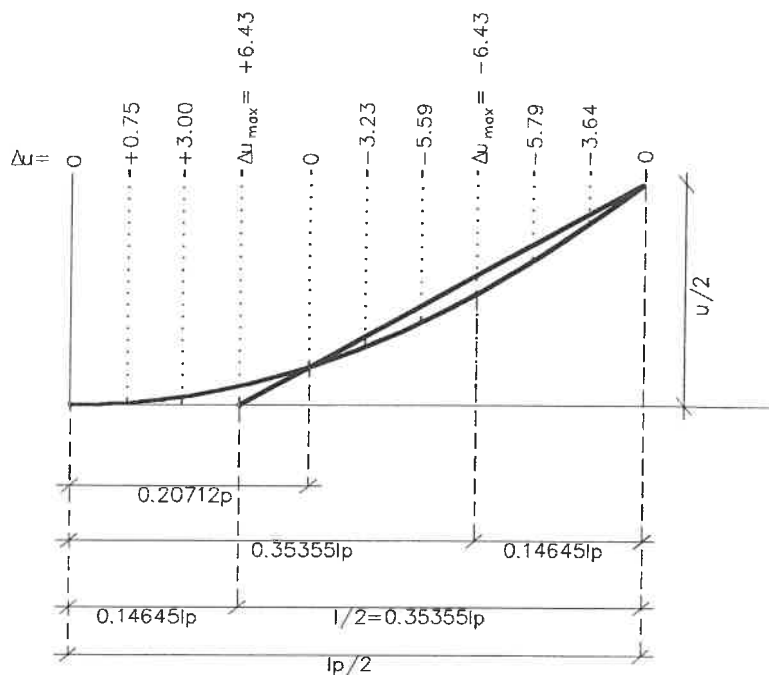
$$\Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot \frac{9l_p^2}{16} - \frac{u}{l_p} \cdot \frac{3l_p}{4} \Leftrightarrow \Delta u = \frac{18u}{16} - \frac{3u}{4} = +\frac{u}{8}.$$

$$\text{Για } x = \frac{2l_p}{3} = \frac{2l}{3} \rightarrow \Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot \frac{4l_p^2}{9} - \frac{u}{l_p} \cdot \frac{2l_p}{3} \Leftrightarrow \Delta u = \frac{8u}{9} - \frac{2u}{3} = +\frac{2u}{9}.$$

Όταν λοιπόν $x > \frac{l_p}{2}$ η διαφορά υπερύψωσης Δu είναι θετική, και μεγαλώνει με την αύξηση της τελικής υπερύψωσης u .

Μικρότερες διαφορές υπερύψωσης προκύπτουν όταν συγκριθεί το p -πρανές με ένα ευθύγραμμο πρανές το οποίο πλησιάζει αρκετά το p -πρανές και αυτό είναι το ευθύγραμμο πρανές μήκους [9] $l = \frac{l_p}{\sqrt{2}} = 0.70711 \cdot l_p$ (2.1.1.5) όπου η μεγαλύτερη

διαφορά υπερύψωσης είναι $\Delta u = \pm \frac{u}{23.33}$ (2.1.1.6)



Σχήμα 2.1.1.1

Διάγραμμα υπερύψωσης των πρώτων μισών ευθύγραμμου πρανού και ισοδύναμου p-πρανού όπου φαίνεται η διαφορά των υπερυψώσεων

Πηγή: [9] Bild 3,σελ 100

Στο σχήμα 2.1.1.1 παρουσιάζονται τα δύο παραπάνω πρανή και μάλιστα μόνο το πρώτο μισό των πρανών (από RA μέχρι RM), επειδή οι υπερυψώσεις στο δεύτερο μισό είναι αντισυμμετρικές σε σχέση με το πρώτο μισό ως προς το μέσο των πρανών.

Αναλυτικά:

Αυτά έχουν μήκη:

-ευθύγραμμο πρανές: $\frac{l}{2} = \frac{0.70711l_p}{2} = 0.35355l_p$

-p-πρανές: $\frac{l_p}{2}$

Το ευθύγραμμο πρανές ξεκινάει μετά το p-πρανές κατά

$$\frac{l_p}{2} - \frac{l}{2} = 0.5l_p - 0.35355l_p = 0.14645l_p.$$

Στο σημείο τομής τους η τετμημένη είναι $x_p = x + 0.14645l_p$ (εφόσον οι τετμημένες x του ευθύγραμμου πρανούς ξεκινάνε κατά $0.14645l_p$ μετά το p-πρανές) και οι υπερυψώσεις των δύο πρανών στο σημείο αυτό είναι:

$$\text{-ευθύγραμμο πρανές: } u = \frac{u}{0.7071 l_p} \cdot (x_p - 0.14645 l_p)$$

$$\text{-p-πρανές: } u_p = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2$$

$$\begin{aligned} \text{Εξισώνοντας: } \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2 &= \frac{u}{0.7071 l_p} \cdot (x_p - 0.14645 l_p) \Leftrightarrow \frac{x_p}{0.7071 l_p} - 0.207 = \frac{2}{l_p^2} \cdot x_p^2 \Leftrightarrow \\ x_p^2 &= \frac{l_p^2 \cdot x_p}{2 \cdot 0.7071 l_p} - \frac{0.207 l_p^2}{2} \Leftrightarrow x_p^2 - \frac{l_p}{1.41422} \cdot x_p + 0.1035 l_p^2 = 0 \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού και θα λυθεί με την μέθοδο της διακρίνουσας:

$$\Delta = \frac{l_p^2}{2} - 4 \cdot 0.1035 l_p^2 = 0.086 l_p^2 \text{ και οι δυο λύσεις είναι:}$$

$$(x_p)_{1,2} = \frac{\frac{l_p}{1.41422} \pm 0.293 l_p}{2} \Leftrightarrow (x_p)_1 = 0.5 l_p \text{ και } (x_p)_2 = 0.20712 l_p$$

δηλαδή τα πρώτα μισά των δύο πρανών τέμνονται στα σημεία $(x_p)_1 = 0.5 l_p$ και $(x_p)_2 = 0.2071 l_p$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 8.1.1.2. Στα σημεία αυτά η υπερύψωση είναι $(u_p)_1 = \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.5^2 l_p^2 = 0.5u$ και $(u_p)_2 = \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.20712^2 l_p^2 = 0.0857u$ αντιστοίχα.

Όπως και προηγουμένως η μέγιστη απόλυτη τιμή (ακρότατο) της συνάρτησης διαφοράς Δu θα βρεθεί μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο $(\Delta u)'$. Η περίπτωση αυτή είναι μια ιδιόζουσα περίπτωση, γιατί τα δύο πρανή δεν έχουν κοινή αρχή. Έτσι, θα πρέπει να προσδιοριστεί η συνάρτηση Δu . Αν υποθεθεί ότι το σημείο (0,0) είναι η αρχή του p-πρανού, τότε η αρχή του ευθύγραμμου πρανού είναι το σημείο $x_p = x + 0.14645 l_p$ όπως είδαμε (αφού αυτό ξεκινάει κατά $0.14645 l_p$ μετά το p-πρανές) και οι εξισώσεις των δύο πρανών γίνονται:

$$\text{-ευθύγραμμο πρανές: } u = \frac{u}{0.7071 l_p} \cdot (x_p - 0.14645 l_p)$$

$$\text{-p-πρανές: } u_p = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2$$

και η διαφορά της υπερύψωσης:

$$\Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2 - \frac{u}{0.7071 l_p} \cdot (x_p - 0.14645 l_p) \dots\dots\dots (2.1.1.7)$$

Μηδενίζοντας την $(\Delta u)'$ προκύπτει:

$$(\Delta u)' = 0 \Leftrightarrow \frac{2u}{l_p^2} \cdot 2x_p - \frac{u}{0.7071l_p} \cdot (x_p - 0.14645l_p) = 0 \Leftrightarrow \frac{4u}{l_p^2} \cdot x_p = \frac{u}{0.7071l_p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_p = \frac{l_p}{4 \cdot 0.7071} \Leftrightarrow x_p = 0.35355l_p \dots \dots \dots (2.1.1.8)$$

Δηλαδή σε απόσταση $x_p = 0.35355l_p$ από την αρχή του p-πρανούς (ή σε απόσταση $\frac{l_p}{2} - 0.35355l_p = 0.14645l_p$ από το κοινό τέλος των πρώτων μισών των δύο πρανών)

εμφανίζεται η μέγιστη απόλυτη τιμή της διαφοράς της υπερύψωσης και είναι

$$\Delta u = \left| \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.35355^2 l_p^2 - \frac{u}{0.7071l_p} (0.35355l_p - 0.14645l_p) \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta u = \pm (0.2499u - 0.29288u) \Leftrightarrow \Delta u = \pm \frac{u}{23.33}$$

Αποδείχθηκε λοιπόν η εξίσωση (2.1.1.6).

Οι μεγαλύτερες διαφορές υπερύψωσης για $u_{\max}=150\text{mm}$ είναι κατά την εξίσωση

$$(2.1.1.6): \Delta u = \pm \frac{150}{23.33} = 6.43\text{mm}.$$

Έτσι: η μέγιστη τιμή της Δu , που είναι $\Delta u = \pm \frac{u}{23.33}$ και για $u_{\max}=150\text{mm}$ είναι 6.43mm ,

εμφανίζεται για $x=0.35355l_p$.

Όμως στο διάστημα από $x_p = 0$ μέχρι $x_p = 0.14645l_p$ το ευθύγραμμο πρανές δεν έχει αρχίσει ακόμα και η υπερύψωσή του είναι 0, επομένως η διαφορά υπερύψωσης Δu

$$\text{είναι } \Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2 - 0.$$

Η μεγαλύτερή της τιμή εμφανίζεται όπως φαίνεται και από το σχήμα στο σημείο

$$x_p = 0.14645l_p, \text{ όπου είναι } \Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.14645^2 \cdot l_p^2 - 0 = 0.04289u. \text{ Για } u_{\max}=150\text{mm}$$

$\Delta u = 0.04289 \cdot 150\text{mm} = 6.43\text{mm}$. Προκύπτουν λοιπόν δύο μέγιστα στο πρώτο μισό των πρανών, στα σημεία $x_p = 0.14645l_p$ και $x_p = 0.35355l_p$.

Επίσης, για

$$x_p = 0.15l_p \rightarrow \Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.15^2 \cdot l_p^2 - \frac{u}{0.7071l_p} \cdot (0.15l_p - 0.14645l_p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta u = 0.045u - 0.0050u = +0.0399u$$

$$\text{και για } x_p = 0.25l_p \rightarrow \Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.25^2 \cdot l_p^2 - \frac{u}{0.7071l_p} \cdot (0.25l_p - 0.14645l_p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta u = 0.125u - 0.146u = -0.021u.$$

Δηλαδή για $x < 0.20712l_p$ η διαφορά των υπερυψώσεων είναι θετική, ενώ για $x > 0.20712l_p$ είναι αρνητική.

Αντίστοιχα για το δεύτερο μισό των πρανών:

Η μελέτη έγινε στο πρώτο μισό των δύο πρανών. Συμμετρικά το ευθύγραμμο πρανές θα τελειώνει κατά $0.14645l_p$ πριν το τέλος του p-πρανούς, ή σε απόσταση $l + 0.14645l_p = 0.7071l_p + 0.14645l_p = 0.85356l_p$ από την αρχή (0,0)- που είναι η αρχή του p-πρανούς.

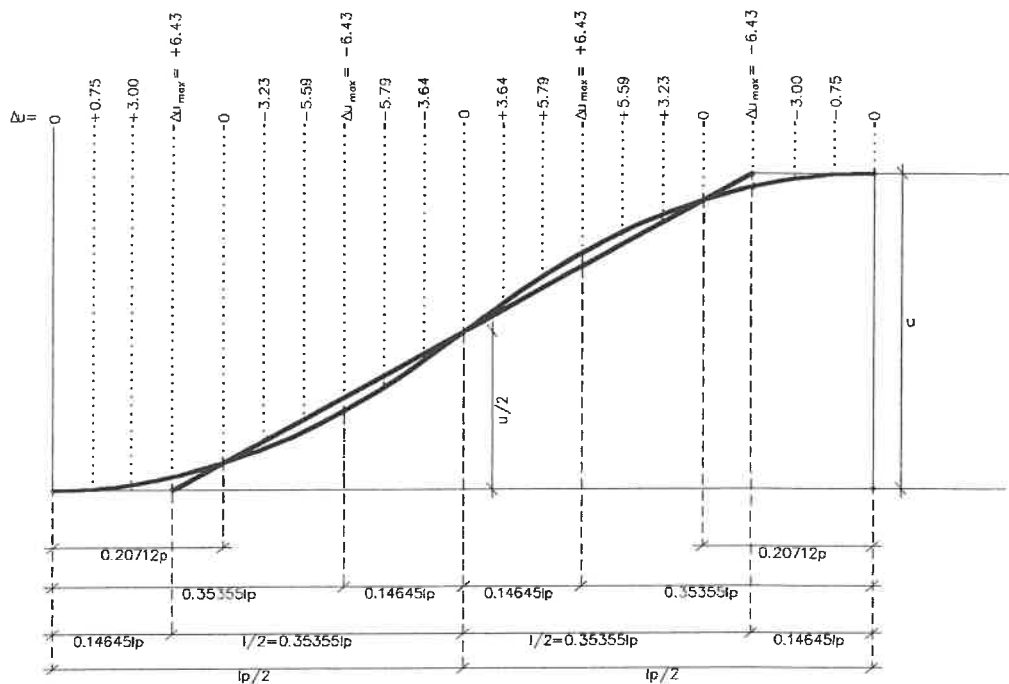
Επίσης τα δύο πρανή θα τέμνονται στο σημείο που απέχει $0.20712l_p$ από το τέλος του p-πρανούς ή $l_p - 0.20712l_p = 0.79288l_p$ από την αρχή (0,0)- που είναι η αρχή του p-πρανούς.

Μια μέγιστη τιμή-αυτή τη φορά θετική- θα εμφανίζεται στο σημείο που απέχει $0.35355l_p$ από το τέλος του p-πρανούς ή $l_p - 0.35355l_p = 0.64645l_p$ από την αρχή (0,0)- που είναι η αρχή του p-πρανούς.

Τέλος, μια μέγιστη-αρνητική- τιμή εμφανίζεται στο σημείο που τελειώνει το ευθύγραμμο πρανές $l + 0.14645l_p = 0.7071l_p + 0.14645l_p = 0.85356l_p$, όπου και έχει αποκτήσει την τελική υπερύψωση u . Στο σημείο αυτό η διαφορά της υπερύψωσης είναι

$$\Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2 - u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.85356^2 \cdot l_p^2 - u = 0.04571u \quad \text{και} \quad \text{για} \quad u_{\max} = 150\text{mm}$$

$$\Delta u = 0.04571 \cdot 150\text{mm} = +6.43\text{mm}.$$



Σχήμα 2.1.1.2

Διάγραμμα υπερύψωσης ευθύγραμμου πρανού και ισοδύναμου p -πρανού όπου φαίνεται η διαφορά των υπερυψώσεων

Πηγή: [9] Bild 3,σελ 100

Συνολικά προκύπτουν λοιπόν δύο μέγιστες και δύο ελάχιστες τιμές Δu και για $0 < l < 0.20712l_p$ και $\frac{l_p}{2} < l < 0.64645l_p$ οι διαφορές των υπερυψώσεων είναι θετικές, ενώ

για $0.20712l_p < l < \frac{l_p}{2}$ και $0.64645l_p < l < l_p$ είναι αρνητικές.

Στο σχήμα 2.1.1.3 έχει προστεθεί και το δεύτερο μισό των πρανών.

Οι αντίστοιχες διαφορές στην βάση μεταξύ των αντίστοιχων με τα πρανή τόξα συναρμογής είναι $\pm 17mm$. Αυτές οι διαφορές μεταξύ των πρανών και των αντίστοιχων τόξων συναρμογής δεν είναι μεγάλες, αλλά δραστικές σε υψηλές ταχύτητες. Το 1935 κατασκευάστηκαν σε γερμανικές γραμμές πάνω από 300 τόξα συναρμογής με p -πρανή. Έπειτα διεξήχθησαν πολλές δοκιμαστικές μετρήσεις με υψηλές ταχύτητες και μετρήσεις

επιτάχυνσης. Όλα αυτά απέδειξαν ότι οι προσδοκίες ήταν εύλογες. Από τότε χρησιμοποιούνται τα p-πρανή κατά κόρον σε υψηλές ταχύτητες και έχουν κυριαρχήσει στους γερμανικούς σιδηρόδρομους για ταχύτητες άνω των 160km/h.

Συμπέρασμα: Από την σύγκριση των δύο πρανών ως προς τη διαφορά υπερύψωσης προκύπτει το συμπέρασμα ότι αυτές είναι σημαντικές και ότι στο ευθύγραμμο πρανές η υπερύψωση αυξάνεται απότομα και σε μικρό μήκος, ενώ στο p-πρανές η ίδια τελική υπερύψωση αποκτιέται πιο ομαλά και σε μεγαλύτερο μήκος. Στρογγυλεύεται κατά κάποιον τρόπο στο p-πρανές η μεταβολή της υπερύψωσης στην αρχή και στο τέλος του πρανούς.

2.1.2 Ως προς τις κλίσεις των πρανών υπερύψωσης

Η κλίση του ευθύγραμμου πρανούς είναι σταθερή και έχει τιμή $\frac{1}{m} = \frac{u}{l}$.

Αντίθετα η κλίση στο p-πρανές αυξάνεται γραμμικά και αποκτά την μέγιστη τιμή της

στο μέσον του πρανούς: $\frac{1}{m_p} = \frac{2u}{l_p}$

Για ίσα μήκη $l = l_p$ είναι $\frac{\frac{1}{m_p}}{\frac{1}{m}} = \frac{\frac{2u}{l_p}}{\frac{u}{l_p}} \Leftrightarrow \frac{m_p}{m} = 2$, δηλαδή η κλίση του p-πρανούς στο μέσον

του είναι διπλάσια από αυτήν του ευθύγραμμου πρανούς. Αυτό δεν σημαίνει ότι η υπερύψωση στο p-πρανές αυξάνεται πιο απότομα, λόγω ακριβώς της μορφής του πρανούς, που επιτυγχάνει μια στρογγύλευση στα άκρα. Αντίθετα, στο ευθύγραμμο πρανές η κλίση από μηδενική στην ευθυγραμμία αποκτά απότομα την τιμή $\frac{1}{m} = \frac{u}{l}$.

Κατά την σύγκριση των κλίσεων του p-πρανούς με το ευθύγραμμο πρανές που το προσεγγίζει, δηλαδή το πρανές με μήκος $l = \frac{l_p}{\sqrt{2}} = 0.70711 \cdot l_p$ και κλίση $\frac{1}{m} = \frac{u}{0.70711 l_p}$,

προκύπτει $\frac{\frac{1}{m_p}}{\frac{1}{m}} = \frac{\frac{2u}{l_p}}{\frac{u}{0.70711 l_p}} \Leftrightarrow \frac{m_p}{m} = 1.41422$ δηλαδή η διαφορά μειώνεται στο 14,14%,

προσφέροντας καλύτερη άνεση στον επιβάτη.

2.1.3 Ως προς τις εκτροπές f

Κατά την εφαρμογή των αντίστοιχων με τα πρανή τόξα συναρμογής, οι εκτροπές που απαιτούνται για το κυκλικό τόξο είναι $f = \frac{l^2}{24R} = 0.04167 \frac{l^2}{R}$ για το ευθύγραμμο πρανές

και $f_p = \frac{l_p^2}{48R} = 0.02083 \frac{l_p^2}{R}$ για το p-πρανές.

$$\frac{f}{f_p} = \frac{\frac{l^2}{24R}}{\frac{l_p^2}{48R}} = \frac{48}{24} = 2 \text{ δηλαδή για } l = l_p \text{ απαιτείται διπλάσια εκτροπή κατά την εφαρμογή}$$

τόξου συναρμογής με ευθύγραμμη αύξηση της καμπυλότητας παρά κατά την εφαρμογή τόξου συναρμογής με παραβολική αύξηση της καμπυλότητας. Αυτό σημαίνει ότι σε βελτιώσεις υψηλών ταχυτήτων η εφαρμογή τόξου με ευθύγραμμη αύξηση της καμπυλότητας θα ήταν πιθανόν ασύμφορη οικονομικά, λόγω της μεγάλης εκτροπής που πρέπει να λάβει το κυκλικό τόξο. Ως λύση μπορεί να προταθεί η χρησιμοποίηση τόξου συναρμογής με παραβολική αύξηση της καμπυλότητας, παρά το μεγαλύτερο μήκος του, ως οικονομικότερη λύση.

Κατά την σύγκριση του p-πρανούς με το ευθύγραμμο πρανές που το προσεγγίζει, δηλαδή το ευθύγραμμο πρανές μήκους $l = \frac{l_p}{\sqrt{2}} = 0.70711 \cdot l_p$ και εκτροπής $f = \frac{0.70711^2 \cdot l_p^2}{24R}$,

$$\text{προκύπτει } \frac{f}{f_p} = \frac{\frac{0.70711^2 \cdot l_p^2}{24R}}{\frac{l_p^2}{48R}} = 0.70711^2 \frac{48}{24} = 1.000009 \text{ δηλαδή οι εκτροπές τους διαφέρουν}$$

ελάχιστα μεταξύ τους (κατά 0,0009%).

2.1.4 Ως προς τις οριακές τιμές κλίσεων και μήκους συναρμογής

Το κατασκευαστικό όριο για τις κλίσεις των δύο πρανών είναι ίδιο και ίσο με $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$. Από αυτό προκύπτουν αντίστοιχα:

-ευθύγραμμο πρανές: $l_{\min} = 400 \cdot u$

-p-πρανές: $(l_p)_{\min} = 800 \cdot u$

Τα «δυναμικά» όρια για τις κλίσεις των δύο πρανών είναι γενικά (εκτός ειδικών περιπτώσεων) $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{8 \cdot V}$ για το ευθύγραμμο πρανές και $\left(\frac{1}{m_p}\right)_{\max} = \frac{1}{4 \cdot V}$ για το p-

πρανές. Από αυτό προκύπτουν αντίστοιχα:

-ευθύγραμμο πρανές: $l_{\min} = 8 \cdot V \cdot u$

-p-πρανές: $l_{\min} = 8V \cdot u$

Έτσι

-ευθύγραμμο πρανές: $l_{\min} = \max\{400u, 8 \cdot V \cdot u\}$

Όταν η ταχύτητα $V < 50 \text{ km/h}$ το γινόμενο $8V$ θα είναι μικρότερο από 400 και άρα θα επικρατεί το όριο $l_{\min} = 400 \cdot u$ ως μεγαλύτερο. Αντίθετα, όταν $V > 50 \text{ km/h}$ το γινόμενο $8V$ θα είναι μεγαλύτερο από 400, οπότε και το όριο $l_{\min} = 8V \cdot u$ θα είναι επικρατέστερο ως μεγαλύτερο.

-p-πρανές: $l_{\min} = \max\{800u, 8 \cdot V \cdot u\}$

Ο περιορισμός $l_{\min} = 800 \cdot u$ είναι καθοριστικός μόνο για ταχύτητες $V < 100 \text{ km/h}$.

Πράγματι, για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h το γινόμενο $8V$ θα είναι μεγαλύτερο από 800, άρα ούτως ή άλλως θα επικρατεί ο περιορισμός $l_{\min} = 8V \cdot u$. Δεδομένου όμως ότι γενικά το p-πρανές χρησιμοποιείται για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h , ο περιορισμός $l_{\min} = 800 \cdot u$ δεν έχει καμία πρακτική σημασία.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η σύγκριση του p-πρανούς με το ευθύγραμμο πρανές είναι σε γενικές γραμμές αντιπροσωπευτική και για τα υπόλοιπα δύο πρανή (sinus πρανές και Bloss πρανές). Αυτό συμβαίνει γιατί γενικά τα πρανή με μη-γραμμική αύξηση της καμπυλότητας παρουσιάζουν παρόμοια χαρακτηριστικά ως προς την δυναμική οδήγησης και το κύριο δίλημμα που τίθεται είναι: χρησιμοποίηση- ανάλογα με τις ταχύτητες στο δίκτυο-ευθύγραμμου ή καμπύλου πρανού; Αρκεί λοιπόν η σύγκριση του ευθύγραμμου με το πιο αντιπροσωπευτικό από τα καμπύλα πρανή, το p-πρανές.

Στην συνέχεια πρέπει να επιλεγεί ποιο από τα καμπύλα πρανή θα χρησιμοποιηθούν, συγκρίνοντάς τα μεταξύ τους. Ως προς την δυναμική οδήγησης δεν υπάρχει κανένα ουσιαστικό κέρδος από το s και το b πρανές συγκρινόμενα με το p-πρανές, επειδή το τελευταίο παρουσιάστηκε ιδανικό σε σχέση με την περιστροφική ταχύτητα στα σημεία «τσάκισης». Γι' αυτό και αυτές οι δύο μορφές πρανών μπορούν να αξιολογηθούν μόνο πρακτικά, παραδείγματος χάριν λόγω των απλούστερων υπολογισμών και της ευκολότερης εφαρμογής και τοποθέτησης που πιθανόν προσφέρουν, όπως και λόγο των μικρότερων εκτροπών ή των μικρότερων μηκών τόξων συναρμογής που πιθανόν απαιτούν. Αναλυτικότερα στις επόμενες παραγράφους.

2.2 Σύγκριση του πρανούς sinus με το p-πρανές

2.2.1 Ως προς τη διαφορά των υπερυψώσεων

Μια γραφική σύγκριση μεταξύ p-πρανούς και s-πρανούς όπως αυτή του σχήματος 2.1.1.1 και του σχήματος 2.1.1.2 δεν είναι αποτελεσματική, γιατί οι γραμμές των δύο πρανών σχεδόν αλληλοκαλύπτονται και οι διαφορές της υπερύψωσης δεν είναι ευδιάκριτες. Έτσι οι διαφορές της υπερύψωσης θα παρουσιαστούν σε πίνακα.

Μια καλή προσέγγιση του p-πρανούς από το s-πρανές προκύπτει για μήκος του sinus πρανού ίσο με $I_s = 0.92I_p$. Η σύγκριση αρκεί μέχρι το μέσον των πρανών εφόσον και τα δύο είναι αντισυμμετρικά ως προς το μέσον του. Ο υπολογισμός έγινε για την μέγιστη υπερύψωση $u_{\max} = 150\text{mm}$.

Η εξίσωση που δίνει την μεταβολή της υπερύψωσης στο εσωτερικό του p-πρανούς είναι $u_p = \frac{2u}{I_p^2} \cdot x^2$, ενώ η αντίστοιχη για το s-πρανές είναι $u_s = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{I_s} \cdot x\right) \right] \cdot \frac{u}{2}$.

Θεωρήθηκε όμως ότι $I_s = 0.92I_p$ οπότε $u_s = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{0.92I_p} \cdot x\right) \right] \cdot \frac{u}{2}$. Η διαφορά λοιπόν της

υπερύψωσης σε κάθε σημείο είναι $\Delta u = u_p - u_s = \frac{2u}{I_p^2} \cdot x^2 - \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{0.92I_p} \cdot x\right) \right] \cdot \frac{u}{2}$.

Πίνακας 2.2.1.1

1	2	3	4	5
$\frac{x}{l_p}$	u_p	Πρανές sinus		
	p- πρανές	u_s	$\Delta u_{p/s}$ $=u_p-u_s$	$\Delta u_{p/s} \%$
	mm	mm	Mm	%
0	0			
0,05	0,75	0,04	+0,71	+0,47
0,10	3,00	1,75	+1,43	+0,95
0,15	6,75	5,23	+1,52	+1,01
0,20	12,00	10,92	+1,08	+0,72
0,25	18,75	18,47	+0,28	+0,19
0,30	27,00	27,67	-0,67	-0,45
0,35	36,75	38,24	-1,49	-0,99
0,40	48,00	49,88	-1,88	-1,25
0,45	60,75	62,26	-1,50	-1,00
0,50	75,00	75,00	0	0

Τα πρώτα μισά των πρανών χωρίστηκαν σε 10 τμήματα (που είναι εικοστά του συνολικού μήκους των πρανών). Η στήλη 1 περιέχει τα μήκη αυτών των τμημάτων. Οι στήλες 2 και 3 περιέχουν τις υπερυψώσεις u_p και u_s του p και s πρανούς αντίστοιχα. Η στήλη 4 περιέχει την διαφορά $\Delta u_{p/s}=u_p-u_s$ και η στήλη 5 την ποσοστιαία διαφορά $\Delta u_{p/s} \%$. Για το s-πρανές η απόλυτα μεγαλύτερη διαφορά είναι $\Delta u=1.88\text{mm}(=1.25\%)$, πολύ μικρότερη από την διαφορά που παρουσιάζει το p-πρανές με το ευθύγραμμο.

Στις υπερυψώσεις κάτω των 150mm οι διαφορές υπερύψωσης είναι σχετικά μικρότερες, δηλαδή $\frac{\Delta u}{150} \cdot u$. [9]

Πιο αναλυτικά, εφόσον $l_s = 0.92l_p$, το p-πρανές ξεκινάει κατά

$$\frac{l_p}{2} - \frac{l_s}{2} = 0.5l_p - \frac{0.92}{2}l_p = 0.04l_p \text{ μετά το s-πρανές.}$$

Έστω ότι το (0,0) συμπίπτει με την αρχή του p -πρανούς, τότε οι τετμημένες του s -πρανούς ξεκινάνε κατά $0.04l_p$ δηλαδή $x_s = x_p + 0.04l_p$. Έτσι, ο τύπος που δίνει την

μεταβολή της υπερύψωσης στο s -πρανές γίνεται $u_s = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{0.92l_p} \cdot (x_p + 0.04l_p)\right) \right] \cdot \frac{u}{2}$ και

η διαφορά της υπερύψωσης $\Delta u = u_b - u_s = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2 - \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{0.92l_p} \cdot (x_p + 0.04l_p)\right) \right] \cdot \frac{u}{2}$.

Για τον εντοπισμό του σημείου όπου εμφανίζεται ακρότατο της εξίσωσης Δu , μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος:

$$\begin{aligned} (\Delta u)' = 0 &\Leftrightarrow \frac{2u}{l_p^2} \cdot 2x_p + \frac{u}{2} \sin\left[\frac{\pi}{0.92l_p} (x_p + 0.04l_p)\right] \cdot \frac{\pi}{0.92l_p} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{l_p^2} \cdot x_p + \frac{\pi}{1.84l_p} \sin\left[\frac{\pi}{0.92l_p} (x_p + 0.04l_p)\right] = 0 \Leftrightarrow x_p \cong 0.4l_p \end{aligned}$$

Για $x = 0.4l_p$ προκύπτει μέγιστη-απόλυτη- τιμή :

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.4^2 l_p^2 - \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{0.92l_p} \cdot (0.4l_p + 0.04l_p)\right) \right] \cdot \frac{u}{2} = \\ &= 0.32u - 0.33253u = -0.01253u \end{aligned}$$

και για $u_{\max} = 150mm$: $\Delta u = -0.01253 \cdot 150 = -1.88mm$.

Κάτι άλλο που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι ο πίνακας ισχύει από το σημείο εκείνο που και τα δύο πρανά έχουν ξεκινήσει, δηλαδή το σημείο $x_p = 0.04l_p$ (ή $x = 0$) και ότι μέχρι το σημείο αυτό το s -πρανές δεν έχει ξεκινήσει ακόμα και επομένως η υπερύψωσή του σ' αυτό το διάστημα είναι 0.

Έτσι, η διαφορά της υπερύψωσης στο διάστημα αυτό είναι $\Delta u = u_b - u_s = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2 - 0$ και η

μέγιστη τιμή της εμφανίζεται για $x_p = 0.04l_p$ ίση με $\Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.04^2 \cdot l_p^2 - 0 = 0.0032u$.

Για $u_{\max} = 150mm$: $\Delta u = 0.0032 \cdot 150mm = 0.48mm$.

Όσον αφορά το δεύτερο μισό των πρανών, το s -πρανές θα τελειώνει κατά $l_p - 0.04l_p = 0.96l_p$ πριν το τέλος του p -πρανούς, όπου και θα έχει αποκτήσει υπερύψωση u . Έτσι, η διαφορά της υπερύψωσης στο διάστημα $0.96l_p < x < l_p$ θα είναι

$$\Delta u = u_b - u_s = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2 - u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.96^2 l_p^2 - u = -0.00325u \text{ και για } u_{\max} = 150mm \text{ αποκτά την τιμή}$$

$$\Delta u = -0.00325 * 150mm \cong -0.48mm.$$

Τέλος, στο δεύτερο μισό η μέγιστη τιμή εμφανίζεται στο σημείο που είναι συμμετρικό με το $x = 0.4l_p$ δηλαδή στο σημείο που απέχει $l_p - 0.4l_p = 0.6l_p$ από το τέλος του p-πρανούς και έχει τιμή αντίθετη με το μέγιστο που εμφανίστηκε στο πρώτο μισό, δηλαδή τιμή $\Delta u = +1.88mm$.

2.2.2 Ως προς τις κλίσεις των πρανών υπερύψωσης

$$\text{Η κλίση του p-πρανούς είναι } \frac{1}{m_p} = \frac{2u}{l_p}, \text{ ενώ η κλίση του s-πρανούς είναι } \frac{1}{m_s} = \frac{1.5708u}{l_s}.$$

$$\text{Για ίσα μήκη } l_s = l_p \text{ είναι } \frac{\frac{1}{m_p}}{\frac{1}{m_s}} = \frac{\frac{2u}{l_p}}{\frac{1.5708u}{l_s}} = \frac{2}{1.5708} = 1.2732, \text{ δηλαδή η κλίση του p-πρανούς}$$

είναι κατά 27.32% μεγαλύτερη από αυτήν του s-πρανούς.

Από την σύγκριση τις κλίσεις του p-πρανούς με το s-πρανές που το προσεγγίζει, δηλαδή το πρανές με μήκος $l_s = 0.92l_p$ και κλίση $\frac{1}{m_s} = \frac{1.5708u}{0.92l_p}$, προέκυψε

$$\frac{\frac{1}{m_p}}{\frac{1}{m_s}} = \frac{\frac{2u}{l_p}}{\frac{1.5708u}{0.92l_p}} = 1.1714 \text{ δηλαδή η διαφορά μειώνεται στο 17,14\%}.$$

2.2.3 Ως προς τις εκτροπές f

Κατά την εφαρμογή των αντίστοιχων με τα πρανή τόξα συναρμογής, οι εκτροπές που απαιτούνται για το κυκλικό τόξο είναι $f_p = \frac{l_p^2}{48R} = 0.02083 \frac{l_p^2}{R}$ για το p-πρανές και

$$f_s = \frac{l_s^2}{42.232R} = 0.02368 \frac{l_s^2}{R} \text{ για το s-πρανές.}$$

$$\text{Οπότε } \frac{f_s}{f_p} = \frac{\frac{l_s^2}{42.232R}}{\frac{l_p^2}{48R}} = \frac{48}{42.232} = 1.1366 \text{ δηλαδή για } l_s = l_p \text{ η εκτροπή του s-πρανούς είναι}$$

κατά 13,66% μεγαλύτερη από αυτήν του p-πρανούς.

Από την σύγκριση του p-πρανούς με το s-πρανές που το προσεγγίζει, δηλαδή το s-πρανές μήκους $l_s = 0.92l_p$ και εκτροπή $f_s = \frac{0.92^2 l_p^2}{42.232R} = 0.02004 \frac{l_p^2}{R}$, προέκυψε

$$\frac{f_s}{f_p} = \frac{\frac{0.92^2 l_p^2}{42.232R}}{\frac{l_p^2}{48R}} = 0.92^2 \cdot \frac{48}{42.232} = 0.9620.$$

2.2.4 Ως προς τις οριακές τιμές κλίσεων και μήκους συναρμογής

Το κατασκευαστικό όριο για τις κλίσεις των δύο πρανών είναι ίδιο και ίσο με $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$. Από αυτό προκύπτουν αντίστοιχα:

-p-πρανές: $l_{\min} = 800 \cdot u$

-s-πρανές: $(l_s)_{\min} = 6.2832V \cdot u$

Τα «δυναμικά» όρια για τις κλίσεις των δύο πρανών είναι γενικά (εκτός ειδικών περιπτώσεων) για το p-πρανές και $\left(\frac{1}{m_s}\right)_{\max} = \frac{1}{4 \cdot V}$ για το s-πρανές. Από αυτό

προκύπτουν αντίστοιχα:

-p-πρανές: $l_{\min} = 8 \cdot V \cdot u$

-s-πρανές: $(l_s)_{\min} = 6.2832V \cdot u$

Έτσι

-p-πρανές: $l_{\min} = \max\{800u, 8 \cdot V \cdot u\}$

Ο περιορισμός $l_{\min} = 800 \cdot u$ είναι καθοριστικός μόνο για ταχύτητες $V < 100 \text{ km/h}$.

Πράγματι, για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h το γινόμενο $8V$ θα είναι μεγαλύτερο από 800 , άρα ούτως ή άλλως θα επικρατεί ο περιορισμός $l_{\min} = 8V \cdot u$. Δεδομένου όμως

ότι γενικά το p-πρανές χρησιμοποιείται για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100km/h, ο περιορισμός $l_{\min} = 800 \cdot u$ δεν έχει καμία πρακτική σημασία.

-s-πρανές: $(l_s)_{\min} = \max(628.32u, 6.2832V \cdot u)$

Ο περιορισμός $(l_s)_{\min} = 628.32u$ είναι καθοριστικός μόνο για ταχύτητες $V < 100\text{km/h}$.

Πράγματι, για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100km/h το γινόμενο $6.2832V$ θα είναι μεγαλύτερο από 628.32, άρα ούτως ή άλλως θα επικρατεί ο περιορισμός $(l_s)_{\min} = 6.2832V \cdot u$. Δεδομένου όμως ότι γενικά το p-πρανές χρησιμοποιείται για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100km/h, ο περιορισμός $(l_s)_{\min} = 628.32u$ δεν έχει καμία πρακτική σημασία.

Συμπέρασμα: Η μεγαλύτερη διαφορά εκτροπών λοιπόν ανάμεσα στα δύο τόξα συναρμογής είναι ακόμα και στα μεγαλύτερα μήκη ίση με μόλις 2mm. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο τόξα συναρμογής πρακτικά δεν ξεχωρίζουν σχεδόν καθόλου και γι' αυτό είναι ισάξια από άποψη συμπεριφοράς. Δεν έχει νόημα λοιπόν η χρησιμοποίηση τόξου συναρμογής που αντιστοιχεί σε s-πρανές στη θέση τόξου συναρμογής που αντιστοιχεί στο p-πρανές (με παραβολική αύξηση της καμπυλότητας) σε βελτιώσεις υψηλών ταχυτήτων.

Η ουσιαστική τους διαφορά βρίσκεται στην μικρότερη κλίση του s-πρανούς σε σχέση με το p-πρανές και άρα στην μεγαλύτερη άνεση που προσφέρει το s-πρανές.

2.3 Σύγκριση πρανούς Bloss με το p-πρανές

2.3.1 Ως προς την διαφορά των υπερυψώσεων

Μια καλή προσέγγιση του p-πρανούς από το b-πρανές προκύπτει για μήκος του Bloss πρανούς ίσο με $l_b = 0.89l_p$. Η σύγκριση αρκεί μέχρι το μέσον των πρανών εφόσον και τα δύο είναι αντισυμμετρικά ως προς το μέσον του.

Ο υπολογισμός έγινε για την μέγιστη υπερύψωση $u_{\max} = 150\text{mm}$.

Η εξίσωση που δίνει την μεταβολή της υπερύψωσης στο εσωτερικό του p-πρανούς

$$\text{είναι } u_p = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x^2, \text{ ενώ η αντιστοιχη για το b-πρανές είναι } u_b = \left(\frac{3}{l_b^2} \cdot x^2 - \frac{2}{l_b^2} \cdot x^3 \right) \cdot u.$$

Θεωρήθηκε όμως ότι $l_b = 0.89l_p$ οπότε

$$u_b = \left(\frac{3}{0.89^2 \cdot l_p^2} \cdot x^2 - \frac{2}{0.89^3 \cdot l_p^3} \cdot x^3 \right) \cdot u \Leftrightarrow u_b = \left(\frac{3.787}{l_p^2} \cdot x^2 - \frac{2.837}{l_p^3} \cdot x^3 \right) \cdot u. \text{ Η διαφορά λοιπόν της}$$

$$\text{υπερύψωσης σε κάθε σημείο είναι } \Delta u = u_p - u_b = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x^2 - \left(\frac{3.787}{l_p^2} \cdot x^2 - \frac{2.837}{l_p^3} \cdot x^3 \right) \cdot u.$$

Τα πρώτα μισά των πρανών χωρίστηκαν σε 10 τμήματα (που είναι εικοστά του συνολικού μήκους των πρανών). Η στήλη 1 περιέχει τα μήκη αυτών των τμημάτων. Οι στήλες 2 και 3 περιέχουν τις υπερυψώσεις u_p και u_b του p και b πρανούς αντίστοιχα. Η στήλη 4 περιέχει την διαφορά $\Delta u_{p/b} = u_p - u_b$ και η στήλη 5 την ποσοστιαία διαφορά $\Delta u_{p/b} \%$. [9]

Πίνακας 2.3.1.1

1	2	3	4	5
$\frac{x}{l_p}$	U_p	Πρανές Bloss		
		U_b	$\Delta u_{p/b}$ $= u_p - u_b$	$\Delta u_{p/b} \%$
	mm	mm	mm	%
0	0			
0,05	0,75			
0,10	3,00	1,10	+1,90	+1,27
0,15	6,75	4,76	+1,99	+1,33
0,20	12,00	10,64	+1,36	+0,91
0,25	18,75	18,45	+0,30	+0,20
0,30	27,00	27,85	-0,85	-0,57
0,35	36,75	38,53	-1,78	-1,19
0,40	48,00	50,14	-2,14	-1,43
0,45	60,75	62,14	-1,66	-1,11
0,50	75,00	75,00	0	0

Σύμφωνα με την στήλη 4 η μεγαλύτερη διαφορά υπερύψωσης είναι $\Delta u = 2.14mm (= 1.43\%)$ και ο μέσος όρος $1.48mm (= 0.99\%)$. Αυτές οι διαφορές είναι ανάλογες μ' αυτές που παρουσιάστηκαν στον πίνακα 8.2.1.1 για τις διαφορές της υπερύψωσης ανάμεσα στο ρ και στο s πρανές.

Πιο αναλυτικά, εφόσον $l_b = 0.89l_p$, το ρ -πρανές ξεκινάει κατά

$$\frac{l_p}{2} - \frac{l_b}{2} = 0.5l_p - \frac{0.89}{2}l_p = 0.055l_p \text{ μετά το } s\text{-πρανές.}$$

Έστω ότι το $(0,0)$ συμπίπτει με την αρχή του ρ -πρανούς, τότε οι τετμημένες του s -πρανούς ξεκινάνε κατά $0.055l_p$ δηλαδή $x_b = x_p + 0.055l_p$. Έτσι, ο τύπος που δίνει την μεταβολή της υπερύψωσης στο b -πρανές γίνεται

$$u_b = \left(\frac{3.787}{l_p^2} \cdot (x_p + 0.055l_p)^2 - \frac{2.837}{l_p^3} \cdot (x_p + 0.055l_p)^3 \right) \cdot u \quad \text{και η διαφορά της υπερύψωσης}$$

$$\Delta u = u_p - u_b = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2 - \left(\frac{3.787}{l_p^2} \cdot (x_p + 0.055l_p)^2 - \frac{2.837}{l_p^3} \cdot (x_p + 0.055l_p)^3 \right) \cdot u.$$

Για τον εντοπισμό του σημείου όπου εμφανίζεται ακρότατο της εξίσωσης Δu , μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος:

$$(\Delta u)' = 0 \Leftrightarrow \frac{2u}{l_p^2} \cdot 2x_p - \frac{3.787u}{l_p^2} \cdot 2(x_p + 0.055l_p) + \frac{2.837u}{l_p^3} \cdot 3(x_p + 0.055l_p)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{l_p^2} \cdot x_p - \frac{7.574}{l_p^2} (x_p + 0.055l_p) + \frac{8.511}{l_p^3} (x_p^2 + 0.003l_p^2 + 0.11x_p l_p) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{l_p^2} \cdot x_p - \frac{7.574}{l_p^2} \cdot x_p - \frac{0.41657}{l_p} + \frac{8.511}{l_p^3} \cdot x_p^2 + \frac{0.0255}{l_p} + \frac{0.93621}{l_p^2} \cdot x_p = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2.6419}{l_p^2} \cdot x_p - \frac{0.391}{l_p} + \frac{8.511}{l_p^3} \cdot x_p^2 = 0 \Leftrightarrow x_p^2 - \frac{l_p}{3.22} - \frac{l_p^2}{21.77} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού και θα λυθεί με την μέθοδο της διακρίνουσας:

$$\Delta = \frac{l_p^2}{10.37} + 4 \frac{l_p^2}{21.77} = \frac{l_p^2}{10.37} + \frac{l_p^2}{5.44} \cdot 0.28l_p^2 \text{ οπότε}$$

$$x_{p,2} = \frac{0.31l_p \pm \sqrt{0.28l_p^2}}{2} = \begin{cases} \frac{0.31l_p - 0.53l_p}{2} = -0.11l_p \\ \frac{0.31l_p + 0.53l_p}{2} = 0.42l_p \end{cases}$$

Η αρνητική τιμή απορρίπτεται ως αδύνατη. Οπότε $x_p = 0.42l_p$.

Έτσι, η μέγιστη τιμή Δu είναι για $x_p = 0.42l_p$:

$$\Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.42^2 l_p^2 - \left(\frac{3.787}{l_p^2} \cdot (0.42l_p + 0.055l_p)^2 - \frac{2.837}{l_p^3} \cdot (0.42l_p + 0.055l_p)^3 \right) \cdot u = -0.0132u \text{ και για}$$

$$u_{\max} = 150mm : \Delta u = -0.0132 * 150mm = -1.98mm.$$

Κάτι άλλο που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι ο πίνακας ισχύει από το σημείο εκείνο που και τα δύο πρανή έχουν ξεκινήσει, δηλαδή το σημείο $x_p = 0.055l_p$ (ή $x = 0$) και ότι μέχρι το σημείο αυτό το b-πρανές δεν έχει ξεκινήσει ακόμα και επομένως η υπερύψωσή του σ' αυτό το διάστημα είναι 0.

Έτσι, η διαφορά της υπερύψωσης στο διάστημα αυτό είναι $\Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2 - 0$ και η μέγιστη

τιμή της εμφανίζεται για $x_p = 0.055l_p$ ίση με $\Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.055^2 l_p^2 - 0 = 0.00605u$.

$$\text{Για } u_{\max} = 150mm : \Delta u = 0.00605 * 150mm = 0.91mm.$$

Όσον αφορά το δεύτερο μισό των πρανών, το b-πρανές θα τελειώνει κατά $l_p - 0.055l_p = 0.945l_p$ πριν το τέλος του p-πρανούς, όπου και θα έχει αποκτήσει υπερύψωση u . Έτσι, η διαφορά της υπερύψωσης στο διάστημα $0.945l_p < x < l_p$ θα είναι

$$\Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x_p^2 - u \text{ και θα εμφανίζει την μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό ακριβώς για}$$

$$x_p = 0.945l_p :$$

$$\Delta u = \frac{2u}{l_p^2} \cdot 0.945^2 l_p^2 - u = -0.006066u \text{ και για } u_{\max} = 150mm \text{ αποκτά την τιμή}$$

$$\Delta u = -0.006066 * 150mm \cong -0.91mm.$$

Τέλος, στο δεύτερο μισό η μέγιστη τιμή εμφανίζεται στο σημείο που είναι συμμετρικό με το $x_p = 0.42l_p$ δηλαδή στο σημείο που απέχει $l_p - 0.42l_p = 0.58l_p$ από το τέλος του p-πρανούς και έχει τιμή αντίθετη με το μέγιστο που εμφανίστηκε στο πρώτο μισό, δηλαδή τιμή $\Delta u = -1.98mm$.

Συμπέρασμα: Σύμφωνα μ' αυτό ισχύει για το b-πρανές ό,τι και για το s-πρανές που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Το b-πρανές είναι ως προς την συμπεριφορά ισάξιο με το p-πρανές. Με βάση όμως τους υπολογισμούς των υπερυψώσεων και της οριοθέτησης, το πρανές και το τόξο συναρμογής Bloss είναι πιο δύσχρηστα από το p-πρανές και το p-τόξο συναρμογής, επειδή τα πρώτα βασίζονται στην κυβική παραβολή αντί της τετραγωνικής παραβολής.

2.3.2 Ως προς τις κλίσεις των πρανών υπερύψωσης

Η κλίση του p-πρανούς είναι $\frac{1}{m_p} = \frac{2u}{l_p}$, ενώ η κλίση του b-πρανούς είναι $\frac{1}{m_b} = 1.5 \frac{u}{l_b}$ στο

μέσον τους, όπου και οι κλίσεις αποκτούν τις μέγιστες τιμές τους και στα δύο πρανή.

Για ίσα μήκη $l_b = l_p$ είναι $\frac{\frac{1}{m_p}}{\frac{1}{m_b}} = \frac{\frac{2u}{l_p}}{\frac{1.5u}{l_b}} = 1.3333$, δηλαδή η κλίση του p-πρανούς είναι κατά

33.33% μεγαλύτερη από αυτήν του b-πρανούς.

Από την σύγκριση των κλίσεων του p-πρανούς με το b-πρανές που το προσεγγίζει, δηλαδή το πρανές με μήκος $l_b = 0.89l_p$ και κλίσης $\frac{1}{m_b} = 1.5 \frac{u}{0.89l_p}$, προκύπτει

$\frac{\frac{1}{m_p}}{\frac{1}{m_b}} = \frac{\frac{2u}{l_p}}{\frac{1.5u}{0.89l_p}} = 1.1867$ δηλαδή η διαφορά μειώνεται στο 18.67%.

2.3.3 Ως προς τις εκτροπές f

Κατά την εφαρμογή των αντίστοιχων με τα πρανή τόξα συναρμογής, οι εκτροπές που απαιτούνται για το κυκλικό τόξο είναι $f_p = \frac{l_p^2}{48R} = 0.02083 \frac{l_p^2}{R}$ για το p-πρανές και

$f_b = \frac{1}{40} \cdot \frac{l_b^2}{R} = 0.025 \frac{l_b^2}{R}$ για το

b-πρανές. Για ίσα μήκη πρανών $l_b = l_p$ είναι $\frac{f_b}{f_p} = \frac{\frac{1}{40} \cdot \frac{l_b^2}{R}}{\frac{1}{48} \cdot \frac{l_p^2}{R}} = \frac{48}{40} = 1.2$ δηλαδή η εκτροπή

για το πρανές είναι κατά 20% μεγαλύτερη από αυτήν για το p-πρανές.

Από την σύγκριση του p-πρανούς με το b-πρανές που το προσεγγίζει, δηλαδή το b-πρανές μήκους $l_b = 0.89l_p$ και εκτροπής $f_b = \frac{0.89^2 l_p^2}{40R} = 0.0198 \frac{l_p^2}{R}$, προέκυψε

$$\frac{f_b}{f_p} = \frac{\frac{0.89^2 l_p^2}{40R}}{\frac{l_p^2}{48R}} = 0.89^2 \cdot \frac{48}{40} = 0.95052$$

Σε δυσμενή περίπτωση όπως είδαμε $f_p = 0.71m$. Τότε, κατά την παραπάνω εξίσωση είναι $f_b = 0.95052 \cdot 0.71m = 0.48m$. Αυτό σημαίνει ότι με το b-πρανές μπορεί η εκτροπή να διατηρηθεί μικρότερη έως και $0.71 - 0.48 = 0.23m$ απ' ότι στο p-πρανές. Αυτό δεν παίζει κανένα ρόλο σε καινούρια σιδηροδρομική κατασκευή. Όμως μπορεί να είναι σημαντικό στην περίπτωση βελτίωσης των υφιστάμενων ταχυτήτων. Το b-πρανές λοιπόν συνίσταται όταν στις βελτιώσεις των γραμμών θα πρέπει να διατηρηθούν οι εκτροπές f όσο το δυνατόν μικρότερες για οικονομικούς λόγους.

2.3.4 Ως προς τις οριακές τιμές κλίσεων και μήκους συναρμογής

Το κατασκευαστικό όριο για τις κλίσεις των δύο πρανών είναι ίδιο και ίσο με

$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$. Από αυτό προκύπτουν αντίστοιχα:

-p-πρανές: $l_{\min} = 800 \cdot u$

-b-πρανές: $(l_b)_{\min} = 600 \cdot u$

Τα «δυναμικά» όρια για τις κλίσεις των δύο πρανών είναι γενικά (εκτός ειδικών περιπτώσεων) $\left(\frac{1}{m_p}\right)_{\max} = \frac{1}{4 \cdot V}$ για το p-πρανές και $\left(\frac{1}{m_b}\right)_{\max} = \frac{1}{4 \cdot V}$ για το b-πρανές. Από

αυτό προκύπτουν αντίστοιχα:

-p-πρανές: $l_{\min} = 8 \cdot V \cdot u$

-b-πρανές: $(l_b)_{\min} = 6V \cdot u$

Έτσι

-p-πρανές: $l_{\min} = \max\{800u, 8 \cdot V \cdot u\}$

Ο περιορισμός $l_{\min} = 800 \cdot u$ είναι καθοριστικός μόνο για ταχύτητες $V < 100 \text{ km/h}$.

Πράγματι, για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h το γινόμενο $8V$ θα είναι μεγαλύτερο από 800 , άρα ούτως ή άλλως θα επικρατεί ο περιορισμός $l_{\min} = 8V \cdot u$. Δεδομένου όμως ότι γενικά το p-πρανές χρησιμοποιείται για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h , ο περιορισμός $l_{\min} = 800 \cdot u$ δεν έχει καμία πρακτική σημασία.

-b-πρανές: $(l_b)_{\min} = \max(600u, 6V \cdot u)$

Όπως είδαμε και σε προηγούμενες παραγράφους, ο περιορισμός $(l_b)_{\min} = 600u$ είναι καθοριστικός μόνο για ταχύτητες $V < 100 \text{ km/h}$, γιατί σε άλλη περίπτωση είναι $V > 100 \text{ km/h} \rightarrow 6 \cdot V > 600$ κι επομένως θα παραγκωνίζεται ούτως ή άλλως από τον περιορισμό $(l_b)_{\min} = 6V \cdot u$. Δεδομένου όμως ότι τα πρανή Bloss χρησιμοποιούνται μόνο για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h , ο περιορισμός $(l_b)_{\min} = 600u$ καθίσταται χωρίς καμία πρακτική σημασία.

Από τις εξισώσεις $l_{\min} = \max\{800u, 8 \cdot V \cdot u\}$ και $(l_b)_{\min} = \max(600u, 6V \cdot u)$ διαπιστώνεται ότι το b-πρανές δίνει την δυνατότητα για πιο μικρά μήκη πρανούς από το p-πρανές.

Για επιβεβαίωση θα γίνει έλεγχος της περιστροφικής επιτάχυνσης α'' . Στο πρανές κατά Bloss, αυτή μεταβάλλεται κατά μήκος του πρανούς σύμφωνα με την σχέση

$$\alpha'' = \left(1 - \frac{2x}{l_b}\right) \cdot \frac{19.649V^2 \cdot u}{l_b^2}$$

Στα σημεία αρχής και τέλους RA και RE αντίστοιχα, η περιστροφική επιτάχυνση λαμβάνει την απόλυτα μέγιστη τιμή:

$$\alpha'' = \pm 19.649 \frac{V^2 \cdot u}{l_b^2}$$

όπου α'' σε $\text{gms/s}^2, u$ και l_b σε m και V σε km/h .

Αυτή η τιμή είναι μεν σε ίσα μήκη τόξου συναρμογής κατά 50% μεγαλύτερη από ότι στο p-πρανές (εξίσωση $a'' = \pm 13.10 \cdot \frac{V^2 \cdot u}{l_p^2}$), αλλά σε άλλες περιπτώσεις απ' ότι στο

ευθύγραμμο πρανές

$$(\text{εξίσωση } a'' = \frac{3.275V^2}{a} \cdot \frac{u}{l}).$$

Για παράδειγμα, αν $V=160\text{km/h}$, $m_b=800$, $m_p=400$, $u=0.150\text{m}$, $l=l_p=l_b=120\text{m}$ και $\alpha=10\text{m}$ τότε:

$$\text{-στο ευθύγραμμο πρανές } a'' = \frac{3.275160^2}{10} \cdot \frac{0.150}{120} = 10.480 \text{ gons/sec}^2$$

$$\text{-στο p-πρανές } a'' = 13.10 \cdot \frac{160^2 \cdot 0.150}{120^2} = 3.493 \text{ gons/sec}^2$$

$$\text{-στο b-πρανές } a'' = 19.649 \frac{160^2 \cdot 0.150}{120^2} = 5.240 \text{ gons/sec}^2.$$

2.4 Σύγκριση πρανούς Bloss με το Sinus πρανές

2.4.1 Ως προς την διαφορά των υπερυψώσεων

Μια καλή προσέγγιση του s-πρανούς από το b-πρανές προκύπτει για μήκος του Bloss πρανούς ίσο με $l_b = 0.97l_s$. Η σύγκριση αρκεί μέχρι το μέσον των πρανών εφόσον και τα δύο είναι αντισυμμετρικά ως προς το μέσον του. Ο υπολογισμός έγινε για την μέγιστη υπερύψωση $u_{\max}=150\text{mm}$.

Η εξίσωση που δίνει την μεταβολή της υπερύψωσης στο εσωτερικό του s-πρανούς είναι

$$u_s = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{l_s} \cdot x\right) \right] \cdot \frac{u}{2}, \text{ ενώ η αντίστοιχη για το b-πρανές είναι } u_b = \left(\frac{3}{l_b^2} \cdot x^2 - \frac{2}{l_b^3} \cdot x^3 \right) \cdot u.$$

Θεωρήθηκε όμως ότι $l_b = 0.97l_s$ οπότε

$$u_b = \left(\frac{3}{0.97^2 \cdot l_s^2} \cdot x^2 - \frac{2}{0.97^3 \cdot l_s^3} \cdot x^3 \right) \cdot u \Leftrightarrow u_b = \left(\frac{3.188}{l_s^2} \cdot x^2 - \frac{1.825}{l_s^3} \cdot x^3 \right) \cdot u. \text{ Η διαφορά λοιπόν της}$$

υπερύψωσης σε κάθε σημείο είναι

$$\Delta u = u_s - u_b = \frac{u}{2} \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{l_s} \cdot x\right) \right] - \left(\frac{3.188}{l_s^2} \cdot x^2 - \frac{1.825}{l_s^3} \cdot x^3 \right) \cdot u.$$

Τα πρώτα μισά των πρανών χωρίστηκαν σε 10 τμήματα (που είναι εικοστά του συνολικού μήκους των πρανών). Η στήλη 1 περιέχει τα μήκη αυτών των τμημάτων. Οι στήλες 2 και 3 περιέχουν τις υπερυψώσεις u_b και u_s του b και s πρανούς αντίστοιχα. Η στήλη 4 περιέχει την διαφορά $\Delta u_{b/s} = u_b - u_s$ και η στήλη 5 την ποσοστιαία διαφορά $\Delta u_{b/s} \%$.

Πίνακας 2.4.1.1

1	2	3	4	5
$\frac{x}{l_s}$	u_s (mm)	u_b (mm)	$\Delta u_{b/s}$ $= u_b - u_s$ (mm)	$\Delta u_{b/s} \%$ %
0				
0.05				
0.10	1,75	1,10	+0,65	+0,37
0.15	5,23	4,76	+0,47	+0,09
0.20	10,92	10,64	+0,28	+0,02
0.25	18,47	18,45	+0,02	+0,001
0.30	27,67	27,85	-0,18	-0,006
0.35	38,24	38,53	-0,29	-0,007
0.40	49,88	50,14	-0,26	-0,005
0.45	62,26	62,14	+0,12	+0,002
0.50	75,00	75,00	0	0

Πρέπει να σημειωθεί ότι εφόσον $l_b = 0.97l_s$ το b-πρανές θα ξεκινάει κατά $\frac{l_s}{2} - \frac{l_b}{2} = 0.5l_s - \frac{0.97}{2}l_s = 0.015l_s$ μετά το s-πρανές και θα τελειώνει κατά $0.015l_s$ πριν το τέλος του s-πρανούς (ή σε απόσταση $l_s - 0.015l_s = 0.985l_s$ από την αρχή του s-πρανούς). Έτσι, στο πρώτο μισό, η εξίσωση της διαφοράς υπερύψωσης στο διάστημα $0 < x < 0.015l_s$ είναι $\Delta u = u_s - u_b = \frac{u}{2} \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{l_s} \cdot x\right) \right] - 0$ και εμφανίζει την μέγιστη τιμή της για $x_s = 0.015l_s$ ίση με

$$\Delta u = \frac{u}{2} \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{l_s} \cdot 0.015 l_s \right) \right] - 0 = 0.000555u .$$

$$\text{Για } u_{\max} = 150\text{mm} : \Delta u = 0.000555 \cdot 150\text{mm} \cong 0.083\text{mm} .$$

Αντίστοιχα, στο δεύτερο μισό, η εξίσωση της διαφοράς υπερύψωσης στο διάστημα $0.985l_s < x < l_s$ είναι $\Delta u = u_s - u_b = \frac{u}{2} \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{l_s} \cdot x \right) \right] - u$ και εμφανίζει την μέγιστη τιμή της

$$\text{για } x_s = 0.985l_s \text{ ίση με } \Delta u = \frac{u}{2} \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{l_s} \cdot 0.985l_s \right) \right] - 0 = -0.000555u .$$

$$\text{Για } u_{\max} = 150\text{mm} : \Delta u = -0.000554 \cdot 150\text{mm} \cong -0.083\text{mm} .$$

Ο πίνακας αφορά τις τιμές του x από $0.015l_d < x < 0.985l_s$.

Σύμφωνα με την στήλη 4 η μεγαλύτερη διαφορά υπερύψωσης για την μέγιστη υπερύψωση $u_{\max}=150\text{mm}$ είναι μόνο $0.65\text{mm}(=0.37\%)$. Φαίνεται λοιπόν ότι τα δύο αυτά πρανή συμφωνούν σχεδόν απόλυτα και πρακτικά δεν διαχωρίζονται.

2.4.2 Ως προς τις κλίσεις των πρανών υπερύψωσης

Η κλίση του s-πρανούς στο μέσον του είναι $\frac{1}{m_s} = \frac{1.5708u}{l_s}$, ενώ η κλίση του b-πρανούς

είναι $\frac{1}{m_b} = 1.5 \frac{u}{l_b}$, στο μέσον του, όπου και οι κλίσεις αποκτούν τις μέγιστες τιμές τους

και στα δύο πρανή.

$$\text{Για ίσα μήκη } l_b = l_s \text{ είναι } \frac{\frac{1}{m_s}}{\frac{1}{m_b}} = \frac{\frac{1.5708u}{l_s}}{\frac{1.5u}{l_b}} = 1.0472, \text{ δηλαδή η κλίση του s-πρανούς είναι}$$

κατά 4.72% μεγαλύτερη από αυτήν του b-πρανούς.

Από την σύγκριση των κλίσεων του s-πρανούς με το b-πρανές που το προσεγγίζει, δηλαδή το πρανές με μήκος $l_b = 0.97l_s$ και κλίση $\frac{1}{m_b} = 1.5 \frac{u}{0.97l_p}$ προέκυψε

$$\frac{\frac{1}{m_s}}{\frac{1}{m_b}} = \frac{\frac{1.5708u}{l_s}}{\frac{1.5u}{0.97l_s}} = 1.0158 \text{ δηλαδή η διαφορά μειώνεται στο 1.58\%}$$

2.4.3 Ως προς τις εκτροπές f

Κατά την εφαρμογή των αντίστοιχων με τα πρανή τόξα συναρμογής, οι εκτροπές που απαιτούνται για το κυκλικό τόξο είναι $f_s = \frac{l_s^2}{42.232R} = 0.02368 \frac{l_s^2}{R}$ για το s-πρανές και

$$f_b = \frac{1}{40} \cdot \frac{l_b^2}{R} = 0.025 \frac{l_b^2}{R} \text{ για το}$$

$$\text{b-πρανές. Για ίδια μήκη πρανών } l_b = l_s \text{ είναι } \frac{f_b}{f_s} = \frac{\frac{1}{40} \cdot \frac{l_b^2}{R}}{\frac{1}{42.232} \cdot \frac{l_s^2}{R}} = \frac{48}{42.232} = 1.0558 \text{ δηλαδή η}$$

εκτροπή για το b-πρανές είναι κατά 5.58% μεγαλύτερη από αυτήν για το s-πρανές.

Από την σύγκριση του s-πρανούς με το b-πρανές που το προσεγγίζει, δηλαδή το b-πρανές μήκους $l_b = 0.97l_s$ και εκτροπής $f_b = \frac{0.97^2 l_p^2}{40R} = 0.02352 \frac{l_s^2}{R}$, προκύπτει

$$\frac{f_s}{f_b} = \frac{\frac{l_s^2}{42.232R}}{\frac{0.97^2 \cdot l_s^2}{40R}} = \frac{40}{402.232 \cdot 0.97^2} = 1.00664 \text{ δηλαδή η εκτροπή του s-πρανούς είναι κατά}$$

0,66% μεγαλύτερη από την εκτροπή του b-πρανούς.

2.4.4 Ως προς τις οριακές τιμές κλίσεων και μήκους συναρμογής

Το κατασκευαστικό όριο για τις κλίσεις των δύο πρανών είναι ίδιο και ίσο με

$$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400} \text{ . Από αυτό προκύπτουν αντίστοιχα:}$$

$$-s\text{-πρανές: } (I_s)_{\min} = 628.32u$$

$$-b\text{-πρανές: } (I_b)_{\min} = 600 \cdot u$$

Τα «δυναμικά» όρια για τις κλίσεις των δύο πρανών είναι γενικά (εκτός ειδικών περιπτώσεων) $\left(\frac{1}{m_s}\right)_{\max} = \frac{1}{4 \cdot V}$ για το s-πρανές και $\left(\frac{1}{m_b}\right)_{\max} = \frac{1}{4 \cdot V}$ για το b-πρανές. Από

αυτό προκύπτουν αντίστοιχα:

$$-p\text{-πρανές: } (I_s)_{\min} = 6.2832V \cdot u$$

$$-b\text{-πρανές: } (I_b)_{\min} = 6V \cdot u$$

Έτσι

$$-s\text{-πρανές: } (I_s)_{\min} = \max(628.32u, 6.2832V \cdot u)$$

Ο περιορισμός $(I_s)_{\min} = 628.32u$ είναι καθοριστικός μόνο για ταχύτητες $V < 100 \text{ km/h}$. Πράγματι, για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h το γινόμενο $6.2832V$ θα είναι μεγαλύτερο από 628.32 , άρα ούτως ή άλλως θα επικρατεί ο περιορισμός $(I_s)_{\min} = 6.2832V \cdot u$. Δεδομένου όμως ότι γενικά το p-πρανές χρησιμοποιείται για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h , ο περιορισμός $(I_s)_{\min} = 628.32u$ δεν έχει καμία πρακτική σημασία.

$$-b\text{-πρανές: } (I_b)_{\min} = \max(600u, 6V \cdot u)$$

Όπως είδαμε και σε προηγούμενες παραγράφους, ο περιορισμός $(I_b)_{\min} = 600u$ είναι καθοριστικός μόνο για ταχύτητες $V < 100 \text{ km/h}$, γιατί σε άλλη περίπτωση είναι $V > 100 \text{ km/h} \rightarrow 6 \cdot V > 600$ κι επομένως θα παραγκωνίζεται ούτως ή άλλως από τον περιορισμό $(I_b)_{\min} = 6V \cdot u$. Δεδομένου όμως ότι τα πρανή Bloss χρησιμοποιούνται μόνο για ταχύτητες μεγαλύτερες των 100 km/h , ο περιορισμός $(I_b)_{\min} = 600u$ καθίσταται χωρίς καμία πρακτική σημασία.

Συμπέρασμα: Από την παραπάνω σύγκριση προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα δύο αυτά πρανή είναι παρόμοια και δεν παρουσιάζουν σχεδόν καμία πρακτική διαφορά. Γι' αυτό και συνήθως εξετάζεται μόνο το b-πρανές, γιατί εν γένει οι υπολογισμοί του είναι πιο εύκολοι από το s-πρανές. Τα συμπεράσματα όμως που θα διεξάγονται ισχύουν και για το s-πρανές.

2.5 Γενικά συμπεράσματα από την σύγκριση των πρανών υπερύψωσης που προτείνονται στα εγχειρίδια ως προς την χρησιμότητά τους

Στην παράγραφο αυτή γίνεται περιληπτική ανακεφαλαίωση της σύγκρισης μεταξύ των τριών διαφορετικών μορφών πρανών υπερύψωσης που εξετάστηκαν προηγουμένως. Προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Το πρανές που αποτελείται από καμπύλα στοιχεία τετραγωνικής παραβολής, δηλαδή το p -πρανές, που χρησιμοποιείται εδώ και περίπου 40 χρόνια είναι η ιδανική διαμόρφωση για το πρανές υπερύψωσης ως προς την στροφική επιτάχυνση. Σε υψηλές ταχύτητες αποδίδουν ελάχιστες εκτροπές των κυκλικών τόξων κατά την συναρμογή εξασφαλίζοντας παράλληλα μια τουλάχιστον καλή πορεία των οχημάτων. Η τοποθέτηση, η μετατόπιση και η συντήρηση του p -πρανούς δεν δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες.
- Το πρανές κατά Bloss, το οποίο αποτελείται από μια κυβική παραβολή, προσφέρει την δυνατότητα για μικρότερα μήκη τόξου συναρμογής και ελάχιστες εκτροπές, μικρότερες από εκείνες του p -πρανούς. Γι' αυτό μπορεί κάλλιστα να χρησιμοποιηθεί για βελτιώσεις γραμμών σε ήδη υπάρχουσες διαδρομές.
- Το πρανές Sinus δεν λαμβάνεται υπόψη, γιατί συμπίπτει σχεδόν απόλυτα και πρακτικά με το πρανές κατά Bloss, ενώ είναι λιγότερο εύκολο να υπολογιστεί και λιγότερο άνετο.

Εν γένει, όμως, οι ελάχιστες διαφορές που παρουσιάζουν μεταξύ τους τα τρία πρανή, καθιστούν συμφέρουσα τη χρησιμοποίηση των άλλων δύο εναλλακτικών πρανών-Bloss και sinus-καθώς και των τόξων συναρμογής τους, μόνο σε ειδικές περιστάσεις. Το sinus ειδικά πρανές ίσως να μην ενδείκνυται σχεδόν σε καμία εφαρμογή, λόγω της απόλυτης σχεδόν ομοιότητας με το Bloss. Τελικά, οι προσπάθειες να αντικατασταθεί το p -πρανές με ένα άλλο καλύτερο ως προς την συμπεριφορά και τους υπολογισμούς, έχει προς το παρόν αποτύχει.

3. Σύγκριση για τα όρια που θεσπίζονται ως προς τις κλίσεις του πρανούς υπερύψωσης και του μήκους των τόξων συναρμογής

Στην παράγραφο αυτή γίνεται μία προσπάθεια να συγκεντρωθούν επιγραμματικά τα στοιχεία κάθε κανονισμού και να καταρτιστούν συγκεντρωτικοί συγκριτικοί πίνακες.

Αναλύθηκαν και συγκρίθηκαν τα παρακάτω εγχειρίδια:

- [1] Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ
- [2] British Track Geometry
- [3] American Railway Track
- [7] "Der Gleisplan" Bayverlag GmbH
- [8] "Gleisgeometrie"
- [9] "Gestaltung der Überhöhungsrampen"

3.1 Γερμανικοί κανονισμοί

3.1.1 Γραμμική αύξηση της υπερύψωσης-καμπυλότητας

3.1.1.1 Το ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης

Η υπερύψωση σε μια θέση εντός του πρανούς, είναι

- $u_x = \frac{\Delta u}{l_R} \cdot x + u_{R_A}$ όπου u_{R_A} είναι η υπερύψωση στην αρχή R_A και x η τετμημένη της θέσης στην οποία ζητάμε την υπερύψωση [7].
- Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού των τιμών της υπερύψωσης εντός του πρανού είναι στα ευθύγραμμα πρανή για ίσες αποστάσεις Δl : $u_i = \frac{u}{n}$, $i = 0(1)n$ όπου $n = \frac{l_r}{\Delta l}$. Σε απόσταση x από την αρχή του πρανού θα ισχύει: $u_x = \frac{ux}{l_r}$ [8].

Αν η κλίση του πρανού σε όλο το μήκος του είναι 1:m, τότε πολύ εύκολα προκύπτει

$$\frac{1}{m} = \tan \alpha \rightarrow \frac{1}{m} = \frac{u}{l} \text{ ή } m = \frac{l}{u}.$$

Έτσι, οι οριακές τιμές για την κλίση του πρανούς προκύπτουν:

- Κατασκευαστικά:

Για λόγους γεωμετρίας και λαμβάνοντας υπόψη την κίνηση των οχημάτων-ανεξάρτητα από την ταχύτητα- η κλίση του πρανούς δεν πρέπει να υπερβαίνει μια συγκεκριμένη μέγιστη τιμή: $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$ ή $m_{\min} = 400$, απ' όπου προκύπτει $I_{\min} = 400 \cdot u$.

Σε νέες κατασκευές πρέπει $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{600}$ ή $m_{\min} = 600$.

Για να αποφευχθούν πολύ χαμηλά πρανή, τα οποία φέρουν προβλήματα στην κατασκευή και συντήρηση, ορίζεται μία ελάχιστη τιμή για την κλίση του πρανούς, δηλαδή: $\left(\frac{1}{m}\right)_{\min} = \frac{1}{2000}$ ή $m_{\max} = 2000$ απ' όπου προκύπτει $I_{\max} = 2000 \cdot u$.

- Εκτός από αυτά τα κατασκευαστικά όρια, υπάρχει και ένα «δυναμικό» όριο, το οποίο περιορίζει τις εμφανιζόμενες επιταχύνσεις, έτσι ώστε να μην εμφανιστούν ταλαντώσεις στο όχημα και δυσάρεστες επιδράσεις για τον επιβάτη. Έτσι, βάσει μακροχρόνιων εμπειριών προέκυψε για την επίτευξη μιας άφογης πορείας: $m = 10 \cdot V$ ή $\frac{1}{m} = \frac{1}{10 \cdot V}$.

Η κλίση εξάλλου δεν πρέπει να υπερβαίνει την τιμή

$$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{8 \cdot V} \text{ ή } m_{\min} = 8 \cdot V, \text{ απ' όπου προκύπτει } I_{\min} = 8 \cdot V \cdot u \text{ όπου } I \text{ και } u \text{ σε } m, V$$

σε km/h.

- Τέλος, όπως είδαμε, προκύπτει άλλο ένα όριο από τον περιορισμό για την αύξηση της ανεπάρκειας της υπερύψωσης

$$I_{\min} = \alpha \cdot \max V \cdot \Delta u_F \cdot [7]$$

με $\alpha=4$ για γραμμική αύξηση της καμπυλότητας, δηλαδή

$$I_{\min} = 4 \cdot \max V \cdot \Delta u_F$$

Έτσι συνολικά για το μήκος του ευθύγραμμου πρανούς

$$\text{υπερύψωσης: } I_{\min} = \max \begin{cases} 400 \cdot u \\ 8V \cdot u \\ 4 \cdot \max V \cdot \Delta u_F \end{cases}$$

Η εξίσωση $I_{\min} = 400 \cdot u$, ήτοι το κατασκευαστικό όριο επικρατεί όταν $V < 50 \text{ km/h}$, ενώ η εξίσωση $I_{\min} = 8 \cdot V \cdot u$ επικρατεί όταν $V > 50 \text{ km/h}$. [9]

Πράγματι, όταν η ταχύτητα $V < 50 \text{ km/h}$ το γινόμενο $8V$ θα είναι μικρότερο από 400 και άρα θα επικρατεί το όριο $I_{\min} = 400 \cdot u$ ως μεγαλύτερο. Αντίθετα, όταν $V > 50 \text{ km/h}$ το γινόμενο $8V$ θα είναι μεγαλύτερο από 400, οπότε και το όριο $I_{\min} = 8V \cdot u$ θα είναι επικρατέστερο ως μεγαλύτερο.

Σημείωση: Στη συνέχεια παρατίθενται κάποιες μέγιστες και ελάχιστες τιμές που αναφέρονται στο εγχειρίδιο [8] της γερμανικής βιβλιογραφίας. Οι μέγιστες και ελάχιστες αυτές τιμές κατηγοριοποιούνται με βάση την ταχύτητα. Οι τιμές που αναφέρονται για ταχύτητες μεγαλύτερες από 40 km/h συμπίπτουν με τα όρια που παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Όσον αφορά τις τιμές για ταχύτητες μικρότερες των 40 km/h παρατίθενται ενημερωτικά, εφόσον ταχύτητες μικρότερες των 40 km/h είναι εν γένει πολύ μικρές και δεν αφορούν αυτήν την εργασία.

Ελάχιστες τιμές κλίσης 1:m [8]

$$m_{\max} = 10V \rightarrow \left(\frac{1}{m} \right)_{\min} = \frac{1}{10V} \text{ για } V \geq 40 \text{ km/h}$$

$$m_{\max} = 2,5V + 300 \rightarrow \left(\frac{1}{m} \right)_{\min} = \frac{1}{2,5V + 300} \text{ για } V \leq 40 \text{ km/h}$$

Μέγιστες τιμές κλίσης πρανούς 1:m

$$m_{\min} = 8V \rightarrow \left(\frac{1}{m} \right)_{\max} = \frac{1}{8V} \text{ για } V \geq 50 \text{ km/h}$$

$$m_{\min} = 2,5V + 275 \rightarrow \left(\frac{1}{m} \right)_{\max} = \frac{1}{2,5V + 275} \text{ για } V \leq 50 \text{ km/h}$$

Για το μήκος του πρανούς υπερύψωσης προκύπτουν οι εξής μέγιστες και ελάχιστες τιμές:

[8].

Μέγιστες τιμές: [8]

$$l_{\max} = 0,08V^3 / R \text{ για } V \geq 40 \text{ km/h}$$

$$l_{\max} = (0.02V^3 + 2.40V^2) / R \text{ για } V \leq 40 \text{ km/h}$$

Ελάχιστες τιμές:

$$l_{\min} = 0.008 \frac{V}{R} (11.8V^2 - 100R) \text{ για } V \geq 50 \text{ km/h}$$

$$l_{\min} = \frac{0.0025V + 0.275}{R} (11.8V^2 - 100R) \text{ για } V \leq 50 \text{ km/h}$$

όπου $l_r(m), V(km/h), R(m)$.

3.1.1.2 Το τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας

Σε αντιστοιχία με το πρανές υπερύψωσης έχει καθοριστεί και το γεωμετρικό σχήμα του τόξου συναρμογής. Έτσι, στο ευθύγραμμο πρανές αντιστοιχεί ένα τόξο συναρμογής ίδιου μήκους, του οποίου η καμπυλότητα $K = \frac{1}{R}$ μεταβάλλεται με τρόπο ίδιο με την μεταβολή της υπερύψωσης. Η μεταβολή της καμπυλότητας λοιπόν πραγματοποιείται με τρόπο γραμμικό από την αρχή UA του τόξου συναρμογής μέχρι το τέλος του UE.

Όσον αφορά το τινάγμα C εστώ ότι κρατάμε την τιμή του τινάγματος στα 0.5 m/sec^3 , που είναι μία τιμή ικανοποιητική για την άνεση των επιβατών. Έτσι προκύπτει άλλος ένας περιορισμός για το μήκος του τόξου συναρμογής- οι άλλοι δύο ταυτίζονται με τους περιορισμούς για το μήκος του πρανούς υπερύψωσης, μια και τα δύο αυτά μήκη συμπίπτουν. Έτσι: $l_{\min} = \frac{V^3}{23.4R} - 3.63V \cdot u$.

Ο παραπάνω περιορισμός μπορεί να είναι καθοριστικός ή αλλιώς να δίνει μεγάλες τιμές για το $l_{\min}$ σε σχέση με τους άλλους δύο περιορισμούς μόνο σε υψηλή πλευρική επιτάχυνση σε συνδυασμό με ελάχιστη υπερύψωση . [9]

Έτσι, το μήκος του τόξου συναρμογής περιορίζεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$l_{\min} = \max \begin{cases} 400 \cdot u \dots\dots\dots V < 50 \text{ km/h} \\ 8V \cdot u \dots\dots\dots V > 50 \text{ km/h} \\ \frac{V^3}{23.4R} - 3.63V \cdot u \\ 4 \cdot \max V \cdot \Delta u_F \end{cases}$$

Όπως είδαμε για την καμπυλότητα εντός του τόξου συναρμογής η εξίσωση

$$k_x = k \cdot \frac{x}{l_u} = \frac{x}{l_u \cdot R}.$$

Στη συνέχεια θα προσδιοριστούν οι εξισώσεις της κυβικής παραβολής που χρησιμοποιούμε για το τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας. [9]

Ο ορισμός της καμπυλότητας είναι $k_x = \frac{d\phi}{dx}$, όπου ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθυγραμμία με την κοινή εφαπτομένη τόξου συναρμογής και κυκλικού τόξου στο κοινό τους σημείο. Όμως, όπως είδαμε η καμπυλότητα k_x είναι συνάρτηση του x , οπότε η

προηγούμενη σχέση γίνεται $d\phi = \frac{x}{l_u \cdot R} dx$.

Ολοκληρώνοντας, προκύπτει $\phi_x = \frac{x^2}{2l_u \cdot R}$.

Στο τέλος του πρανούς ($x = l_u$) είναι $\phi_x = \frac{l_u}{(2R)}$

Ισχύει επίσης $dy = \phi_x \cdot dx \Leftrightarrow dy = \frac{x^2}{2l_u \cdot R} dx$ και με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης

προκύπτει η εξίσωση του τόξου συναρμογής: $y_x = \frac{x^3}{6l_u \cdot R}$.

Η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση του τόξου κυβικής παραβολής.

Στο τέλος του πρανούς ($x = l_u$) είναι $y_x = \frac{l_u^2}{(6R)}$

Η εκτροπή του κυκλικού τόξου υπολογίστηκε: $f = \frac{l_u^2}{24R}$ σε σχέση με την ευθυγραμμία.

Τέλος, η τεταγμένη του τόξου συναρμογής στο UM είναι: $y_{l_u/2} = \frac{\frac{l_u^3}{8}}{6l_u \cdot R} = \frac{l_u^2}{48R} = f/2$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στη συνέχεια θα δούμε περιληπτικά πως υπολογίζεται ένα τόξο κλωθοειδούς στους Γερμανικούς κανονισμούς.

Από την σχέση $k_x = k \cdot \frac{x}{l_u} = \frac{x}{l_u \cdot R}$ προκύπτει $r_x \cdot l_x = r \cdot l_u$.

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι το γινόμενο της ακτίνας με το μήκος του τόξου είναι σταθερό. Ακριβώς αυτή την ιδιότητα έχει η κλωθοειδής. Είναι ένα σπινάλ, που το μήκος του μικραίνει αυξανομένης της ακτίνας.

Για τον προσδιορισμό των ζητούμενων εξισώσεων χρησιμοποιείται η διαφορική εξίσωση: $dl = r \cdot d\tau$ απ' όπου με ολοκλήρωση προκύπτει $\tau = \frac{l}{2 \cdot r}$.

Οι συντεταγμένες σε κάθε σημείο του τόξου κλωθοειδούς δίνονται σε συνάρτηση με την γωνία τ από τους τύπους

$$x = l \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{21,6} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{43,333} \right) \right) \right)$$

$$y = \frac{l \cdot \tau}{3} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{14} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{31,429} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{57,27} \right) \right) \right)$$

Αν σ' αυτές τις εξισώσεις τεθεί $l = l_u$ προκύπτουν οι συντεταγμένες του U_E (x_{UE} και y_{UE}). Έχει θεωρηθεί ότι το σημείο U_A της αρχής του τόξου συναρμογής βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $x-y$, δηλαδή οι συντεταγμένες του είναι μηδενικές.

Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα ισχύουν οι σχέσεις:

$$x_M = x_{UE} - (JUE). \text{ Όμως } (JUE) = r \cdot \sin \tau \text{ άρα } x_M = x_{UE} - r \cdot \sin \tau$$

$$\text{Επίσης } y_M = y_{UE} + (OJ). \text{ Όμως } (OJ) = r \cdot \cos \tau \text{ άρα } y_M = y_{UE} + r \cdot \cos \tau$$

Για το TS: $x_{TS} = x_{UE} - (TSB)$. Όμως $(TSB) = \frac{y_{UE}}{\tan \tau}$ οπότε $x_{TS} = x_{UE} - \frac{y_{\Theta B}}{\tan \tau}$

και $y_{TS} = 0$

Συναρμογή δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων

Όταν πρέπει να τοποθετηθεί ένα τόξο συναρμογής ανάμεσα σε δύο ομόρροπα κυκλικά τόξα ($r_1 > r_2$), υπολογίζεται το μήκος του τόξου συναρμογής από την διαφορά της υπερύψωσης: $l_u = l_{UE} - l_{UA}$

Η καμπυλότητα στο UA σ' αυτήν την περίπτωση δεν είναι μηδέν ($k \neq 0$).

Στη συνέχεια υπολογίζονται τα μήκη:

$$l_{UA} = \frac{r_2 \cdot l_u}{r_1 - r_2}$$

$$l_{UE} = \frac{r_1 \cdot l_u}{r_1 - r_2}$$

Οι γωνίες:

$$\tau = \tau_{UE} - \tau_{UA}$$

$$\tau = \frac{l_u}{2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2}$$

$$\tau_{UA} = \frac{l_u}{2} \cdot \frac{r_2}{r_1 \cdot (r_1 - r_2)}$$

$$\tau_{UE} = \frac{l_u}{2} \cdot \frac{r_1}{r_2 \cdot (r_1 - r_2)}$$

Οι συντεταγμένες στο σύστημα ξ-η των σημείων αρχής και τέλους UA και UE:

$$\xi_{UA} = \frac{l_{UA} \cdot \tau_{UA}}{3} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{14} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{31.429} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{57.27} \right) \right) \right)$$

$$\eta_{UA} = l_{UA} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{10} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{21,6} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UA}^2}{43,333} \right) \right) \right)$$

$$\xi_{UE} = \frac{l_{UE} \cdot \tau_{UE}}{3} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{14} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{31.429} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{57.27} \right) \right) \right)$$

$$\eta_{UE} = l_{UE} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{10} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{21,6} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{UE}^2}{43,333} \right) \right) \right)$$

Και τέλος οι συντεταγμένες του UE στο σύστημα x-y:

$$x_{UE} = (\eta_{UE} - \eta_{UA}) \cdot \sin \tau_{UA} + (\xi_{UE} - \xi_{UA}) \cdot \cos \tau_{UA}$$

$$y_{UE} = (\eta_{UE} - \eta_{UA}) \cdot \cos \tau_{UA} + (\xi_{UE} - \xi_{UA}) \cdot \sin \tau_{UA}$$

$$x_{UA} = y_{UA} = 0$$

3.1.2 Αύξηση της υπερύψωσης με την μορφή τετραγωνικής παραβολής

3.1.2.1 Το π-πρανές υπερύψωσης με αύξηση της υπερύψωσης με την μορφή τετραγωνικής παραβολής (p-πρανές).

Το p-πρανές καθορίζεται μέσω του μήκους του l_p και της υπερύψωσης u στο τέλος του πρανούς. Η υπερύψωση u_M στο μέσον του πρανούς είναι $u_M = \frac{u}{2}$. Η κλίση του πρανούς

αυξάνεται γραμμικά από την αρχή RA μέχρι το μέσον RM του πρανούς κατά την ποσότητα $\frac{1}{m_p} = \frac{2u}{l_p}$.

Στο μέσον λοιπόν RM του πρανούς, η κλίση έχει την τιμή $\frac{1}{m_p} = \frac{2u}{l_p}$ ή $m_p = \frac{l_p}{2u} = 0.5 \frac{l_p}{u}$

Η υπερύψωση υπολογίζεται στο πρώτο ήμισυ του πρανούς ως $u_x = \frac{2 \cdot \Delta u \cdot x^2}{l_R^2}$.

ενώ στο δεύτερο ήμισυ του πρανούς η υπερύψωση υπολογίζεται από τον τύπο

$$u_x = \Delta u - \frac{2 \cdot \Delta u \cdot (l_R - x)^2}{l_R^2}$$

Οι οριακές τιμές της κλίσης του πρανούς προκύπτουν:

- Κατασκευαστικά: Για την μέγιστη κλίση του πρανούς ισχύει, όπως και για το ευθύγραμμο πρανές, ο περιορισμός της εξίσωσης $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$, απ' όπου προκύπτει $I_{\min} = 800 \cdot \Delta u$.

Ωστόσο το όριο που εξαρτάται από την ταχύτητα φτάνει στο $\tan \alpha = 1 : m < \frac{1}{4V_{\max}}$

απ' όπου προκύπτει $I_{\min} = 8 \cdot \max V \cdot \Delta u$.

- Επίσης, από την μέγιστη τιμή του τινάγματος C προκύπτει

$$(I_p)_{\min} = \frac{V^3}{11.7R} - 7.26V \cdot u$$

- Τέλος, όπως είδαμε, προκύπτει άλλο ένα όριο από τον περιορισμό για την αύξηση της ανεπάρκειας της υπερύψωσης

$$I_{\min} = \alpha \cdot \max V \cdot \Delta u_F \cdot [7]$$

με $\alpha=4$ για γραμμική αύξηση της καμπυλότητας, δηλαδή

$$I_{\min} = 4 \cdot \max V \cdot \Delta u_F$$

$$\text{Έτσι συνολικά: } I_{\min} = \max \begin{cases} 800 \cdot u \\ 8V \cdot u \\ \frac{V^3}{11.7R} - 7.26V \cdot u \\ 6 \cdot \max V \cdot \Delta u_F \end{cases}$$

Σημείωση: Στη συνέχεια παρατίθενται κάποιες μέγιστες και ελάχιστες τιμές που αναφέρονται στο εγχειρίδιο [8] της γερμανικής βιβλιογραφίας. Οι μέγιστες και ελάχιστες αυτές τιμές κατηγοριοποιούνται με βάση την ταχύτητα. Οι τιμές που αναφέρονται για ταχύτητες μεγαλύτερες από 100km/h συμπίπτουν με τα όρια που παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Όσον αφορά τις τιμές για ταχύτητες μικρότερες των 100km/h παρατίθενται ενημερωτικά, εφόσον ταχύτητες μικρότερες των 100km/h είναι

εν γένει πολύ μικρές για την εφαρμογή μη-γραμμικών πρανών και δεν αφορούν αυτήν την εργασία.

Ελάχιστες τιμές: [8]

$$m_{M_{\max}} = 5V \rightarrow \left(\frac{1}{m_M} \right)_{\min} = \frac{1}{5V} \quad \text{για } V \geq 100 \text{ km/h}$$

$$m_{M_{\max}} = 2V + 300 \rightarrow \left(\frac{1}{m_M} \right)_{\min} = \frac{1}{2V + 300} \quad \text{για } V \leq 100 \text{ km/h}$$

(Ο δείκτης M δείχνει το κέντρο του πρανούς).

Μέγιστες τιμές: [8]

$$m_{M_{\min}} = 4V \rightarrow \left(\frac{1}{m_M} \right)_{\max} = \frac{1}{4V} \quad \text{για } V \geq 100 \text{ km/h}$$

$$m_{M_{\min}} = 1,25V + 275 \rightarrow \left(\frac{1}{m_M} \right)_{\max} = \frac{1}{1,25V + 275} \quad \text{για } V \leq 100 \text{ km/h}$$

Υπολογίζονται στη συνέχεια οι μέγιστες τιμές του μήκους $l_{\max}$ του πρανούς :

Μέγιστες τιμές :

$$\text{Για } V \geq 100 \text{ km/h είναι } l_{\max} = 0,08 \frac{V^3}{R}$$

$$\text{Για } V \leq 100 \text{ km/h είναι } l_{\max} = \frac{0,032V^3 + 4,8V^2}{R}$$

Ελάχιστες τιμές:

$$\text{Για } V \geq 100 \text{ km/h είναι } l_{\min} = \frac{0,008V}{R} (11,8V^2 - 100R)$$

$$\text{Για } V \leq 100 \text{ km/h είναι } l_{\min} = \frac{0,0025V + 0,55}{R} (11,8V^2 - 100R)$$

3.1.2.2 Το τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής

Η μεταβολή της υπερύψωσης με την μορφή τετραγωνικής παραβολής στο p -πρανές δίνεται από τον τύπο $u_p = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x^2$. Εφόσον η μεταβολή της καμπυλότητας είναι ίδια με

αυτήν της υπερύψωσης, η μεταβολή της καμπυλότητας θα υπακούει στον τύπο

$k_p = \frac{2k}{l_p^2} \cdot x^2$, ενώ η κλίση του διαγράμματος της καμπυλότητας στο μέσον του θα είναι $\frac{1}{m} = \frac{2k}{l_p}$. [9] Αν υποτεθεί ότι ϕ είναι η γωνία του αντίστοιχου τόξου συναρμογής με τον

οριζόντιο άξονα σε κάθε σημείο, τότε ο ορισμός της καμπυλότητας είναι $k = \frac{d\phi}{dx}$ και με

την βοήθεια της $k_p = \frac{2k}{l_p^2} \cdot x^2$ προκύπτει: $\phi = \frac{2}{3l_p^2 \cdot R} \cdot x^3$

Για $x = l_p$ η γωνία ϕ γίνεται $\phi = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_p}{R}$

Όμως $\phi = \frac{dy}{dx}$ οπότε με την βοήθεια της προηγούμενης σχέσης και με ολοκλήρωση

προκύπτει: $y = \frac{x^4}{6l_p^2 \cdot R}$. Για $x = l_p$ η τεταγμένη του τόξου συναρμογής είναι $y = \frac{l_p^2}{6R}$.

Κατά την εφαρμογή του τόξου συναρμογής με παραβολική αύξηση της καμπυλότητας η

εκτροπή f του κυκλικού τόξου είναι $f_p = \frac{l_p^2}{48R} = 0.02083 \frac{l_p^2}{R}$ [9]

Είναι η μισή σε σχέση με την εκτροπή του κυκλικού τόξου στο τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας, ενώ η διαφορά των εκτροπών των δύο αυτών διαφορετικών μορφών τόξων συναρμογής δεδομένου ίδιου μήκους συναρμογής ($l_p = l$)

είναι:

Ο υπολογισμός του τόξου συναρμογής που αναλύεται εδώ μπορεί να γίνει και με την βοήθεια ανάπτυξης σειρών. Στην περίπτωση αυτή ο υπολογισμός πρέπει να γίνει σε δύο βήματα. Επιπλέον υποδιαιρείται η γραμμή της καμπύλης σε δύο περιοχές: [7]

Παρακάτω παρατίθεται ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του τόξου με ανάπτυξη σειρών.

Περιοχή 1: Από το UA μέχρι το UM Το μήκος του τόξου είναι $l_u/2$. Αυτά τα μεγέθη έχουν τον δείκτη x.

Περιοχή 2: Από το UM μέχρι το UE. Το μήκος αυτού του τόξου είναι $l_u/2$. Χρησιμοποιείται ο δείκτης z.

Έτσι υπολογίζεται στην περιοχή 1: $\tau = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_x^3}{r \cdot l_u^2}$.

Οπότε η αλλαγή κατεύθυνσης από το UA στο UM προκύπτει για $l_x = l_u/2$ και είναι:

$$\tau_{x_{UM}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{l_u^3}{8}}{r \cdot l_u^2} \Leftrightarrow \tau_{x_{UM}} = \frac{l_u}{12r}$$

Οι συντεταγμένες του τόξου στην περιοχή 1 θα δίνονται από τους τύπους:

$$x = l_x \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{14} \left(1 - \frac{\tau_x^2}{22.286} \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{39.23}\right)\right)\right) \text{ και}$$

$$y = l_x \cdot \frac{\tau_x}{4} \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{15} \left(1 - \frac{\tau_x^2}{32} \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{57.75}\right)\right)\right).$$

Αν σ' αυτές τις εξισώσεις τεθεί και $l_x = l_u/2$ και $\tau = \tau_{x_{UM}}$, υπολογίζονται οι συντεταγμένες του UM (x_{UM} και y_{UM}).

Αντίστοιχα, στην περιοχή 2 ισχύει για την γραμμή της καμπύλης:

$$k_z = k - \frac{2 \cdot l_z^2}{r \cdot l_u^2} \text{ απ' όπου με ολοκλήρωση προκύπτει: } \tau_z = \frac{l_z}{r} - \frac{2}{3} \cdot \frac{l_z^3}{r \cdot l_u^2} \text{ για την γωνία}$$

αλλαγής κατεύθυνσης.

Έτσι καθορίζεται ως $\tau_{z_{UM}} = \frac{5}{12} \cdot \frac{l_u}{r}$ η συνολική μεταβολή κατεύθυνσης μεταξύ UM και UE αν όπου l_z αντικατασταθεί $l_u/2$.

Προσθέτοντας το $\tau_{x_{UM}}$ και το $\tau_{z_{UM}}$ προκύπτει η συνολική μεταβολή κατεύθυνσης μεταξύ

$$U_A \text{ και } U_E: \tau_{UE} = \frac{l_u}{12r} + \frac{5l_u}{12r} = \frac{6l_u}{12r} = \frac{l_u}{2r}$$

Είναι ακριβώς τόσο μεγάλη όσο και στην κλωθοειδή.

Για τον υπολογισμό των συντεταγμένων στην περιοχή 2 πρέπει να εισαχθεί ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων ξ - η με αρχή το U_E . Έτσι προκύπτει

$$\xi = l_z \cdot \left(1 - \frac{\tau_z}{6} \cdot \left(\frac{8}{15} \cdot \frac{l_z^3}{r \cdot l_u^2} + \tau_z \cdot \left(1 - \frac{\tau_z}{20} \cdot \left(\tau_z - \frac{4 \cdot l_z^3}{105 \cdot r \cdot l_u^2} \right) \right) \right) \right)$$

$$\eta = \frac{l_z}{2} \cdot \left(\frac{l_z^3}{3 \cdot r \cdot l_u^2} + \tau_z \cdot \left(1 - \frac{\tau_z \cdot l_z}{12 \cdot r} - \frac{l_z^6}{54 \cdot r \cdot l_u^4} \right) \right)$$

Αν σ' αυτές τις εξισώσεις τεθεί $l_z = \frac{l_u}{2}$ και $\tau_z = \tau_{z_{UM}}$, προκύπτουν οι συντεταγμένες ξ_{UM} και η_{UM} . Τότε είναι δυνατή η μεταφορά στο σύστημα x - y : [7]

$$x_{UE} = x_{UM} + \xi_{UM} \cdot \cos \tau_{UE} + \eta_{UM} \cdot \sin \tau_{UE}$$

$$y_{UE} = y_{UM} + \xi_{UM} \cdot \sin \tau_{UE} + \eta_{UM} \cdot \cos \tau_{UE}$$

$$\text{και } x_{UA} = y_{UA} = 0$$

Η ίδια ανάλυση με παραπάνω γίνεται στο αντίστοιχο κεφάλαιο και στην περίπτωση τόξου συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής ανάμεσα σε δύο ομόρροπα κυκλικά τόξα.

3.1.3 Το πρανές υπερύψωσης και το τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής [8]– Το πρανές υπερύψωσης και το τόξο συναρμογής Bloss

3.1.3.1 Το πρανές υπερύψωσης Bloss

Το πρανές υπερύψωσης με αύξηση της υπερύψωσης με την μορφή κυβικής παραβολής ή Bloss αποτελείται από μια παραβολή 3^{ου} βαθμού. Η αύξηση της υπερύψωσης από την αρχή RA του πρανούς μέχρι το τέλος του RE δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$u_b = \left(\frac{3}{l_b^2} \cdot x^2 - \frac{2}{l_b^2} \cdot x^3 \right) \cdot u$$

Η μορφή του πρανούς Bloss είναι αντισυμμετρική ως προς το μέσον του, όπως άλλωστε και στα δύο προηγούμενα πρανή που εξετάσαμε.

Για την υπερύψωση στο μέσον του πρανούς ισχύει κι εδώ $u_M = \frac{u}{2}$. Η κλίση του πρανούς-

b στο μέσον του RM- δηλαδή η μέγιστη κλίση- είναι $\frac{1}{m_b} = \frac{3u}{2l_b} = 1.5 \frac{u}{l_b}$.

Από την μέγιστη κατασκευαστική τιμή για τις κλίσεις $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$ προκύπτει $(l_s)_{\min} = 600u$.

Από το δυναμικό όριο για τις κλίσεις των πρανών $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{4V}$ προκύπτει $(l_s)_{\min} = 6V \cdot u$.

Δηλαδή, για το μήκος του πρανούς ισχύουν οι περιορισμοί:

$$(l_s)_{\min} = \max(600u, 6V \cdot u)$$

Τέλος, αν θεωρηθεί ότι η τιμή του τινάγματος είναι $C_{\max} = 0.50 \text{ m/sec}^3$, ώστε να

διασφαλίζεται η άνεση των επιβατών, προκύπτει το όριο $(l_s)_{\min} = \frac{V^3}{15.6R} - 5.447V \cdot u$.

$$\text{Άρα συνολικά: } (l_s)_{\min} = \begin{cases} 600 \cdot u \\ 6V \cdot u \\ \frac{V^3}{15.6R} - 5.447V \cdot u \end{cases}$$

3.1.3.2 Το τόξο συναρμογής Bloss (με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής)

Η εξίσωση που περιγράφει την αύξηση της υπερύψωσης με την μορφή κυβικής παραβολής σε ένα πρηνές υπερύψωσης είναι: $u_{x_2} = u_1 \cdot \left(3x^2/l^2 - 2x^3/l^3 \right)$ ή $\frac{u_x}{u} = \frac{3x^2}{l_u^2} - \frac{2x^3}{l_u^3}$. [8]

Όμοια και η μεταβολή της καμπυλότητας θα είναι $k_x = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{3x^2}{l_u^2} - \frac{2x^3}{l_u^3} \right)$.

Κατά τα γνωστά ισχύει $k_x = \frac{d\phi}{dx}$ οπότε, με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης

προκύπτει η γωνία ϕ : $\phi_x = \frac{1}{R} \left(\frac{x^3}{l_u^2} - \frac{x^4}{2l_u^3} \right)$

Στο τέλος του τόξου συναρμογής ($x = l_u$): $\phi_{l_u} = \frac{l}{2R}$.

Στο μέσον UM ($x = l_u/2$) του τόξου συναρμογής: $\phi_{l_u/2} = \frac{3l}{32R}$.

Επίσης ισχύει $\phi_x = \frac{dy}{dx}$ οπότε με ολοκλήρωση της σχέσης αυτής προκύπτει η εξίσωση

του τόξου συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής:

$$y_x = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{x^4}{4l_u^2} - \frac{x^5}{10l_u^3} \right)$$

Για το τέλος του τόξου συναρμογής ($x = l_u$): $y_{l_u} = \frac{3l_u^2}{20R} = 0.15 \frac{l_u^2}{R}$

Στο μέσον UM ($x = l_u/2$) του τόξου συναρμογής προκύπτει:

$$y_{l_u} = \frac{4l_u^2}{320R} = 0.0125 \frac{l_u^2}{R}$$

Σημείωση: Διαπιστώσαμε ότι για αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή μιας κυβικής παραβολής, το τόξο συναρμογής που προκύπτει είναι 5^{ου} βαθμού.

Τέλος, η εκτροπή του κυκλικού τόξου είναι $f = \frac{I_u^2}{40R} = 0.025 \frac{I_u^2}{R}$

Συμπέρασμα: Η παραβολή 5ου βαθμού (αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής) λοιπόν απαιτεί σε σχέση με την κυβική παραβολή ίδιου μήκους (γραμμική αύξηση της καμπυλότητας), μια κατά $\frac{24}{40} = 0.60$ φορές μικρότερη εκτροπή f .

3.1.4 Το πρανές υπερύψωσης και το τόξο συναρμογής Sinus

Η αύξηση της υπερύψωσης από την αρχή RA μέχρι το τέλος του πρανούς RE υπακούει στον τύπο (ή αλλιώς για κάθε σημείο στο εσωτερικό του πρανούς που απέχει απόσταση x από την αρχή, η υπερύψωση είναι: $u_s = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{l_s} \cdot x\right) \right] \cdot \frac{u}{2}$ ενώ η μεταβολή της καμπυλότητας στ τόξο συναρμογής Sinus είναι: $k_s = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{l_s} \cdot x\right) \right] \cdot \frac{k}{2}$

Όπως και το p -πρανές, έτσι και το s -πρανές είναι αντισυμμετρικό ως προς το μέσον του RM, ενώ αναλόγως ισχύει η εξίσωση $u_m = \frac{u}{2}$.

Η κλίση του s -πρανούς στο μέσον RM σύμφωνα με το σχήμα είναι:

$$\frac{1}{m_s} = \frac{\frac{u}{2}}{\frac{0.63662}{2} l_s} \Leftrightarrow \frac{1}{m_s} = \frac{1.5708u}{l_s}$$

Από την μέγιστη κατασκευαστική τιμή για τις κλίσεις $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$ προκύπτει $(l_s)_{\min} = 628.32u$

Από το δυναμικό όριο για τις κλίσεις των πρανών $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{4V}$ προκύπτει $(l_s)_{\min} = 6.2832V \cdot u$

Δηλαδή, για το μήκος του πρανούς ισχύουν οι περιορισμοί:

$$(l_s)_{\min} = \max(628.32u, 6.2832V \cdot u)$$

Τέλος, η εκτροπή f του κυκλικού τόξου κατά την εφαρμογή του τόξου συναρμογής που

αντιστοιχεί στο πρανές που μελετάμε είναι $f_s = \frac{l_s^2}{42.232R} = 0.02368 \frac{l_s^2}{R}$.

3.1.5 Πίνακες για τις κλίσεις των πρανών και τα μήκη των τόξων συναρμογής για τους Γερμανούς.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1.5.1

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΜΕΓΙΣΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΚΛΙΣΗΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΟΥ ΠΡΑΝΟΥΣ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ

	$i_{\max} = \frac{1}{m}$		$L_{\min}$	
	Ευθύγραμμο πρανές	p-πρανές	Ευθύγραμμο πρανές	p-πρανές
Δυναμικά όρια συναρτήσεως της ταχύτητας -ειδική περίπτωση	$i_{\max} = \frac{1}{m} = \frac{1}{8V_{\max}}$	$i_{\max} = \frac{1}{m} = \frac{1}{4V_{\max}}$	$L_{\min} = 8V_{\max} \cdot \Delta u$	$L_{\min} = 8V_{\max} \cdot \Delta u$
Κατασκευαστικό όριο	$i_{\max} = \frac{1}{m} = \frac{1}{400}$	$i_{\max} = \frac{1}{m} = \frac{1}{400}$	$L_{\min} = 400 \cdot \Delta u$ σε mm ή $L_{\min} = 0.4 \cdot \Delta u$ σε m	$L_{\min} = 800 \cdot \Delta u$ σε mm ή $L_{\min} = 0.8 \cdot \Delta u$ σε m
Κατασκευαστικό όριο-ειδική περίπτωση	$i_{\max} = \frac{1}{m} = \frac{1}{600}$	$i_{\max} = \frac{1}{m} = \frac{1}{600}$	$L_{\min} = 600 \cdot \Delta u$ σε mm ή $L_{\min} = 0.6 \cdot \Delta u$ σε m	$L_{\min} = 1200 \cdot \Delta u$ σε mm ή $L_{\min} = 1.20 \cdot \Delta u$ σε m
Λόγω του ρυθμού μεταβολής της ανεπάρκειας υπερύψωσης			$L_{\min} = 4 \cdot \max V \cdot \Delta u_F$ υF: ανεπάρκεια υπερύψωσης	$L_{\min} = 6 \cdot \max V \cdot \Delta u_F$ υF: ανεπάρκεια υπερύψωσης
Τίναγμα $C_{\max}$			$l_{\min} = \frac{V^3}{23.4R} - 3.63V \cdot u$	$(l_p)_{\min} = \frac{V^3}{11.7R} - 7.26V \cdot u$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1.5.2

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΑ ΟΡΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΚΛΙΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΝΩΝ ΥΠΕΡΥΨΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΞΩΝ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ

	Ευθύγραμμο πρανές	(p-πρανές)
l	$l = mu/1000$	$l = m_M u/500$
Μέγιστη κλίση $l_{\max}$	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{8V} \quad V \geq 50 \text{ km/h}$ $\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{2.5V + 275} \quad \text{για } V \leq 50 \text{ km/h}$	$\left(\frac{1}{m_M}\right)_{\max} = \frac{1}{4V} \quad \text{για } V \geq 100 \text{ km/h}$ $\left(\frac{1}{m_M}\right)_{\max} = \frac{1}{1.25V + 275} \quad \text{για } V \leq 100 \text{ km/h}$
Ελάχιστο μήκος $l_{\min}$	$l_{\min} = 0.008 \frac{V}{R} (11.8V^2 - 100R) \quad \text{για } V \geq 50 \text{ km/h}$ $l_{\min} = \frac{0.0025V + 0.275}{R} (11.8V^2 - 100R) \quad \text{για } V \leq 50 \text{ km/h}$	$l_{\min} = \frac{0.008V}{R} (11.8V^2 - 100R) \quad \text{για } V \geq 100 \text{ km/h}$ $l_{\min} = \frac{0.0025V + 0.55}{R} (11.8V^2 - 100R) \quad \text{για } V \leq 100 \text{ km/h}$
Ελάχιστη κλίση $l_{\min}$	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\min} = \frac{1}{10V} \quad \text{για } V \geq 40 \text{ km/h}$ $\left(\frac{1}{m}\right)_{\min} = \frac{1}{2.5V + 300} \quad \text{για } V \leq 40 \text{ km/h}$	$\left(\frac{1}{m_M}\right)_{\min} = \frac{1}{5V} \quad \text{για } V \geq 100 \text{ km/h}$ $\left(\frac{1}{m_M}\right)_{\min} = \frac{1}{2V + 300} \quad \text{για } V \leq 100 \text{ km/h}$
Μέγιστο μήκος $l_{\max}$	$l_{\max} = 0.08V^3/R \quad \text{για } V \geq 40 \text{ km/h}$ $l_{\max} = (0.02V^3 + 2.40V^2)/R \quad \text{για } V \leq 40 \text{ km/h}$	$l_{\max} = 0.08 \frac{V^3}{R} \quad \text{για } V \geq 100 \text{ km/h}$ $l_{\max} = \frac{0.032V^3 + 4.8V^2}{R} \quad \text{για } V \leq 100 \text{ km/h}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1.5.3

Γεωργοπούλου Ναταλία

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΟΡΙΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΚΛΙΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΝΩΝ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ ΣΤΟ Ρ-Σ-Β ΠΡΑΝΕΣ

	u	u_M	$\left(\frac{1}{m}\right)$	m
Ευθύγραμμο πρανές	$u_x = \frac{u}{l} \cdot x$	$u_M = \frac{u}{2}$	$\frac{1}{m} = \frac{u}{l}$	$m = \frac{l}{u}$
ρ-πρανές	$u_p = \frac{2u}{l_p^2} \cdot x^2$ $u_p = u - \frac{2u}{l_p^2} \cdot (x - l_p)^2$	$u_M = \frac{u}{2}$	$\frac{1}{m_p} = \frac{2u}{l_p}$	$m_p = \frac{l_p}{2u} = 0.5 \frac{l_p}{u}$
Sinus πρανές	$u_s = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{l_s} \cdot x\right)\right] \cdot \frac{u}{2}$	$u_M = \frac{u}{2}$	$\frac{1}{m_s} = \frac{1.5708u}{l_s}$	$m_s = 0.63662 \frac{l_s}{u}$
Bloss πρανές	$u_b = \left(\frac{3}{l_b^2} \cdot x^2 - \frac{2}{l_b^2} \cdot x^3\right) \cdot u$	$u_M = \frac{u}{2}$	$\frac{1}{m_b} = 1.5 \frac{u}{l_b}$	$m_b = 0.66667 \frac{l_b}{u}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1.5.4

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΩΝ ΟΡΙΩΝ ΤΗΣ ΚΛΙΣΗΣ ΤΩΝ ΠΡΑΝΩΝ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΑ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΜΗΚΗ ΠΡΑΝΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠ' ΑΥΤΑ

	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max}$ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΟ	$l_{\min}$ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΟ
Ευθύγραμμο πρανές	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$	$(l_p)_{\min} = 400 \cdot u$
ρ-πρανές	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$	$(l_p)_{\min} = 800 \cdot u$
Sinus πρανές	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$	$(l_s)_{\min} = 628.32u$
Bloss πρανές	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{400}$	$(l_b)_{\min} = 600 \cdot u$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1.5.5

Γεωργοπούλου Ναταλία

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΟΡΙΩΝ ΤΗΣ ΚΛΙΣΗΣ ΤΩΝ ΠΡΑΝΩΝ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΑ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΜΗΚΗ ΠΡΑΝΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠ' ΑΥΤΑ

	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max}$ δυναμικό	$l_{\min}$ δυναμικό
Ευθύγραμμο πρανές	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{8 \cdot V}$	$l_{\min} = 8 \cdot V \cdot u$
p-πρανές	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{4V}$	$l_{\min} = 8 \cdot V \cdot u$
Sinus πρανές	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{4V}$	$(l_s)_{\min} = 6.2832V \cdot u$
Bloss πρανές	$\left(\frac{1}{m}\right)_{\max} = \frac{1}{4V}$	$(l_b)_{\min} = 6V \cdot u$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1.5.6

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΗΚΩΝ ΠΡΑΝΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΤΟ MAX ΤΙΝΑΓΜΑ

	$C_{\max}$	$l_{\min}$
Ευθύγραμμο πρανές	$C_{\max} = 0.50m/sec^3$	$l_{\min} = \frac{V^3}{23.4R} - 3.63V \cdot u$
p-πρανές	$C_{\max} = 0.50m/sec^3$	$(l_p)_{\min} = \frac{V^3}{11.7R} - 7.26V \cdot u$
Sinus πρανές	$C_{\max} = 0.50m/sec^3$	
Bloss πρανές	$C_{\max} = 0.50m/sec^3$	$(l_b)_{\min} = \frac{V^3}{15.6R} - 5.447V \cdot u$

3.2 Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ

3.2.1 Ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης

Σ' αυτόν, όπως και στα υπόλοιπα ελληνικά εγχειρίδια της βιβλιογραφίας (Απ.Γιώτη και Β.Προφυλλίδη) γίνεται λόγος μόνο για το ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης. Καλύπτονται οι τρεις περιπτώσεις μετάβασης από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο, μετάβασης από κυκλικό τόξο σε αντίρροπο κυκλικό τόξο και μετάβασης από κυκλικό τόξο σε ομόρροπο κυκλικό τόξο.

Θεσπίζονται επίσης όρια για την κλίση του πρανούς.

- Το πρώτο όριο προκύπτει από τον περιορισμό για τον ρυθμό μεταβολής της υπερύψωσης r_h . Είναι $r_{h_{\max}} = 40\text{mm/sec}$ απ' όπου προκύπτει για την κλίση του πρανούς $i_{\max} = \frac{144}{V_{\max}}(\text{mm/m})$ ή $i_{\max} = \frac{144}{V_{\max}}\%$ ή $i_{\max} = \frac{0.144}{V_{\max}}$ και σε ειδικές περιπτώσεις $r_{h_{\max}} = 60\text{mm/sec}$ απ' όπου προκύπτει για την κλίση του πρανούς $i_{\max} = \frac{216}{V_{\max}}(\text{mm/m})$ ή $i_{\max} = \frac{216}{V_{\max}}\%$ ή $i_{\max} = \frac{0.216}{V_{\max}}\%$.
- Το δεύτερο όριο είναι κατασκευαστικό και επιβάλλει κλίση του πρανούς υπερύψωσης πάντα μικρότερο από 2,5‰, δηλαδή $i_{\max} = 2,5\%$ $= 1/400$ σε κάθε περίπτωση.
- Εκτός από το όριο στο ρυθμό μεταβολής της υπερύψωσης, αναφέρεται αντίστοιχο όριο και για τον ρυθμό μεταβολής της ανεπάρκειας της υπερύψωσης $\mu = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = 60\text{mm/sec}$, $\Delta\alpha$: η μεταβολή της ανεπάρκειας της υπερύψωσης σε χρόνο Δt .

Όσον αφορά το μήκος L του πρανούς υπερύψωσης, αυτό υπολογίζεται με βάση τα τρία παραπάνω όρια που αναφέραμε.

- Για την πιο απλή περίπτωση μετάβασης από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο είναι: (εξετάζονται και οι άλλες δύο περιπτώσεις στις παραγράφους 2.2.2 και 2.2.3).
- Δυναμικό όριο με βάση την ταχύτητα $L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{144}$, από το όριο $i_{\max} = \frac{144}{V_{\max}}(\text{mm/m})$

(ή $L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{216}$, από το όριο $i_{\max} = \frac{216}{V_{\max}} (mm/m)$ σε ειδικές περιπτώσεις)

- $L_{\min} = \frac{h}{2.5}$ από το κατασκευαστικό όριο $i_{\max} = 2,5\% = 1/400$

- $L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{216}$ από το όριο $\mu = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = 60mm/sec$.

- Ακόμα ένας περιορισμός για το μήκος του πρηνούς μπορεί να υπολογιστεί με βάση το μέγιστο ρυθμό αύξησης της πλευρικής επιτάχυνσης. Ο ρυθμός αυτός όπως είδαμε στα προηγούμενα ονομάζεται τινάγμα $C = \frac{db}{dt} (m/s^3)$ και για υπεραστικούς σιδηρόδρομους η μέγιστη τιμή του είναι $C_{\max} = 0.50m/sec^3$ για τους υπεραστικούς σιδηρόδρομους, ενώ ο κανονισμός του ΟΣΕ προβλέπει μέγιστη τιμή πλευρικής επιτάχυνσης ίση με $b_{\max} = 0.7m/sec^2$.

Κατά την μετάβαση από ευθυγραμμία ($b=0$) σε κυκλικό τόξο είναι

$$L_{\min} = 0.3889V_{\max}, V \text{ σε km/h και } L \text{ σε m.}$$

ενώ κατά την μετάβαση από κυκλικό τόξο με b_1 σε κυκλικό τόξο με b_2 :

$$L_{\min} = \frac{(b_2 - b_1) \cdot V_{\max}}{1.80}, V \text{ σε km/h και } L \text{ σε m.}$$

Σε υψηλά επίπεδα εξυπηρέτησης απαιτείται $C_{\max} = 0.33m/sec^3$, οπότε σ' αυτήν την περίπτωση κατά την μετάβαση από την ευθυγραμμία ($b=0$) σε κυκλικό τόξο:

$$L_{\min} = 0.5889V_{\max}, V \text{ σε km/h και } L \text{ σε m.}$$

ενώ κατά την μετάβαση από κυκλικό τόξο με b_1 σε κυκλικό τόξο με b_2 :

$$L_{\min} = \frac{(b_2 - b_1) \cdot V_{\max}}{1.188}, V \text{ σε km/h και } L \text{ σε m.}$$

Τέλος, σε δευτερεύουσες γραμμές είναι $C_{\max} = 0.65m/sec^3$, οπότε σ' αυτήν την περίπτωση κατά την μετάβαση από την ευθυγραμμία ($b=0$): $L_{\min} = 0.299V_{\max}$, V σε

km/h και L σε m, ενώ κατά την μετάβαση από κυκλικό τόξο με b_1 σε κυκλικό τόξο

με b_2 : $L_{\min} = \frac{(b_2 - b_1) \cdot V_{\max}}{2.34}, V \text{ σε km/h και } L \text{ σε m.}$

Τα παραπάνω φαίνονται συγκεντρωμένα στον πίνακα 3.2.1.1. Από τους παραπάνω περιορισμούς χρησιμοποιείται η μεγαλύτερη τιμή για την εκάστοτε περίπτωση-μετάβαση από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο, μετάβαση από κυκλικό τόξο σε ένα άλλο κυκλικό τόξο.

Τέλος, για κάθε σημείο x εντός του πρανούς, υπολογίζεται η υπερύψωση

$$h_x = h_{αρχ} + \frac{\Delta h}{L} \cdot x \text{ όπου } \Delta h = h_{τελ} - h_{αρχ} \text{ και } L \text{ το μήκος του πρανούς υπερύψωσης.}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2.1.1

ΜΕΓΙΣΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΠΡΑΝΩΝ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΩΝ ΤΟΞΩΝ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΥΞΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΚΑΤΑ ΤΟΝ Ν.Κ.Ε.Γ. ΤΟΥ ΟΣΕ

		$i_{\max}$ (mm/m)	$L_{\min}$ (m)	
			Ευθυγραμμία-Κυκλικό τόξο	Κυκλικό τόξο R1-Κυκλικό τόξο R2
ρυθμός μεταβολής υπερύψωσης $i_{h\max}$ (mm/sec)	40	$i_{\max} = \frac{144}{V_{\max}} \% \text{ ή } i_{\max} = \frac{0.144}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{hV_{\max}}{144}$	$L_{\min} = \frac{(h_2 - h_1)V_{\max}}{144}$
	60	$i_{\max} = \frac{216}{V_{\max}} \% \text{ ή } i_{\max} = \frac{0.216}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{hV_{\max}}{216}$	$L_{\min} = \frac{(h_2 - h_1)V_{\max}}{216}$
τίναγμα $C_{\max}$ (m/sec ³)	0.50		$L_{\min} = 0.3889V_{\max}$	$L_{\min} = \frac{(b_2 - b_1) \cdot V_{\max}}{1.80}$
	0.33		$L_{\min} = 0.5889V_{\max}$	$L_{\min} = \frac{(b_2 - b_1) \cdot V_{\max}}{1.188}$
	0.65		$L_{\min} = 0.299V_{\max}$	$L_{\min} = \frac{(b_2 - b_1) \cdot V_{\max}}{2.34}$
$\mu_{\max} = 60 \text{ mm/sec}$ ρυθμός μεταβολής ανεπάρκειας υπερύψωσης			$L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{216}$	$L_{\min} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)V_{\max}}{216}$
κατασκευαστικό		$i_{\max} = \frac{1}{400} = 2.5\%$	$L_{\min} = \frac{h}{2.5} \text{ σε m ή } L_{\min} = 400 \cdot h \text{ σε mm}$	$L_{\min} = \frac{h_2 - h_1}{2.5} \text{ σε m ή } L_{\min} = 400 \cdot (h_2 - h_1) \text{ σε mm}$

3.2.2 Τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας στον Ν.Κ.Ε.Γ.

Στον Ν.Κ.Ε.Γ. σε αντιστοιχία με το ευθύγραμμο πρηνές προτείνεται η χρησιμοποίηση του τόξου συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας. Η απαίτηση της γραμμικής αύξησης της καμπυλότητας θεωρείται από την Ν.Κ.Ε.Γ. ότι ικανοποιείται από την κυβική παραβολή. Ο γενικός της τύπος προκύπτει από την σχέση της γραμμικής αύξησης της καμπυλότητας και της γραμμικής αύξησης της υπερύψωσης. Η μορφή δηλαδή που προτείνεται είναι μια κυβική παραβολή που αντιστοιχεί σε ευθύγραμμο πρηνές υπερύψωσης. Ο γενικός της τύπος είναι $y = \frac{x^3}{6RL} \left(1 + \frac{L^2}{4R^2} \right)^{\frac{3}{2}}$, όπου R η ακτίνα του κυκλικού τόξου, L το μήκος του τόξου συναρμογής που συμπίπτει με το μήκος του αντίστοιχου πρηνούς υπερύψωσης και x η απόσταση τυχαίου σημείου (x,y) από την αρχή του τόξου.

- Μια ειδική κατηγορία τόξων κυβικής παραβολής είναι αυτά μικρού μήκους και συγκεκριμένα αυτά για τα οποία ισχύει $L \leq \frac{R}{3.5}$. Θεωρείται ότι το μήκος του τόξου συναρμογής L είναι ίσο με την προβολή του στον άξονα των x, δηλαδή $L=l$.

Ο όρος $\left(1 + \frac{L^2}{4R^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ θεωρείται ίσος με την μονάδα δεδομένης της παραδοχής

$\frac{L^2}{4R^2} \rightarrow 0$ και ο γενικός τύπος μεταπίπτει στον $y = \frac{x^3}{6RL}$. Με βάση τον τύπο αυτό

και με τη βοήθεια σχέσεων που προκύπτουν από την γεωμετρία της χάραξης, υπολογίζεται η γωνία αλλαγής κατεύθυνσης $\tau = \frac{L}{2R}$ όπως και την εκτροπή

$$f = \frac{L^2}{24R}.$$

- Για τα τόξα μεγάλου μήκους, όπου $L > \frac{R}{3.5}$ χρησιμοποιείται ο γενικός τύπος της

κυβικής παραβολής $y = \frac{x^3}{6RL} \left(1 + \frac{L^2}{4R^2} \right)^{\frac{3}{2}}$, ενώ το μήκος του τόξου συναρμογής L δεν

θεωρείται ίσο με την προβολή του l στον άξονα των x.

Παρακάτω φαίνονται συγκεντρωμένα τα στοιχεία της χάραξης που υπολογίστηκαν στο κεφάλαιο Β, παρ. 3 και για τα μικρά και για τα μεγάλα τόξα, καθώς και οι διαφορές τους:

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2.2.1

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΙΚΡΩΝ ΚΑΙ ΜΕΓΑΛΩΝ ΤΟΞΩΝ ΚΥΒΙΚΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗ ΚΑΤΑ ΤΟΝ Ν.Κ.Ε.Γ. ΤΟΥ ΟΣΕ

	ΤΟΞΑ ΜΕΓΑΛΟΥ ΜΗΚΟΥΣ	ΤΟΞΑ ΜΙΚΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ
Γενικός τύπος	$y = \frac{x^3}{6RL} \left(1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ ή $y = \frac{x^3}{6RL \cos^3 \tau}$	$y = \frac{x^3}{6RL}$
τ γωνία αλλαγής κατεύθυνσης	$\tan \tau = \frac{L}{2R}$	$\tan \tau = \frac{L}{2R}$
l προβολή μήκους τόξου στον άξονα x	$l = L - \frac{L^3}{40R^2}$	L
y_{III} τεταγμένη τέλους συναρμογής	$y_{\text{III}} = \frac{L^2}{6R} \left(1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{\frac{3}{2}}$	$y_{\text{III}} = \frac{L^2}{6R}$
f εκτροπή κυκλικού τόξου	$f = \frac{L^2}{6R} \left(1 + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{\frac{3}{2}} - R(1 - \cos \tau)$	$f = \frac{L^2}{24R}$
Συντεταγμένες κέντρου του κυκλικού τόξου $x_o y_o$	$x_o = x_{\text{III}} - R \sin \tau$ $y_o = y_{\text{III}} + R \cos \tau$	$x_o = x_{\text{III}} - \frac{L}{2}$ $y_o = \frac{L^2}{6R} + R$

Αντίρροπα τόξα:

Στην περίπτωση δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων κατά την συναρμογή παρεμβάλλεται από ένα παραβολικό τόξο συναρμογής προς την μεριά κάθε κυκλικού τόξου και ένα ενδιάμεσο ευθύγραμμο τμήμα μήκους τουλάχιστον 30m. Αν το τελευταίο δεν είναι εφικτό, το ευθύγραμμο τμήμα παραλείπεται και τα δύο τόξα συναρμογής έχουν κοινή αρχή και εφαπτομένη και ίδια μεταβολή της καμπυλότητας.

Ομόρροπα τόξα:

Στην περίπτωση συναρμογής δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων, αν το ενδιαμέσο ευθύγραμμο τμήμα είναι αρκετά μεγάλο ώστε να επαρκεί για δύο κανονικά τόξα συναρμογής, τότε η συναρμογή αποτελείται από δύο παραβολικά τόξα συναρμογής με την ευθυγραμμία, ένα για το κάθε κυκλικό τόξο, και μεσολαβεί το ευθύγραμμο τμήμα που απομένει, εφόσον το τελευταίο είναι μεγαλύτερο από 30m.

Αν το παραπάνω δεν είναι εφικτό, τότε η συναρμογή πραγματοποιείται με ένα μόνο παραβολικό τόξο συναρμογής ως εξής: το κυκλικό τόξο με την μεγαλύτερη υπερύψωση- και άρα με την μικρότερη ακτίνα- ενώνεται με την ευθυγραμμία ή με την νοητή προέκτασή της με παραβολικό τόξο συναρμογής. Το κυκλικό τόξο με την μικρότερη υπερύψωση- και άρα με την μεγαλύτερη ακτίνα- ενώνεται με το παραβολικό τόξο συναρμογής στο σημείο εκείνο στο οποίο συμπίπτουν η υπερύψωση και η καμπυλότητά του με την υπερύψωση και την καμπυλότητα του παραβολικού τόξου.

Για παράδειγμα, πρέπει να ενωθούν δύο ομόρροπα κυκλικά τόξα με $R_1 > R_2$. Αν υποτεθεί

ότι η υπερύψωση που εφαρμόζεται είναι η κανονική, τότε

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R_1} \\ h_2 &= 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R_2} \end{aligned} \right\} \text{κι επειδή}$$

$R_1 > R_2$ ισχύει $h_1 < h_2$.

Το κυκλικό τόξο με την μεγαλύτερη υπερύψωση- και άρα με την μικρότερη ακτίνα- θα ενωθεί με την ενδιαμέση ευθυγραμμία με παραβολικό τόξο συναρμογής που θα αντιστοιχεί σε ευθύγραμμο πραινές με $h_x = h_{\alpha\rho\chi} + \epsilon\phi\beta \cdot x$ κατά τα γνωστά, όπου $\epsilon\phi\beta$ η

κλίση του πραινούς, ίση με $\epsilon\phi\beta = \frac{h_2}{L_2} \rightarrow h_x = h_{\alpha\rho\chi} + \frac{h_2}{L_2} \cdot x$.

Το κυκλικό τόξο μικρότερης υπερύψωσης- δηλαδή μεγαλύτερης ακτίνας- θα ενωθεί με το παραπάνω τόξο συναρμογής στο σημείο $(\Delta l = L_2 \cdot \frac{R_2}{R_1}, h_1)$.

Αντίστοιχα το σημείο του τόξου συναρμογής στο οποίο θα πραγματοποιηθεί η ένωση είναι το $(\Delta l, y_{\Delta l})$:

-Αν πρόκειται για τόξα μικρού μήκους, η τεταγμένη είναι

$$y_{\Delta l} = \frac{(R_2 L_2)^2}{6 R_1^3}$$

-Αν πρόκειται για τόξα μεγάλου μήκους

Γεωργοπούλου Ναταλία

$$y_{\Delta l} = \frac{(R_2 L_2)^2}{6R_1^3} \left(1 + \frac{L_2^2}{4R_2^2} \right)^{3/2}.$$

Τέλος, αν δεν υπάρχει ενδιάμεση ευθυγραμμία, τα κυκλικά τόξα ενώνονται απ' ευθείας με τόξο συναρμογής που διέπεται από δύο εξισώσεις, μία για την πλευρά προς το κυκλικό τόξο ακτίνας R_1 και μία για την πλευρά προς το κυκλικό τόξο ακτίνας R_2 . Οι δύο πλευρές είναι ίσες, δηλαδή το τόξο συναρμογής χωρίζεται σε δύο ίσα τμήματα που διέπονται από διαφορετικές εξισώσεις.

Έτσι, αν τα κυκλικά τόξα έχουν ακτίνες R_1 και R_2 και καμπύλες συναρμογής μήκους L_1 και L_2 , με προβολές l_1 και l_2 και μετατοπίσεις f_1 και f_2 με τις εκατέρωθεν ευθυγραμμίες, η παραβολική συναρμογή θα ορίζεται από τις εξισώσεις:

α. Για την πλευρά προς την καμπύλη με ακτίνα R_1 :

$$y = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{f}{2} - \frac{1}{6l\rho} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{2} - x \right)^3 \right]$$

β. Για την πλευρά προς την καμπύλη με ακτίνα R_2 :

$$y = \frac{x^2}{2R_2} + \frac{f}{2} + \frac{1}{6l\rho} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{2} - x \right)^3 \right]$$

$$\text{όπου } f = f_2 - f_1 = \frac{l_2^2}{24R_2} - \frac{l_1^2}{24R_1}$$

$$\rho = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2}$$

$$l = \sqrt{24\rho f} = \sqrt{24 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} \left(\frac{l_2^2}{24R_2} - \frac{l_1^2}{24R_1} \right)} = \sqrt{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} \left(\frac{l_2^2}{R_2} - \frac{l_1^2}{R_1} \right)} =$$

$$\sqrt{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} \left(\frac{R_1 l_2^2 - R_2 l_1^2}{R_1 \cdot R_2} \right)} \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{R_1 l_2^2 - R_2 l_1^2}{R_1 - R_2}}$$

3.3 Οι βρετανικοί κανονισμοί

3.3.1 Ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης

Επειδή γίνεται λόγος για το πρανές υπερύψωσης σε συνδυασμό με την κυβική παραβολή ως τόξο συναρμογής(γραμμική αύξηση της καμπυλότητας), το πρανές που υπονοείται είναι το ευθύγραμμο (επίσης γραμμική αύξηση της υπερύψωσης).

Αναφέρεται επίσης ότι το μήκος του πρανούς υπερύψωσης-επακόλουθα και του τόξου συναρμογής- υπολογίζεται με βάση κάποια όρια:

- μέγιστος ρυθμός αύξησης της υπερύψωσης τα 55mm/sec, μεγαλύτερος από τα 40mm/sec που προτείνει ο Ν.Κ.Ε.Γ.

Από το ανώτατο αυτό όριο προκύπτει για την κλίση του πρανούς:

$$i_{\max} = \frac{198}{V_{\max}} \% \quad \text{ή} \quad i_{\max} = \frac{0.198}{V_{\max}} . \text{ Μέγιστη κλίση λοιπόν μεγαλύτερη προβλέπουν οι}$$

Βρετανοί απ' ότι ο κανονισμός του ΟΣΕ. Επακόλουθα, η ελάχιστη τιμή για το μήκος του πρανούς προκύπτει από τον παραπάνω περιορισμό:

$$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{198}, \text{ δηλαδή λίγο μικρότερη απ' ότι στον κανονισμό του ΟΣΕ.}$$

- μέγιστος ρυθμός αύξησης της ανεπάρκειας της υπερύψωσης τα 55mm/sec, κατά τι μικρότερος από τα 60mm/sec που προτείνει ο Ν.Κ.Ε.Γ.

Προκύπτει για το μήκος του πρανούς: Από το παραπάνω μέγιστο όριο για την αύξηση της ανεπάρκειας της υπερύψωσης, όπως είδαμε και στον κανονισμό του ΟΣΕ, προκύπτει:

$$L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{198}, \text{ που είναι λίγο μεγαλύτερο από το } L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{216} \text{ που προβλέπει ο}$$

Ν.Κ.Ε.Γ.

- μέγιστη κλίση πρανούς ίση με $\frac{1}{400}$ (κατασκευαστικό όριο). Είναι ίση με την μέγιστη κλίση 2,5‰ που προβλέπεται στον Ν.Κ.Ε.Γ. Από το κατασκευαστικό αυτό όριο προκύπτει για το μήκος του πρανούς:

$$L_{\min} = 400h \text{ σε mm ή } L_{\min} = \frac{h}{2.5} \text{ σε m (συμπίπτει με το κατασκευαστικό όριο για το μήκος του Ν.Κ.Ε.Γ.).}$$
- Δεν αναφέρεται το τίναγμα C, όπως στον Ν.Κ.Ε.Γ. του ΟΣΕ, με αποτέλεσμα αυτό να μην συμμετέχει στον καθορισμό της μέγιστης κλίσης και του ελάχιστου μήκους του πρανούς υπερύψωσης.

Στον πίνακα 3.3.1.1 φαίνονται οι περιορισμοί για την κλίση και το μήκος του πρανούς για την περίπτωση μετάβασης από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο και από κυκλικό τόξο σε ένα άλλο κυκλικό τόξο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.1.1

ΜΕΓΙΣΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΠΡΑΝΩΝ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΩΝ ΤΟΞΩΝ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΥΞΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΥΣ ΒΡΕΤΑΝΙΚΟΥΣ ΚΑΝΟΝΙΣΜΟΥΣ

	$i_{\max}$ (mm/m) ή ‰	$L_{\min}$ (m)	
		Ευθυγραμμία- Κυκλικό τόξο	Κυκλικό τόξο R1- Κυκλικό τόξο R2
$r_{h\max} = 55 \text{ mm/sec}$ ρυθμός μεταβολής της υπερύψωσης	$i_{\max} = \frac{198}{V_{\max}} \text{ ‰ ή}$ $i_{\max} = \frac{0.198}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{hV_{\max}}{198}$	$L_{\min} = \frac{(h_2 - h_1)V_{\max}}{198}$
$\mu_{\max} = 55 \text{ mm/sec}$ ρυθμός μεταβολής της ανεπάρκειας υπερύψωσης		$L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{198}$	$L_{\min} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)V_{\max}}{198}$
ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΟ	$i_{\max} = \frac{1}{400} = 2.5 \text{ ‰}$	$L_{\min} = \frac{h}{2.5} \text{ σε m ή}$ $L_{\min} = 400 \cdot h$ σε mm	$L_{\min} = \frac{h_2 - h_1}{2.5} \text{ σε m ή}$ $L_{\min} = 400 \cdot (h_2 - h_1)$ σε mm

3.3.1.2 Το τόξο συναρμογής

Προτείνεται η κυβική παραβολή ως ευρύτερα χρησιμοποιούμενη. Δεδομένου ότι στο εγχειρίδιο γίνεται λόγος μόνο για ευθύγραμμη πρηνή, πρόκειται για τόξα συναρμογής με ευθύγραμμη αύξηση της καμπυλότητας.

Η εξίσωση στην οποία υπακούει στο εγχειρίδιο αυτό η αύξηση των τεταγμένων της κυβικής παραβολής σε συνάρτηση με τις τιμές των τετμημένων είναι η $y = x^3$.

Με βάση την γεωμετρία της χάραξης της συναρμογής προκύπτει ο γνωστός τύπος για την εκτροπή $S = \frac{L^2}{24R}$ (χωρίς να χρησιμοποιηθεί ο τύπος της κυβικής παραβολής, όπως στον Ν.Κ.Ε.Γ.).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ο τύπος αυτός λοιπόν ισχύει για όλα τα τόξα κυβικής παραβολικής, ανεξάρτητα αν πρόκειται για τόξα μικρού ή μεγάλου μήκους. Αποδεικνύεται επίσης ότι το τόξο συναρμογής διχοτομεί την εκτροπή S .

Αντίρροπα τόξα:

Για την ένωση δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων προτείνεται η απλούστερη λύση της συναρμογής με δύο παραβολικά τόξα–ένα προς κάθε κυκλικό τόξο– με κοινή αρχή και εφαπτομένη.

Ομόρροπα τόξα:

Για την συναρμογή δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων χωρίς ενδιάμεση ευθυγραμμία είναι απαραίτητη η εφαρμογή συναρμογής όταν οι ακτίνες αυτών είναι διαφορετικές, εκτός αν διαφέρουν κατά λιγότερο από 15%. Η προϋπόθεση αυτή της διαφοράς των ακτινών καλύπτει την περίπτωση που μία πολύ μικρή διαφορά στις ακτίνες προκαλεί πολύ μικρή διαφορά και στις υπερυψώσεις, χωρίς έτσι να απαιτείται τόξο συναρμογής.

3.4 American Track Geometry

3.4.1 Το ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης

Κι εδώ δεν αναφέρεται το είδος των πρανών υπερύψωσης που χρησιμοποιούνται. Μπορούμε όμως κι εδώ να υποθεθεί ότι εφόσον το πρανές αυτό παρουσιάζεται σε συνδυασμό με την κυβική παραβολή ως τόξο συναρμογής, πρόκειται για το ευθύγραμμο πρανές (γραμμική αύξηση της καμπυλότητας πάντα σε συνδυασμό με γραμμική αύξηση της υπερύψωσης).

Όσον αφορά το μήκος του πρανούς υπερύψωσης, αυτό υπολογίζεται από τη σχέση

$$L_s = e \cdot \frac{u_{\max}}{r_e}, \text{ όπου } L_s(ft), e(inches), u(miles/h), r_e(inch/sec).$$

Για να γίνει η σύγκριση με τις σχέσεις που δίνουν το μήκος του πρανούς στον Ν.Κ.Ε.Γ. πρέπει να μετατραπούν οι παραπάνω μονάδες μέτρησης ως εξής:

$$L_s(ft) \rightarrow L(m)$$

$$e(inches) \rightarrow h(mm)$$

$$u(miles/h) \rightarrow V(km/h)$$

$$r_e(inch/sec) \rightarrow r_h(mm/sec)$$

Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{L(m)}{3.28} = \frac{12 \cdot 3.28}{1000} h(mm) \cdot \frac{1.609 V_{\max}(km/h)}{r_e(inch/sec)} \Leftrightarrow L(m) = 0.2077 \frac{h(mm) \cdot V_{\max}(km/h)}{r_e(inch/sec)}. \text{ Από τη σχέση}$$

αυτή και δεδομένου ότι η κλίση του πρανούς υπερύψωσης είναι $i = \frac{h}{L}$, προκύπτει:

$$\frac{h}{L} = \frac{r_e}{0.2077 V_{ma}} \Leftrightarrow i = \frac{r_e}{0.2077 V_{ma}}. \text{ Έτσι:}$$

Για ταχύτητες $\leq 60 mph = 95 km/h$ το αμερικανικό εγχειρίδιο θεσπίζει μέγιστο ρυθμό αύξησης της υπερύψωσης ίσο με $1 \frac{1}{4} inch/sec$, ήτοι

$$r_{e_{\max}} = 1.25 inch/sec \rightarrow r_{h_{\max}} = 1.25 \cdot \frac{1000}{12 \cdot 3.28} = 31.758 mm/sec \text{ και άρα}$$

$$L_{\min} = 0.2077 \frac{h \cdot V_{\max}}{31.758} \Leftrightarrow L(m) = \frac{h \cdot V_{\max}}{152.90} \text{ και}$$

$$i_{\max} = \frac{31.785}{0.2077V_{\max}} = \frac{152.90}{V_{\max}} (mm/m) \text{ ή } i_{\max} = \frac{152.90}{V_{\max}} \% \text{ ή } i_{\max} = \frac{0.1529}{V_{\max}}.$$

Για ταχύτητες $60mph - 80mph = 95km/h - 130km/h$ το αμερικανικό εγχειρίδιο θεσπίζει μέγιστο ρυθμό αύξησης της υπερύψωσης ίσο με $1 \frac{1}{6} inch/sec$, ήτοι

$$r_{e_{\max}} = 1.1667 inch/sec \rightarrow r_{h_{\max}} = 1.1667 \cdot \frac{1000}{12 \cdot 3.28} = 29.642 mm/sec \text{ και άρα}$$

$$L_{\min} = 0.2077 \frac{h \cdot V_{\max}}{29.642} \Leftrightarrow L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{142.72} \text{ και}$$

$$i_{\max} = \frac{29.642}{0.2077V_{\max}} = \frac{142.72}{V_{\max}} (mm/m) \text{ ή } i_{\max} = \frac{142.72}{V_{\max}} \% \text{ ή } i_{\max} = \frac{0.14272}{V_{\max}}.$$

Τέλος, για ταχύτητες $80mph - 100mph = 130km/h - 160km/h$ το αμερικανικό εγχειρίδιο θεσπίζει μέγιστο ρυθμό αύξησης της υπερύψωσης ίσο με $1 \frac{1}{8} inch/sec$, ήτοι

$$r_{e_{\max}} = 1.125 inch/sec \rightarrow r_{h_{\max}} = 1.125 \cdot \frac{1000}{12 \cdot 3.28} = 28.582 mm/sec \text{ και άρα}$$

$$L_{\min} = 0.2077 \frac{h \cdot V_{\max}}{28.582} \Leftrightarrow L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{137.61} \text{ και}$$

$$i_{\max} = \frac{28.582}{0.2077V_{\max}} = \frac{137.61}{V_{\max}} (mm/m) \text{ ή } i_{\max} = \frac{137.61}{V_{\max}} \% \text{ ή } i_{\max} = \frac{0.13761}{V_{\max}}.$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4.1.1

ΜΕΓΙΣΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΠΡΑΝΩΝ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ ΚΑΤΑ ΤΟ AMERICAN TRACK GEOMETRY

	$r_{e_{\max}}$ (inch/sec)	$r_{h_{\max}}$ (mm/sec)	$i_{\max}$ (mm/m) ή ‰	$L_{\min}$ (m)
$V \leq 60mph$ ή $V < 95km/h$	1.25	31.758	$i_{\max} = \frac{152.90}{V_{\max}} \%$ $i_{\max} = \frac{0.1529}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{152.90}$
$60mph < V < 80mph$ ή $95km/h < V < 130km/h$	1.1667	29.642	$i_{\max} = \frac{142.72}{V_{\max}} \%$ $i_{\max} = \frac{0.1427}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{142.72}$
$80mph < V < 100mph$ ή $130km/h < V < 160km/h$	1.125	28.582	$i_{\max} = \frac{137.61}{V_{\max}} \%$ $i_{\max} = \frac{0.1376}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{137.61}$

Το αμερικανικό εγχειρίδιο λοιπόν κατηγοριοποιεί τους περιορισμούς για το μήκος και τη κλίση του πρανούς με βάση την ίδια κατηγοριοποίηση των τιμών του ρυθμού αύξησης της υπερύψωσης ανάλογα με τις ταχύτητες. Όσο η ταχύτητα αυξάνεται, ο μέγιστος ρυθμός αύξησης της υπερύψωσης μικραίνει, το ελάχιστο μήκος του πρανούς αυξάνεται και η μέγιστη κλίση του πρανούς μειώνεται. Οι ελάχιστες τιμές για το μήκος του πρανούς δεν διαφέρουν πολύ από την τιμή $L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{144}$ του Ν.Κ.Ε.Γ.

- Η πλευρική επιτάχυνση b πρέπει επίσης να μεταβάλλεται με έναν αποδεκτό ρυθμό. Ο ρυθμός αυτός μεταβολής της πλευρικής επιτάχυνσης πρόκειται για το τινάγμα που συναντήσαμε στον κανονισμό του ΟΣΕ: $C = \frac{db}{dt} (m/sec^3)$.

Όταν η ταχύτητα εκφράζεται σε km/h, προκύπτει $L_{\min} = 0.91667V_{\max}$.

Όταν η ταχύτητα εκφράζεται σε miles/h, προκύπτει $L_{\min} = 0.5697V'_{\max}$.

Η μέγιστη αυτή τιμή είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη που προκύπτει με βάση το τινάγμα στον νέο κανονισμό του ΟΣΕ. Κι αυτό γιατί ο κανονισμός του ΟΣΕ επιτρέπει μεγαλύτερο τινάγμα απ' ό,τι οι αμερικάνικοι κανονισμοί.

- Τέλος, με βάση την ανεπάρκεια της υπερύψωσης e_u (inch), το ελάχιστο μήκος του πρανούς υπερύψωσης δίνεται από την σχέση $L_{\min} = 1.63e_u V_{\max}$ όπου η ταχύτητα V εκφράζεται σε miles/h. Δίνοντας την τιμή $e_u = 3in$ που είναι μια μέγιστη τιμή για την ανεπάρκεια της υπερύψωσης, προκύπτει πάλι $L_{\min} = 4.89V_{\max}$ όπου V (mph).

Αν στην παραπάνω σχέση $L_{\min} = 1.63e_u V_{\max}$ μετατραπεί η e_u (inches) σε a (mm)

και οι μονάδες της ταχύτητας από miles/h σε km/h προκύπτει $L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{25.10}$.

Η παραπάνω ελάχιστη τιμή είναι πολύ μεγαλύτερη από την $L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{216}$ που

προτείνει ο κανονισμός του ΟΣΕ με βάση την ανεπάρκεια της υπερύψωσης.

Τέλος, ανακεφαλαιωτικά στον τελευταίο πίνακα-έχουν υπολογιστεί και οι περιορισμοί για την κλίση και το μήκος του πρανούς υπερύψωσης για μετάβαση από ένα κυκλικό τόξο 1 σε ένα άλλο κυκλικό τόξο 2 αντικαθιστώντας το Δh με $h_2 - h_1$ και το $\Delta \alpha$ με $\alpha_2 - \alpha_1$:

Τέλος, ανακεφαλαιωτικά στον τελευταίο πίνακα-έχουν υπολογιστεί και οι περιορισμοί για την κλίση και το μήκος του πρανούς υπερύψωσης για μετάβαση από ένα κυκλικό τόξο 1 σε ένα άλλο κυκλικό τόξο 2 αντικαθιστώντας το Δh με $h_2 - h_1$ και το Δa με $a_2 - a_1$:

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4.1.2

ΜΕΓΙΣΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΠΡΑΝΩΝ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΙΑ-ΚΥΚΛΙΚΟ ΤΟΞΟ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟ ΤΟΞΟ 1-ΚΥΚΛΙΚΟ ΤΟΞΟ 2 ΚΑΤΑ ΤΟ AMERICAN TRACK GEOMETRY

		$i_{\max}$ (mm/m)	$L_{\min}$ (m)	
			Ευθυγραμμία- κυκλικό τόξο	Κυκλικό τόξο- Κυκλικό τόξο
ρυθμός μεταβολής υπερύψωσης r (inch/sec)	1,25inch/sec=31.758mm/sec για $V<60\text{mph}=95\text{km/h}$	$i_{\max} = \frac{152.90}{V_{\max}}\%$ $i_{\max} = \frac{0.1529}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{152.90}$	$L_{\min} = \frac{(h_2 - h_1) \cdot V_{\max}}{152.90}$
	1,1667inch/sec=29.642mm/sec για $60<V<80\text{mph}=95<V<130\text{km/h}$	$i_{\max} = \frac{142.72}{V_{\max}}\%$ $i_{\max} = \frac{0.1427}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{142.72}$	$L_{\min} = \frac{(h_2 - h_1) \cdot V_{\max}}{142.72}$
	1,125inch/sec=28.582mm/sec για $80V<100\text{mph}=130<V<160\text{km/h}$	$i_{\max} = \frac{137.61}{V_{\max}}\%$ $i_{\max} = \frac{0.1376}{V_{\max}}$	$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{137.61}$	$L_{\min} = \frac{(h_2 - h_1) \cdot V_{\max}}{137.61}$
Ρυθμός μεταβολής ανε- παρκείας $\mu_{\max}$			$L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{25.10}$	$L_{\min} = \frac{(a_2 - a_1) \cdot V_{\max}}{25.10}$
τίναγμα $C_{\max}$	0.3m/sec ³		$L_{\min} = 4.89V$, 	

3.4.2 Το τόξο συναρμογής

Προτείνεται επίσης η κυβική παραβολή, η οποία εκφράζεται με την εξίσωση $D = kS = kL_s / 100$ όπου

D =η γωνία που αντιστοιχεί στο πλήρες κυκλικό τόξο

k =ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας του τόξου συναρμογής ανά στάση (καμπυλότητα)

S =το μήκος του τόξου συναρμογής για στάσεις των 100feet

L_s =το μήκος του τόξου συναρμογής σε feet.

Η σχέση αυτή εκφράζει την μεταβολή της γωνίας D με την αύξηση του μήκους του τόξου συναρμογής L_s .

Για να γίνει πιο κατανοητή η παραπάνω σχέση, επιχειρήθηκε να συγκριθεί με την σχέση που δίνει την γραμμική αύξηση της καμπυλότητας στον Ν.Κ.Ε.Γ, αλλά και στα υπόλοιπα εγχειρίδια. Οι αμερικάνοι εκφράζουν τα τόξα με μοίρες γωνίας– και συγκεκριμένα της επίκεντρης γωνίας που αντιστοιχεί σε τόξο 100ft της καμπύλης– και όχι με μέτρα ακτίνας όπως οι ευρωπαίοι.

Από την σύγκριση αυτή προέκυψαν οι ίδιες ακριβώς σχέσεις.*

Συμπέρασμα: η αμερικάνικη θεωρία για την κυβική παραβολή είναι ουσιαστικά όμοια με αυτή που συναντήσαμε στον κανονισμό του ΟΣΕ, μόνο που αλλάζουν οι μονάδες μέτρησης και ο τρόπος έκφρασης των διαφόρων στοιχείων της συναρμογής.

Αντίρροπα τόξα:

Για την συναρμογή δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων αναφέρεται ότι η ενδιάμεση ευθυγραμμία που απομένει μετά την εφαρμογή των δύο παραβολικών τόξων πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με το μήκος του μακρύτερου οχήματος που χρησιμοποιεί τη γραμμή, έτσι ώστε το όχημα να ανακτά μία ουδέτερη θέση πριν εμφανιστούν οι αντίθετες τιμές υπερύψωσης, καμπυλότητας και πλευρικής επιτάχυνσης. 100–200ft ή 30–60m ενδιάμεσης ευθυγραμμίας είναι αποδεκτά, έτσι ώστε να χωρά ένα τουλάχιστον φορείο του οχήματος στην ενδιάμεση ευθυγραμμία.

* βλέπε παράγραφο 4.1 Κεφαλαίου Β
Γεωργοπούλου Ναταλία

παρουσιάζονται δυσκολίες στην ευθυγράμμιση και προκαλούνται αλλαγές της πλευρικής επιτάχυνσης του οχήματος, που είναι πάντα ανεπιθύμητες. Στην περίπτωση αυτή είναι προτιμότερο να συμπτυχθούν τα δύο κυκλικά τόξα σε ένα της ίδιας κατεύθυνσης.

3.5 Παρακάτω ακολουθούν ανακεφαλαιωτικοί πίνακες που αφορούν την παραπάνω σύγκριση.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.2: ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΟΡΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΚΛΙΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΠΡΑΝΩΝ p-b-s ΣΤΟΥΣ ΓΕΡΜΑΝΙΚΟΥΣ ΚΑΝΟΝΙΣΜΟΥΣ

		p-πρανές	b-πρανές	s-πρανές
Κατασκευαστικό	Μέγιστο	$i_{\max} = \frac{1}{400}$	$i_{\max} = \frac{1}{400}$	$i_{\max} = \frac{1}{400}$
	Ελάχιστο	$i_{\min} = \frac{1}{2000}$	$i_{\min} = \frac{1}{2000}$	$i_{\min} = \frac{1}{2000}$
Δυναμικό με βάση την ταχύτητα	Μέγιστο	$i_{\max} = \frac{1}{4V_{\max}} = \frac{0.25}{V_{\max}}$ ή $i_{\max} = \frac{1}{4V}, V > 100 \text{ km/h}$ $i_{\max} = \frac{1}{1.25V + 275}, V < 100 \text{ km/h}$	$i_{\max} = \frac{1}{4V_{\max}} = \frac{0.25}{V_{\max}}$	$i_{\max} = \frac{1}{4V_{\max}} = \frac{0.25}{V_{\max}}$
	Ελάχιστο	$i_{\min} = \frac{1}{5V}, V > 100 \text{ km/h}$ $i_{\min} = \frac{1}{2V + 300}, V < 100 \text{ km/h}$		

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.3:ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΑ ΟΡΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΜΗΚΗ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΥΞΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΧΩΡΕΣ

		N.K.E.Γ.	American Track Geometry	British Railway Track	Γερμανοί
Κατασκευαστικό (mm)	Ελάχιστο	$L_{\min} = 400h$ σε mm ή $L_{\min} = 0.4h$ σε m		$L_{\min} = 400h$ σε mm ή $L_{\min} = 0.4h$ σε m	$L_{\min} = 400 \cdot \Delta u$ σε mm ή $L_{\min} = 0.4 \cdot \Delta u$ σε m
	Μέγιστο				$L_{\min} = 2000 \cdot \Delta u$ σε mm ή $L_{\min} = 2 \cdot \Delta u$ σε m
Δυναμικό με βάση την ταχύτητα	Ελάχιστο	$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{144}$ ή $L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{216}$ ειδικές περιπτώσεις	$V < 60 \text{ mph} = 95 \text{ km/h}$: $L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{152.90}$ $60 < V < 80 \text{ mph} = 95 < V < 130 \text{ km/h}$: $L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{142.72}$ $80 < V < 100 \text{ mph} = 130 < V < 160 \text{ km/h}$: $L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{137.61}$	$L_{\min} = \frac{h \cdot V_{\max}}{198}$	$L_{\min} = 8V_{\max} \cdot \Delta u$ ή $L_{\min} = 0.08 \frac{V^3}{R}$, για $V > 40 \text{ km/h}$ $L_{\min} = \frac{0.02V^3 + 2.4V^2}{R}$, για $V < 40 \text{ km/h}$
	Μέγιστο				$L_{\max} = 0.008 \frac{V}{R} (11.8V^2 - 100R)$, για $V > 50 \text{ km/h}$ $L_{\max} = \frac{0.0025V + 0.275}{R} (11.8V^2 - 100R)$, για $V < 50 \text{ km/h}$
Τίναγμα $C_{\max}$		$L_{\min} = 0.3889V$	$L_{\min} = 4.89V$, V(km/h) $L_{\min} = 3.03V$, V(mph)		$L_{\min} = \frac{V^3}{23.4R} - 3.63V \cdot u$
Ρυθμός αύξησης της ανεπάρκειας της υπερύψωσης $\mu_{\max}$ α: ανεπάρκεια υπερύψωσης		$L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{216}$	$L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{25.10}$	$L_{\min} = \frac{a \cdot V_{\max}}{198}$	$L_{\min} = 4 \cdot \max V \cdot \Delta u_F$ uF: ανεπάρκεια υπερύψωσης

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.4: ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΑ ΟΡΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΜΗΚΗ ΤΩΝ ΤΟΞΩΝ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ p-b-s ΣΤΟΥΣ ΓΕΡΜΑΝΙΚΟΥΣ ΚΑΝΟΝΙΣΜΟΥΣ

		p-πρανές	b-πρανές	s-πρανές
Κατασκευαστικό (mm)	Ελάχιστο	$L_{\min} = 800 \cdot \Delta u$ σε mm ή $L_{\min} = 0.8 \cdot \Delta u$ σε m	$(l_b)_{\min} = 600 \cdot u$	$(l_s)_{\min} = 628.32u$
	Μέγιστο	$L_{\min} = 2000 \cdot \Delta u$ σε mm ή $L_{\min} = 2 \cdot \Delta u$ σε m		
Δυναμικό με βάση την ταχύτητα	Ελάχιστο	$L_{\min} = 8V_{\max} \cdot \Delta u$ ή $L_{\max} = 0.008 \frac{V}{R} (11.8V^2 - 100R)$, γλα $V > 100 \text{ km/h}$ $L_{\max} = \frac{0.0025V + 0.55}{R} (11.8V^2 - 100R)$, γλα $V < 100 \text{ km/h}$	$(l_b)_{\min} = 6V \cdot u$	$(l_s)_{\min} = 6.2832V \cdot u$
	Μέγιστο	$L_{\max} = 0.08 \frac{V^3}{R}$, γλα $V > 100 \text{ km/h}$ $L_{\max} = \frac{0.032V^3 + 4.8V^2}{R}$, γλα $V < 100 \text{ km/h}$		
Πίναγμα $C_{\max}$		$(l_p)_{\min} = \frac{V^3}{11.7R} - 7.26V \cdot u$	$(l_b)_{\min} = \frac{V^3}{15.6R} - 5.447V \cdot u$	
Ρυθμός αύξησης της ανεπάρκειας της υπερύψωσης $\mu_{\max}$ α: ανεπάρκεια υπερύψωσης		$L_{\min} = 6 \cdot \max V \cdot \Delta u_F$ υF: ανεπάρκεια υπερύψωσης		

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.5

ΤΟΞΑ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΥΞΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ (ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΤΗΝ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΕΝΩΣΗΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΙΑΣ ΜΕ ΚΥΚΛΙΚΟ ΤΟΞΟ)

Γερμανικοί κανονισμοί	Για να απαιτείται τόξο συναρμογής ανάμεσα σε μια ευθυγραμμία και σε ένα κυκλικό τόξο πρέπει: $r \leq \frac{V^2}{9} \Leftrightarrow V \geq 3\sqrt{r} \dots\dots\dots V \leq 100 \text{ km/h}$ $r \leq \frac{V^2}{7} \Leftrightarrow V \geq 2.65\sqrt{r} \dots\dots\dots 100 \text{ km/h} \leq V \leq 160 \text{ km/h}$ $r \leq \frac{V^2}{4} \Leftrightarrow V \geq 2\sqrt{r} \dots\dots\dots V \geq 160 \text{ km/h}$ Ως είδη καμπύλων κατάλληλα για να χρησιμοποιηθούν στα τόξα συναρμογής προτείνονται εδώ η κλωθοειδής και η κυβική παραβολή. Για την περίπτωση συναρμογής μεταξύ ευθυγραμμίας και κυκλικού τόξου με τόξο κλωθοειδούς, από την γεωμετρία του ευθύγραμμου πρανούς υπερύψωσης προκύπτει ότι το γινόμενο ακτίνας και μήκους συναρμογής είναι σταθερό-ή αλλιώς η ακτίνα μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα του μήκους. Αυτή την ακριβώς την ιδιότητα έχει η κλωθοειδής. Είναι ένα σπирάλ, που το μήκος του μικραίνει αυξανομένης της ακτίνας. Το τόξο συναρμογής, που είναι τμήμα κλωθοειδούς, εκφράζεται μέσα από εξισώσεις των τυχαίων συντεταγμένων του x,y σε συνάρτηση με την γωνία τ. Οι εξισώσεις αυτές είναι: $x = l \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{21,6} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{43,333} \right) \right) \right)$ $y = \frac{l \cdot \tau}{3} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{14} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{31.429} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{57.27} \right) \right) \right)$ Όσον αφορά την κυβική παραβολή η σχέση που εκφράζει την γωνία φ είναι $\phi_x = \frac{x^2}{2l_u \cdot R}$ ενώ η εξίσωση της κυβικής παραβολής προέκυψε $y_x = \frac{x^3}{6l_u \cdot R} \cdot \text{Τέλος η εκτροπή f είναι } f = \frac{l_u^2}{24R} \cdot$
Ν.Κ.Ε.Γ.	Ευρύτερα χρησιμοποιείται η κυβική παραβολή με γενικό τύπο $y = \frac{x^3}{6RL} \left(1 + \frac{L^2}{4R^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ Τα τόξα συναρμογής κυβικής παραβολής χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: α. Τόξα μικρού μήκους: $L \leq \frac{R}{3.5}$. Θεωρείται ότι το μήκος τους L είναι ίσο

	με την προβολή του στον άξονα των x: $L=1$. Για τα τόξα αυτά χρησιμοποιείται ο τύπος $y = \frac{x^3}{6RL}$, ενώ ισχύει $\tau = \frac{L}{2R}$ και $f = \frac{L^2}{24R}$ και $x_o = x_{\text{ΤΠ}} - \frac{L}{2}$ για το κέντρο του κυκλικού τόξου είναι $y_o = \frac{L^2}{6R} + R$ β. Τόξα μεγάλου μήκους : $L > \frac{R}{3.5}$. Το μήκος τους L δεν είναι ίσο με την προβολή του l στον άξονα των x, αντίθετα ισχύει $l = L - \frac{L^3}{40R^2}$. Για τα τόξα αυτά χρησιμοποιείται ο γενικός τύπος $y = \frac{x^3}{6RL} \left(1 + \frac{L^2}{4R^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ ενώ ισχύει $\tan \tau = \frac{L}{2R}$ και $f = \frac{L^2}{6R} \left(1 + \frac{L^2}{4R^2}\right)^{\frac{3}{2}} - R(1 - \cos \tau)$ και για τις συντεταγμένες του κέντρου του κυκλικού τόξου είναι $x_o = x_{\text{ΤΠ}} - R \sin \tau$ $y_o = y_{\text{ΤΠ}} + R \cos \tau$
Βρετανικοί κανονισμοί	Προτείνεται η κυβική παραβολή ως ευρύτερα χρησιμοποιούμενη. Η εξίσωση στην οποία υπακούει η αύξηση των τεταγμένων της κυβικής παραβολής σε συνάρτηση με τις τιμές των τετμημένων είναι η $y = x^3$. Για όλα τα τόξα κυβικής παραβολής ισχύει $\tan \tau = \frac{L}{2R}$ και $f = \frac{L^2}{24R}$ ενώ αποδεικνύεται ότι το τόξο συναρμογής διχοτομεί την εκτροπή f.
Αμερικάνικοί κανονισμοί	Προτείνεται επίσης η κυβική παραβολή, η οποία αυτή φορά εκφράζεται με την εξίσωση $D = kS = kL_s/100$ όπου D=η γωνία που αντιστοιχεί στο πλήρες κυκλικό τόξο k=ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας του τόξου συναρμογής ανά στάση (καμπυλότητα) S=το μήκος του τόξου συναρμογής για στάσεις των 100feet Ls=το μήκος του τόξου συναρμογής σε feet. Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει ουσιαστικά την μεταβολή της καμπυλότητας σε συνάρτηση με το μήκος. Η αμερικάνικη θεωρία για την κυβική παραβολή αποδείξαμε ότι είναι όμοια με αυτή που συναντήσαμε στον κανονισμό του ΟΣΕ, μόνο που αλλάζουν οι μονάδες μέτρησης και ο τρόπος έκφρασης των διαφόρων στοιχείων της συναρμογής.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.6

ΤΟΞΑ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΥΞΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ (ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΤΗΝ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΕΝΩΣΗΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΙΑΣ ΜΕ ΚΥΚΛΙΚΟ ΤΟΞΟ)

Γερμανικοί κανονισμοί	α Το τόξο με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής αντιστοιχεί σε ένα πρηνές που αποτελείται από δύο τετραγωνικές παραβολές εφαρμόζεται για συναρμογή μεταξύ ευθυγραμμίας και κυκλικού τόξου, αλλά και μεταξύ κυκλικών τόξων. Στην περίπτωση αυτή ο υπολογισμός των γεωμετρικών μεγεθών πραγματοποιείται σε δύο βήματα: το τόξο υποδιαιρείται σε δύο περιοχές με ίσα μήκη και ίδια μεταβολή καμπυλότητας. Έτσι υπολογίζονται συντεταγμένες, αλλαγές κατεύθυνσης τ, εκτροπή f και άλλα γεωμετρικά μεγέθη. Τελικά, η συνολική αλλαγή κατεύθυνσης είναι και σ' αυτήν την περίπτωση ίση με $\tau = \frac{L}{2R}$. Με μία άλλη προσέγγιση το τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής υπολογίζεται με ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το τόξο. Έτσι, προκύπτει: $\phi = \frac{2}{3l_p^2 \cdot R} \cdot x^3 \text{ και η εξίσωση του τόξου: } y = \frac{x^4}{6l_p^2 \cdot R} \text{ ενώ η εκτροπή } f \text{ δίνεται:}$ $f_p = \frac{l_p^2}{48R}.$ β. [8] Αναφέρεται το τόξο με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής $k_x = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{3x^2}{l_u^2} - \frac{2x^3}{l_u^3} \right)$. Συμπίπτει με το τόξο συναρμογής Bloss. Το τόξο αυτό είναι 5ου βαθμού και έχει εξίσωση $y_x = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{x^4}{4l_u^2} - \frac{x^5}{10l_u^3} \right)$ ενώ η γωνία ϕ είναι $\phi_x = \frac{1}{R} \left(\frac{x^3}{l_u^2} - \frac{x^4}{2l_u^3} \right)$ και στο τέλος του τόξου λαμβάνει την τιμή $\phi_u = \frac{l}{2R}$. Τέλος, η εκτροπή f του κυκλικού τόξου είναι $f = \frac{l_u^2}{40R}$. Για το τόξο αυτό συναρμογής (ή Bloss) απαιτείται μεγαλύτερη εκτροπή απ' ότι το τόξο με παραβολική αύξηση της καμπυλότητας γ. Ένας εναλλακτικός τρόπος για την εφαρμογή μη-γραμμικής αύξησης της καμπυλότητας είναι το τόξο συναρμογής Sinus. Η μεταβολή της καμπυλότητας δίνεται από την σχέση $k_s = \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{l_s} \cdot x \right) \right] \cdot \frac{k}{2}$. Η εκτροπή του κυκλικού τόξου σ' αυτήν την περίπτωση είναι $f_s = \frac{l_s^2}{42.232R}$.
Ν.Κ.Ε.Γ.	Δεν αναφέρονται τόξα συναρμογής με μη-ευθύγραμμη αύξηση της καμπυλότητας, όπως δεν αναφέρονται και

	μη-ευθύγραμμο πρηνή υπερύψωσης.
Βρετανικοί κανονισμοί	Δεν αναφέρονται τόξα συναρμογής με μη-ευθύγραμμη αύξηση της καμπυλότητας, όπως δεν αναφέρονται και μη-ευθύγραμμο πρηνή υπερύψωσης.
Αμερικάνικοι κανονισμοί	Δεν αναφέρονται τόξα συναρμογής με μη-ευθύγραμμη αύξηση της καμπυλότητας, όπως δεν αναφέρονται και μη-ευθύγραμμο πρηνή υπερύψωσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.7

ΣΥΝΑΡΜΟΓΗ ΟΜΟΡΡΟΠΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΤΟΞΩΝ

Γερμανικοί κανονισμοί	Τόξα με ευθυγραμμη αύξηση της καμπυλότητας	Το εγχειρίδιο αυτό προτείνει απ' ευθείας την ένωση των δύο κυκλικών τόξων. Από τους υπολογισμούς, που παρουσιάστηκαν αναλυτικά στην αντίστοιχη παράγραφο, προκύπτει για τις συντεταγμένες του τόξου: $x = l \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{10} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{21,6} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{43,333} \right) \right) \right)$ $y = \frac{l \cdot \tau}{3} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{14} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{31,429} \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{57,27} \right) \right) \right) \quad \text{όπου}$ $\tau = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{L}{2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}.$
	Τόξα με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής	Στην περίπτωση αυτή ο υπολογισμός των γεωμετρικών μεγεθών πραγματοποιείται σε δύο βήματα: το τόξο υποδιαιρείται σε δύο τομείς με ίσα μήκη και ίδια μεταβολή καμπυλότητας. Έτσι υπολογίζονται συντεταγμένες, αλλαγές κατεύθυνσης τ, εκτροπή f και άλλα γεωμετρικά μεγέθη. Τελικά, η συνολική αλλαγή κατεύθυνσης είναι και σ' αυτήν την περίπτωση ίση με $\tau = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{L}{2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}.$

N.K.E.Γ.	Στην περίπτωση συναρμογής δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων, διακρίνονται οι παρακάτω τρεις περιπτώσεις: A. Αν το ενδιάμεσο ευθύγραμμο τμήμα είναι αρκετά μεγάλο ώστε να επαρκεί για δύο κανονικά τόξα συναρμογής, τότε η συναρμογή αποτελείται από δύο παραβολικά τόξα συναρμογής με την ευθυγραμμία, ένα για το κάθε κυκλικό τόξο, και μεσολαβεί το ευθύγραμμο τμήμα που απομένει, εφόσον το τελευταίο είναι μεγαλύτερο από 30m. B. Αν το παραπάνω δεν είναι εφικτό, τότε η συναρμογή πραγματοποιείται με ένα μόνο παραβολικό τόξο συναρμογής ως εξής: το κυκλικό τόξο με την μεγαλύτερη υπερύψωση- και άρα με την μικρότερη ακτίνα- ενώνεται με την ευθυγραμμία ή με την νοητή προέκτασή της με παραβολικό τόξο συναρμογής. Το κυκλικό τόξο με την μικρότερη υπερύψωση- και άρα με την μεγαλύτερη ακτίνα- ενώνεται με το παραβολικό τόξο συναρμογής στο σημείο εκείνο στο οποίο συμπίπτουν η υπερύψωση και η καμπυλότητά του με την υπερύψωση και την καμπυλότητα του παραβολικού τόξου. Γ. Τέλος, αν δεν υπάρχει ενδιάμεση ευθυγραμμία, τα κυκλικά τόξα ενώνονται απ' ευθείας με τόξο συναρμογής που διέπεται από δύο εξισώσεις: μία για την πλευρά προς το κυκλικό τόξο ακτίνας R_1 και μία για την πλευρά προς το κυκλικό τόξο ακτίνας R_2. Οι δύο πλευρές είναι ίσες, δηλαδή το τόξο συναρμογής χωρίζεται σε δύο ίσα τμήματα που διέπονται από διαφορετικές εξισώσεις.
Βρετανιοί κανονισμοί	Για την συναρμογή δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων χωρίς ενδιάμεση ευθυγραμμία είναι απαραίτητη η εφαρμογή συναρμογής όταν οι ακτίνες αυτών είναι διαφορετικές, εκτός αν διαφέρουν κατά λιγότερο από 15%. Η προϋπόθεση αυτή της διαφοράς των ακτίνων είναι ευνόητη, εφόσον μια πολύ μικρή διαφορά στις ακτίνες προκαλεί πολύ μικρή διαφορά και στις υπερυψώσεις, χωρίς έτσι να απαιτείται τόξο συναρμογής. Δεν αναφέρεται ωστόσο ο τρόπος με τον οποίο ενώνονται ακριβώς τα δύο κυκλικά τόξα με το τόξο συναρμογής.

Αμερικάνικοι κανονισμοί	Για την συναρμογή δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις: A. Αν απαιτείται να εφαρμοστούν δύο παραβολικά τόξα συναρμογής, ένα προς κάθε κυκλικό τόξο, απαιτείται 500ft δηλαδή 152m ευθυγραμμίας ανάμεσα στα δύο κυκλικά τόξα. B. Αν η ευθυγραμμία αυτή δεν επιτευχθεί, παρουσιάζονται δυσκολίες στην ευθυγράμμιση και προκαλούνται αλλαγές της πλευρικής επιτάχυνσης του οχήματος, που είναι πάντα ανεπιθύμητες. Στην περίπτωση αυτή είναι προτιμότερο να συμπτυχθούν τα δύο κυκλικά τόξα σε ένα της ίδιας κατεύθυνσης.
-------------------------	---

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.8

ΣΥΝΑΡΜΟΓΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΤΟΞΩΝ

N.K.E.Γ.		Στην περίπτωση σύνδεσης δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων, προβλέπονται οι παρακάτω λύσεις: Α. Κατασκευάζεται από ένα παραβολικό τόξο συναρμογής προς την μεριά κάθε κυκλικού τόξου και ένα ενδιάμεσο ευθύγραμμο τμήμα μήκους τουλάχιστον 30m. Β. Αν το τελευταίο δεν είναι εφικτό, το ευθύγραμμο τμήμα παραλείπεται και τα δύο τόξα συναρμογής έχουν κοινή αρχή και εφαπτομένη και ίδια μεταβολή της καμπυλότητας.
Βρετανικοί κανονισμοί		Για την ένωση δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων προτείνεται η απλούστερη λύση της συναρμογής με δύο παραβολικά τόξα-ένα προς κάθε κυκλικό τόξο- με κοινή αρχή και εφαπτομένη.
Αμερικάνικοι κανονισμοί		Για την συναρμογή δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων αναφέρεται ότι η ενδιάμεση ευθυγραμμία που απομένει μετά την εφαρμογή των δύο παραβολικών τόξων πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με το μήκος του μακρύτερου οχήματος που χρησιμοποιεί τη γραμμή, έτσι ώστε το όχημα να ανακτά μία ουδέτερη θέση πριν εμφανιστούν οι αντίθετες τιμές υπερύψωσης, καμπυλότητας και πλευρικής επιτάχυνσης. 100-200ft, δηλαδή 30-60m ενδιάμεσης ευθυγραμμίας είναι αποδεκτά.
Γερμανικοί κανονισμοί	Τόξα με ευθυγραμμη αύξηση της καμπυλότητας	Δεν αναφέρεται η περίπτωση συναρμογής μεταξύ αντίρροπων κυκλικών τόξων.
	Τόξα με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής	Δεν αναφέρεται η περίπτωση συναρμογής μεταξύ αντίρροπων κυκλικών τόξων.

Δ. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ – ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1.1 ΥΠΕΡΥΨΩΣΕΙΣ

Ως προς τις υπερυψώσεις αναλύθηκε οι παρακάτω βιβλιογραφία:

– N.K.E.Γ. του ΟΣΕ

– American Railway Track

– British Track Geometry

– Manual for Railway engineering, American Railway Engineering Assosiation, 1992

– Fürmetz R: “Der Gleisplan” Bayverlag GmbH Wiesbaden und Berlin, 1985

Κατά την κίνηση ενός σιδηροδρομικού οχήματος στην καμπύλη παράγεται η φυγόκεντρος δύναμη προς το εξωτερικό της καμπύλης, που το μέγεθός της είναι ως γνωστόν ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας του οχήματος και αντιστρόφως ανάλογο της ακτίνας της καμπύλης και δίνεται απ’ τον τύπο $F = \frac{m \cdot v^2}{R}$, όπου m η μάζα

του οχήματος σε kg, v η ταχύτητα του οχήματος σε m/sec και R η ακτίνα της καμπύλης σε m. Λόγω της φυγοκέντρου δύναμης δημιουργούνται διάφορα προβλήματα, εκ των οποίων τα πιο σημαντικά είναι:

- Σημαντικές εγκάρσιες δυνάμεις που μπορεί να δημιουργήσουν συνθήκες εκτροχιασμού
- Δημιουργία πλευρικής επιτάχυνσης προς το εξωτερικό της καμπύλης - πρόκειται για την φυγόκεντρο επιτάχυνση $b_F = \frac{v^2}{R}$ - από την ύπαρξη της οποίας μειώνεται η

άνεση των επιβατών. Πράγματι, λόγοι ανθρώπινης φυσιολογίας επιβάλλουν ότι η εγκάρσια επιτάχυνση που δέχεται το ανθρώπινο σώμα δεν πρέπει να υπερβαίνει κάποια τιμή.

Για την άμβλυνση των παραπάνω δυσμενών επιπτώσεων της φυγοκέντρου δύναμης υπήρχαν οι εξής δυνατότητες:

- χρήση της μεγαλύτερης δυνατής ακτίνας καμπυλότητας R , πράγμα που δεν είναι εύκολα εφικτό λόγω τοπογραφικών και τεχνικών περιορισμών.
- μείωσης της ταχύτητας του συρμού, που αποτελεί την έσχατη λύση, αφού επικρατεί η τάση και η προσπάθεια να αυξάνεται γενικά η ταχύτητα των οχημάτων.
- υπερύψωση της εξωτερικής σιδηροτροχιάς σε σχέση με την εσωτερική, ώστε να εξισορροπηθούν οι φυγόκεντρες επιπονήσεις.

Με την υπερύψωση της εξωτερικής σιδηροτροχιάς παράγεται μία οριζόντια συνιστώσα του βάρους προς το εσωτερικό της καμπύλης, η οποία αντισταθμίζει την φυγόκεντρο δύναμη. Με τον τρόπο αυτό αμβλύνονται αρκετά τα εγκάρσια φαινόμενα, χωρίς τις περισσότερες φορές να εξαλειφθούν τελείως, καθώς οι τιμές της υπερύψωσης δεν πρέπει να υπερβαίνουν ορισμένες τιμές πάνω από τις οποίες προκαλείται σημαντική φθορά του τροχαίου υλικού. Πρέπει δηλαδή να εξασφαλίζεται ότι ένα όχημα που για κάποιο λόγο σταματάει επί της καμπύλης, με δυσμενείς συνθήκες φόρτωσης και εγκάρσιας πίεσης του ανέμου, δεν θα ανατραπεί λόγω της ύπαρξης υπερύψωσης.

Μία βασική έννοια και στα τρία εγχειρίδια που αναλύθηκαν, είναι η έννοια της θεωρητικής υπερύψωσης. Στον κανονισμό του ΟΣΕ, όπως και στους βρετανικούς κανονισμούς, η θεωρητική υπερύψωση εκφράζεται μαθηματικά από τον τύπο $h_{\theta} = 11.8 \frac{V^2}{R}$, όπου h_{θ} η θεωρητική υπερύψωση σε mm, V η ταχύτητα του οχήματος σε km/h και R η ακτίνα της καμπύλης. Στους αμερικάνικους κανονισμούς ο αντίστοιχος τύπος δίνεται $e = 0.0007DV^2$, όπου e η θεωρητική υπερύψωση σε inches, D οι μοίρες της γωνίας που αντιστοιχεί σε τόξο 100ft της καμπύλης και V η ταχύτητα του οχήματος σε miles/h.

Η θεωρητική υπερύψωση έχει την έννοια ότι για κάθε όχημα που εισέρχεται σε κυκλικό τόξο ακτίνας R με μία συγκεκριμένη ταχύτητα V , υπάρχει μία υπερύψωση $h_{\theta} = 11.8 \frac{V^2}{R}$ για την οποία η φυγόκεντρος δύναμη εξισορροπείται πλήρως από την οριζόντια συνιστώσα του βάρους, για την οποία δηλαδή υφίσταται ισορροπία με μηδενική τιμή της παραμένουσας-μη εξισορροπούμενης πλευρικής επιτάχυνσης.

Στην περίπτωση που η παραμένουσα πλευρική επιτάχυνση $b(\text{m/sec}^2)$ δεν είναι μηδενική, η υπερύψωση εκφράζεται από τον τύπο $h = 11.8 \frac{V^2}{R} - 153b$, όπου η ποσότητα $153b$ ονομάζεται ανεπάρκεια της υπερύψωσης $\alpha(\text{mm})$, με μέγιστη τιμή 105mm , όταν η φορά της b είναι προς τα εξωτερικά της καμπύλης και πλεονάσμα της υπερύψωσης $\pi(\text{mm})$, με μέγιστη τιμή 100mm , όταν η φορά της b είναι προς τα εσωτερικά της καμπύλης. Οι τιμές της ανεπάρκειας ή του πλεονάσματος της υπερύψωσης είναι απαραίτητες όπου δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί ισορροπία με την κατασκευαστική υπερύψωση ή όπου δεν μπορεί να κατασκευαστεί καθόλου υπερύψωση.

Συνήθως μία σιδηροδρομική γραμμή εξυπηρετεί οχήματα με διαφορετικά χαρακτηριστικά και διαφορετικές ταχύτητες. Έτσι η εφαρμογή της θεωρητικής υπερύψωσης στην γραμμή είναι δυσχερής, λόγω ακριβώς αυτού του πλήθους των ταχυτήτων. Εξαίρεση στο πρόβλημα αυτό αποτελούν τα δίκτυα των μητροπολιτικών σιδηροδρόμων ή του τραμ, που εξυπηρετούν οχήματα με όμοια χαρακτηριστικά.

Σκοπός της εφαρμογής μίας κατάλληλης υπερύψωσης στην γραμμή είναι κατ' αρχήν η διασφάλιση της ασφαλούς πορείας των οχημάτων, μία υπερύψωση δηλαδή που δεν θα επιτρέπει την δημιουργία συνθηκών εκτροχιασμού. Επιπρόσθετα, πρέπει να εξασφαλίζεται η άνεση των επιβατών, που επιτυγχάνεται με την διατήρηση των τιμών της παραμένουσας-μη εξισορροπούμενης επιτάχυνσης σε χαμηλά επίπεδα. Τέλος, η υπερύψωση που θα εφαρμοστεί πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να μειώνονται όσο το δυνατόν οι επιπονήσεις και οι φθορές τόσο στην εξωτερική όσο και στην εσωτερική σιδηροτροχιά.

Τόσο η ασφαλής πορεία των σιδηροδρομικών οχημάτων και η άνεση των επιβατών σε καμπύλη τροχιά, όσο και οι επιπονήσεις επί των σιδηροτροχιών κατά την πορεία σε γραμμή με υπερυψωμένη σιδηροτροχιά εξαρτώνται άμεσα από την ταχύτητα V των οχημάτων. Για το λόγο αυτό, ανάλογα με τα είδη των οχημάτων και τις ταχύτητες που αυτά αναπτύσσουν, καθώς και ανάλογα με την ποσοστιαία κατανομή των ταχυτήτων στην γραμμή, σε κάθε χώρα αναπτύχθηκαν διαφορετικές μέθοδοι εφαρμογής της υπερύψωσης.

Ο κανονισμός του ΟΣΕ και οι γερμανικοί κανονισμοί προτείνουν ότι σε μία γραμμή που εξυπηρετεί ένα φάσμα ταχυτήτων με μέγιστη ταχύτητα $V_{\max}$ και ελάχιστη $V_{\min}$,

εφαρμόζεται η κανονική υπερύψωση με τύπο $h_k = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R}$, όπου $V_{\max}$ η μέγιστη ταχύτητα σε km/h και R η ακτίνα της καμπύλης. Ο τύπος αυτός προέκυψε μετά απ' τις εξής υποθέσεις:

- κανένα όχημα που εισέρχεται σε μία καμπύλη με μεγάλη ταχύτητα δεν υπερβαίνει την μέγιστη τιμή της ανεπάρκειας της υπερύψωσης.
- κανένα όχημα που εισέρχεται σε μία καμπύλη με μικρή ταχύτητα δεν υπερβαίνει την μέγιστη τιμή του πλεονάσματος της υπερύψωσης.
- Η μέγιστη τιμή της κατασκευαστικής υπερύψωσης είναι $h_{\max}=160\text{mm}$.

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Δεν γίνεται καμία ουσιαστική πρόβλεψη για την ποσοστιαία κατανομή ταχυτήτων στο δίκτυο
- Δεν πραγματοποιείται καμία «ιδιαιτέρη» μεταχείριση σε κανένα είδος οχημάτων, είτε ταχέων είτε βραδέων, κάτι που γίνεται στα άλλα δύο εγχειρίδια που αναλύθηκαν.
- Κανένα όχημα, είτε αναπτύσσει μεγάλη είτε μικρή ταχύτητα, δεν υπερβαίνει την μέγιστη τιμή της ανεπάρκειας ή του πλεονάσματος της υπερύψωσης αντίστοιχα, δηλαδή δεν υπερβαίνεται η ανώτατη τιμή της παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης προς το εξωτερικό ή προς το εσωτερικό της καμπύλης.
Έτσι, όσον αφορά τα ταχεία οχήματα, δεν προκύπτει η ανάγκη επιβράδυνσης σε ορισμένες καμπύλες ώστε να διασφαλιστεί η άνεση των επιβατών, δηλαδή δεν δημιουργούνται σημεία βραδυπορείας.
- Παρόλα αυτά, είναι δυνατόν να δημιουργούνται αρκετά μεγάλες τιμές της παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης. Δεδομένης εξάλλου της αυξανόμενης τάσης για βελτίωση των ταχυτήτων στις σιδηροδρομικές γραμμές, το πρόβλημα των μεγάλων τιμών παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης προς το εξωτερικό της καμπύλης μπορεί να γίνει πιο έντονο.
- Δεν πραγματοποιείται πρόληψη για την φθορά της σιδηροτροχιάς που καταπονείται περισσότερο.

Από τις παραπάνω γενικές γραμμές λοιπόν, ο ελληνικός κανονισμός προτείνει μία μέθοδο «ουδέτερη» ως προς τα οχήματα που κυκλοφορούν στην γραμμή, χωρίς να

ευνοείται καμία κατηγορία ταχυτήτων και χωρίς να γίνεται ουσιαστική πρόβλεψη για την μείωση της πλευρικής επιτάχυνσης και της φθοράς των σιδηροτροχιών.

Στους αμερικάνικους κανονισμούς προτείνεται η εφαρμογή σε μία σιδηροδρομική γραμμή μεικτής κυκλοφορίας της θεωρητικής υπερύψωσης της ταχύτητας του επικρατέστερου αριθμού των οχημάτων.

Στους βρετανικούς, επίσης προτείνεται η εφαρμογή της θεωρητικής υπερύψωσης του μέσου όρου των ταχυτήτων της γραμμής.

Δεδομένου ότι ο μέσος όρος γενικά διαμοφώνεται κοντά στην τιμή εκείνη που εμφανίζεται περισσότερες φορές, οι δύο παραπάνω μέθοδοι είναι παρόμοιες. Κυρίως όμως είναι παρόμοιες γιατί και στις δύο λαμβάνεται υπόψη ο αριθμός των οχημάτων που αναπτύσσουν κάθε ταχύτητα στην γραμμή.

Σε γενικές λοιπόν γραμμές:

- Στην γραμμή εφαρμόζεται η θεωρητική υπερύψωση της πλειοψηφίας των οχημάτων. Αυτό σημαίνει ότι η πλειοψηφία των οχημάτων διέρχεται απ' τις καμπύλες με σχεδόν μηδενικές ή πολύ μικρές τιμές παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης.
- Στη περίπτωση που τα ταχεία οχήματα δεν αποτελούν τον επικρατέστερο αριθμό των οχημάτων στην γραμμή οι τιμές της παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης προς το εξωτερικό της καμπύλης είναι υψηλές, μέχρι εξαντλήσεως πιθανώς των ανώτατων τιμών της. Για να αποφευχθεί η υπέρβαση των ανώτατων αυτών τιμών επιβάλλεται η μείωση της ταχύτητας των οχημάτων αυτών, δημιουργούνται δηλαδή σημεία βραδυπορείας.
- Στην αντίθετη περίπτωση που τα βραδέα οχήματα αποτελούν την μειοψηφία στην γραμμή, οι τιμές της παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης προς το εσωτερικό της καμπύλης είναι υψηλές, με αρνητικά αποτελέσματα στην άνεση των επιβατών.
- Η σιδηροτροχιά που καταπονείται περισσότερο, λόγω της συχνότερης καταπόνησής της από τον επικρατέστερο αριθμό των οχημάτων, ανακουφίζεται. Έτσι η φθορά των σιδηροτροχιών εξισορροπείται ανάμεσα σε αυτήν που καταπονείται περισσότερο και σε εκείνη που καταπονείται λιγότερο. Για

παράδειγμα, αν ο επικρατέστερος αριθμός των οχημάτων είναι ταχεία οχήματα, η υπερύψωση που θα εφαρμοστεί στην γραμμή θα είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μειώνονται οι επιπονήσεις και οι φθορές στην εξωτερική σιδηροτροχιά. Η εσωτερική σιδηροτροχιά, εξάλλου, θα καταπονείται ούτως ή άλλως λιγότερο από τον μειωμένο αριθμό βραδέων οχημάτων που κυκλοφορούν στην γραμμή.

Το μόνο μειονέκτημα λοιπόν που παρουσιάζει η μέθοδος αυτή ως προς την μέθοδο της κανονικής υπερύψωσης του κανονισμού του ΟΣΕ, είναι ότι θα υπάρξουν σημεία βραδυπορείας αν στο δίκτυο επικρατούν μικρές ταχύτητες. Αν όμως ληφθεί υπόψη ότι γενικά υπάρχει η τάση της βελτίωσης των ταχυτήτων στα σιδηροδρομικά δίκτυα, η πιθανότητα αυτή μειώνεται.

Τέλος, έγινε η διαπίστωση ότι κάθε εγχειρίδιο προσεγγίζει το αντικείμενο των υπερυψώσεων σύμφωνα με την «παράδοση» της χώρας που αντιπροσωπεύει. Έτσι, οι Αμερικάνοι μετρούν την υπερύψωση σε inches και την εκφράζουν συναρτήσει της ταχύτητας $V(\text{mph})$ και της γωνίας D° που αντιστοιχεί σε τόξο 100ft της καμπύλης. Αντίθετα, ο κανονισμός του ΟΣΕ και το βρετανικό εγχειρίδιο εκφράζουν την υπερύψωση ως συνάρτηση της ταχύτητας $V(\text{km/h})$ και της ακτίνας της καμπύλης $R(\text{m})$ και την μετρούν σε mm.

1.2 ΠΡΑΝΕΣ ΥΠΕΡΥΨΩΣΗΣ–ΚΑΜΠΥΛΗ Ή ΤΟΞΟ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ

Ως προς τα πρανή υπερύψωσης και τα αντίστοιχα τόξα συναρμογής αναλύθηκε η παρακάτω βιβλιογραφία:

- N.K.E.Γ. του ΟΣΕ
- American Railway Track
- Manual for Railway engineering, American Railway Engineering Assosiation, 1992
- British Track Geometry
- Fürmetz R: “Der Gleisplan” Bayverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin, 1985
- Kohler J: “Gleisgeometrie”, traspress VEB Verlag für Verkehrswesen
- Schramm G: “Gestaltung der Überhohungsrampen“, Eisenbahningenieur 26 , 1975
- Unudruck fur Grundvurleistung 2003, Lehrstuhl fur Bau von Landverkehrswegen
TU Munchen

Κατά την μετάβαση από την ευθυγραμμία σε ένα κυκλικό τόξο ή από ένα κυκλικό τόξο σε ένα άλλο διαφορετικής καμπυλότητας, πραγματοποιείται απότομη μεταβολή της καμπυλότητας. Από την μεταβολή αυτή της καμπυλότητας προκαλείται απότομη μεταβολή της πλευρικής επιτάχυνσης, η οποία εξαρτάται άμεσα από την ακτίνα. Η μεταβολή της πλευρικής επιτάχυνσης με τον χρόνο ονομάζεται τίναγμα C και δίνεται από τον τύπο $C = \frac{db}{dt}(m \cdot s^{-3})$, όπου b η πλευρική επιτάχυνση σε m/sec^2 . Κατά την μετάβαση του οχήματος από ένα στοιχείο της χάραξης σε ένα άλλο με διαφορετική καμπυλότητα η μεταβολή της πλευρικής επιτάχυνσης είναι σημαντική, ενώ η μεταβολή του χρόνου σχεδόν μηδενική. Έτσι, το τίναγμα λαμβάνει μεγάλες τιμές.

Το τίναγμα έχει άμεση σχέση με την άνεση των επιβατών, την καταπόνηση των μεταφερόμενων εμπορευμάτων και την καταπόνηση των στοιχείων του συστήματος, Για την μείωση της τιμής του, ειδικά στα ευαίσθητα σημεία μετάβασης, τοποθετείται καμπύλη συναρμογής ανάμεσα στην ευθυγραμμία και στο κυκλικό τόξο ή ανάμεσα στα δύο κυκλικά τόξα διαφορετικής καμπυλότητας.

Έτσι, η καμπύλη ή τόξο συναρμογής είναι μία καμπύλη όπου η καμπυλότητα μεταβάλλεται ομαλά, με έναν συγκεκριμένο τρόπο.

Κατά μήκος του κυκλικού τόξου η υπερύψωση έχει μία συγκεκριμένη σταθερή τιμή, ενώ στην ευθυγραμμία δεν εφαρμόζεται υπερύψωση. Η μεταβολή της υπερύψωσης δεν είναι δυνατόν να γίνει απότομα, αλλά πρέπει να αυξάνεται βαθμιαία. Το τμήμα της γραμμής στο οποίο λαμβάνει χώρα αυτή η βαθμιαία μεταβολή της υπερύψωσης από την μηδενική μέχρι την κανονική της τιμή ονομάζεται πρανές υπερύψωσης.

Το μήκος του πρανούς υπερύψωσης είναι ίσο με το μήκος της καμπύλης συναρμογής.

Η πρόβλεψη αυτή γίνεται για τους εξής δύο λόγους:

α. Αν το μήκος του πρανούς υπερύψωσης ήταν μεγαλύτερο από το μήκος της καμπύλης συναρμογής αυτό θα σήμαινε ότι ένα μέρος του πρανούς θα βρισκόνταν στην ευθυγραμμία ή στην καμπύλη, με αποτέλεσμα η υπερύψωση σε αυτό το κομμάτι της ευθυγραμμίας να είναι διάφορη του μηδενός. Στην περίπτωση αυτή, απουσία της φυγοκέντρου λόγω ευθυγραμμίας, θα καταπονείτο η εσωτερική σιδηροτροχιά.

β. Αν το μήκος του πρανούς υπερύψωσης ήταν μικρότερο, τότε ένα τμήμα της καμπύλης θα στερείτο υπερύψωσης, με αποτέλεσμα την μη πλήρη εξισορρόπηση της φυγοκέντρου και την καταπόνηση της εξωτερικής σιδηροτροχιάς.

Στο ίδιο μήκος λοιπόν σιδηροδρομικής γραμμής λαμβάνει χώρα τόσο η μεταβολή της καμπυλότητας (καμπύλη ή τόξο συναρμογής) όσο και η μεταβολή της υπερύψωσης h (πρανές υπερύψωσης). Τέλος, η μεταβολή της καμπυλότητας όσο και της υπερύψωσης πραγματοποιείται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ή το διάγραμμα καμπυλότητας και το διάγραμμα υπερύψωσης έχουν ακριβώς την ίδια μορφή.

Η πιο απλή μορφή το πρανούς υπερύψωσης, η οποία και χρησιμοποιήθηκε αρχικά, είναι το ευθύγραμμο πρανές. Στο πρανές αυτό η υπερύψωση αυξάνεται γραμμικά. Για τον υπολογισμό του τίθενται ανώτατα όρια για τον ρυθμό αύξησης της υπερύψωσης, τον ρυθμό αύξησης της ανεπάρκειας της υπερύψωσης, καθώς και κατασκευαστικά όρια. Έτσι, προκύπτουν ανώτατες τιμές για την κλίση του πρανούς και κατώτατα όρια για το μήκος του. Στους γερμανικούς κανονισμούς μόνο, για την αποφυγή πολύ μεγάλων μηκών πρανών όπου η υπερύψωση μεταβάλλεται πολύ αργά, ορίζονται κατώτατα όρια για τις κλίσεις και ανώτατες τιμές για τα μήκη των πρανών.

Σε συνδυασμό με το ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης τοποθετείται το τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας. Η απαίτηση αυτή για γραμμική αύξηση της καμπυλότητας μπορεί να ικανοποιηθεί από την κλωθοειδή καμπύλη. Η κλωθοειδής καμπύλη είναι ένα σπινάλι, όπου το γινόμενο της ακτίνας της καμπύλης και του μήκους της είναι σταθερό σε κάθε σημείο της ή αλλιώς η ακτίνα της μειώνεται αυξανόμενου του μήκους της. Υπολογίζεται μέσω ανάπτυξης σειρών, για το λόγο αυτό ο υπολογισμός της είναι πολλές φορές δυσχερής.

Η κλωθοειδής μπορεί σε κάθε πραγματική περίπτωση να αντικατασταθεί από την κυβική παραβολή, ειδικά στην αρχική της περιοχή. Έτσι, η κλωθοειδής πρακτικά αντικαθιστάται από την κυβική παραβολή, που υπολογίζεται εύκολα, σαν ένα τόξο 3^{ου} βαθμού.

Οι περιορισμοί που ισχύουν για το μήκος του πρανούς υπερύψωσης, ισχύουν και για το μήκος του τόξου συναρμογής, εφόσον αυτά τα δύο συμπίπτουν. Για το τόξο συναρμογής υπεισέρχεται στον υπολογισμό άλλος ένας καθοριστικός παράγοντας, η μέγιστη τιμή

που μπορεί να λάβει το τινάγμα C. Τα μεγέθη που επηρεάζουν το μήκος του τόξου συναρμογής είναι η ταχύτητα η υπερύψωση και η ανεπάρκεια της υπερύψωσης ανάλογα και η ακτίνα της καμπύλης αντιστρόφως ανάλογα.

Αιτία για την χρησιμοποίηση των τόξων συναρμογής με μη-γραμμική αύξηση της καμπυλότητας στάθηκε η ανάγκη για αύξηση των ταχυτήτων στους σιδηροδρόμους. Η αύξηση της ταχύτητας προκαλεί αύξηση του τινάγματος και της περιστροφικής επιτάχυνσης στα ευαίσθητα σημεία ένωσης της ευθυγραμμίας με το κυκλικό τόξο ή των κυκλικών τόξων διαφορετικής καμπυλότητας. Η λύση ήταν να «στρογγυλευθεί» το πρηνές υπερύψωσης και κατ' επέκταση και το διάγραμμα καμπυλότητας στα άκρα τους, αποκτώντας έτσι καμπύλη μορφή.

Το μη-γραμμικό πρηνές υπερύψωσης αποτελείται από δύο καμπύλες αντισυμμετρικές ως προς το κέντρο του πρηνούς. Οι μορφές που χρησιμοποιούνται για τα μη-γραμμικά πρηνή υπερύψωσης και τα αντίστοιχα τόξα συναρμογής είναι:

- Το πρηνές υπερύψωσης με αύξηση της υπερύψωσης με την μορφή τετραγωνικής παραβολής (p-πρηνές) και το αντίστοιχο τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή τετραγωνικής παραβολής (p-τόξο συναρμογής-4^{ου} βαθμού)
- Το πρηνές υπερύψωσης με αύξηση της υπερύψωσης με την μορφή κυβικής παραβολής, το οποίο αλλιώς ονομάζεται πρηνές υπερύψωσης Bloss (b-πρηνές) και το αντίστοιχο τόξο συναρμογής με αύξηση της καμπυλότητας με την μορφή κυβικής παραβολής, που αλλιώς ονομάζεται τόξο συναρμογής Bloss (b-τόξο συναρμογής-5^{ου} βαθμού)
- Το πρηνές υπερύψωσης Sinus και το αντίστοιχο τόξο συναρμογής Sinus.

Από την χρησιμοποίηση των παραπάνω πρηνών υπερύψωσης και τόξων συναρμογής προέκυψε άλλο ένα σημαντικό όφελος: Η αύξηση της ταχύτητας προκάλεσε αύξηση της ανώτατης τιμής για το μήκος του τόξου συναρμογής που εξαρτάται από το τινάγμα C. Έτσι, το μήκος του τόξου συναρμογής αυξήθηκε, προκαλώντας αύξηση της εκτροπής f του κυκλικού τόξου. Οι μεγάλες αυτές τιμές της εκτροπής πολλές φορές καθιστούσαν κατασκευαστικά ανέφικτη και οικονομικά ασύμφορη την βελτίωση των ταχυτήτων στις γραμμές. Με τα παραπάνω τόξα συναρμογής, που αποκτούν πολύ μικρότερες τιμές

εκτροπής για το ίδιο μήκος τόξου με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας, δόθηκε μία λύση. Για παράδειγμα, το p -τόξο συναρμογής απαιτεί μία κατά 50% μικρότερη εκτροπή από το τόξο με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας για το ίδιο μήκος.

Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι τα πρανή υπερύψωσης και τα τόξα συναρμογής με μη-γραμμική αύξηση της υπερύψωσης και της καμπυλότητας αντίστοιχα, κατασκευάζονται για την εξυπηρέτηση υψηλών ταχυτήτων, εφόσον είναι και κατασκευαστικά πιο δύσκολα και οικονομικά ασύμφορα και εφόσον το ευθύγραμμο πρανές είναι ικανοποιητικό για μικρές και μεσαίες ταχύτητες. Επίσης ότι το p -πρανές υπερύψωσης και τόξο συναρμογής παρουσιάζει τα περισσότερα πλεονεκτήματα σε σχέση με τα s και b πρανή υπερύψωσης και τόξα συναρμογής, τόσο ως προς τις μικρότερες εκτροπές που απαιτεί, όσο και ως προς τις μικρότερες τιμές τινάγματος και περιστροφικής επιτάχυνσης στα άκρα του, καθώς και ως προς την ευκολία του υπολογισμού του σε σχέση με τα b και s πρανή. Έτσι προτιμάται κατά κόρον σε σχέση με τα άλλα δύο είδη.

Τέλος, έγινε η διαπίστωση ότι κάθε εγχειρίδιο προσεγγίζει το αντικείμενο των υπερυψώσεων σύμφωνα με την «παράδοση» της χώρας που αντιπροσωπεύει. Έτσι, οι Αμερικάνοι εκφράζουν το τόξο συναρμογής με την μεταβολή της γωνίας D° -που αντιστοιχεί σε τόξο 100ft της καμπύλης -σε συνάρτηση με το μήκος του τόξου. Αντίθετα, οι κανονισμοί των ευρωπαϊκών βιβλιογραφιών περιγράφουν το τόξο συναρμογής με την μεταβολή της καμπυλότητας αυξανόμενου του μήκους του τόξου.

2. ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

2.1 Συμπέρασμα 1ο

Ο κανονισμός του ΟΣΕ και οι γερμανικοί κανονισμοί προτείνουν ότι σε μία γραμμή που εξυπηρετεί ένα φάσμα ταχυτήτων με μέγιστη ταχύτητα $V_{\max}$ και ελάχιστη $V_{\min}$,

εφαρμόζεται η κανονική υπερύψωση με τύπο $h_k = 7.12 \frac{V_{\max}^2}{R}$, όπου $V_{\max}$ η μέγιστη

ταχύτητα σε km/h και R η ακτίνα της καμπύλης.

Στους αμερικάνικους κανονισμούς προτείνεται η εφαρμογή της θεωρητικής υπερύψωσης της ταχύτητας του επικρατέστερου αριθμού των οχημάτων σε μία σιδηροδρομική γραμμή μεικτής κυκλοφορίας.

Στους βρετανικούς κανονισμούς, προτείνεται η εφαρμογή της θεωρητικής υπερύψωσης του μέσου όρου των ταχυτήτων της γραμμής σε μία σιδηροδρομική γραμμή μεικτής κυκλοφορίας.

ΣΧΟΛΙΟ: Στην μέθοδο της κανονικής υπερύψωσης δεν γίνεται καμία πρόβλεψη για την ποσοστιαία κατανομή των ταχυτήτων στο δίκτυο, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται μεγάλες τιμές παραμένουσας πλευρικής επιτάχυνσης και μεγάλες φθορές στην σιδηροτροχιά που καταπονείται περισσότερο, ανάλογα με τις επικρατέστερες ταχύτητες στο δίκτυο. Οι μέθοδοι των αμερικάνικων και βρετανικών κανονισμών-που είναι παρόμοιες-υπερτερούν τις κανονικής υπερύψωσης για τους λόγους που η κανονική υπερύψωση υστερεί, ενώ παρουσιάζουν το μειονέκτημα ότι μπορεί να δημιουργηθούν σημεία βραδυπορείας στο δίκτυο για τα ταχεία οχήματα.

2.2 Συμπέρασμα 2ο

Σε ένα σιδηροδρομικό δίκτυο, που εξυπηρετεί ένα φάσμα ταχυτήτων με μέγιστη ταχύτητα $V_{\max}$ και ελάχιστη $V_{\min}$, η τιμή της κανονικής υπερύψωσης που θα εφαρμοστεί είναι σταθερή για την ίδια $V_{\max}$, ανεξάρτητα από τις τιμές που μπορεί να λάβει η $V_{\min}$. Δηλαδή, η τιμή της κανονικής υπερύψωσης εξαρτάται αποκλειστικά από την τιμή της $V_{\max}$.

2.3 Συμπέρασμα 3ο

Ο Ν.Κ.Ε.Γ., οι αμερικάνικοι και οι βρετανικοί κανονισμοί αναφέρονται μόνο στο ευθύγραμμο πρανές υπερύψωσης σε συνδυασμό με το τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας. Αντίθετα οι γερμανικοί κανονισμοί προτείνουν την χρησιμοποίηση σε υψηλές ταχύτητες των καμπύλων πρανών και των αντίστοιχων τόξων συναρμογής.

2.4 Συμπέρασμα 4ο

Με τα καμπύλα πρανή μειώνεται η κατακόρυφη επιτάχυνση στα σημεία αρχής και τέλους του πρανούς, εξασφαλίζοντας μεγαλύτερη άνεση για τους επιβάτες σε σχέση με το ευθύγραμμο πρανές.

2.5 Συμπέρασμα 5ο

Τα τόξα συναρμογής p , b και s απαιτούν πολύ μικρότερες εκτροπές σε σχέση με το τόξο συναρμογής που αντιστοιχεί στο ευθύγραμμο πρανές για ίδιο μήκος τόξου συναρμογής και ίδια ακτίνα κυκλικού τόξου.

ΣΧΟΛΙΟ:

- Με την χρησιμοποίησή τους παρέχεται η δυνατότητα για βελτίωση των ταχυτήτων σε μία γραμμή-εφόσον λόγω της αυξημένης ταχύτητας, το μεγαλύτερο μήκος του τόξου συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας θα απαιτούσε και μεγαλύτερη εκτροπή, συχνά απαγορευτική τεχνικά σε ήδη υπάρχουσες γραμμές. Δηλαδή: κρατώντας σταθερή την τιμή της εκτροπής και του μήκους του τόξου συναρμογής, υπάρχει η δυνατότητα αύξησης της ταχύτητας.
- Αντίστροφα, με την χρησιμοποίηση των παραπάνω τόξων συναρμογής, κρατώντας σταθερή την τιμή της εκτροπής και της ταχύτητας, μειώνεται το μήκος του τόξου συναρμογής σε σχέση με αυτό που θα απαιτούσε το τόξο συναρμογής με γραμμική αύξηση της καμπυλότητας, προσφέροντας οικονομικότητα.

2.6 Συμπέρασμα 6ο

Τα καμπύλα πρανή, δηλαδή το p -πρανές, το b -πρανές και το s -πρανές, παρουσιάζουν ασημάντες διαφορές μεταξύ τους, τόσο ως προς την διαφορά των υπερυψώσεων τους σε κάθε σημείο τους, όσο και ως προς τις κλίσεις τους. Επίσης, τα τόξα συναρμογής p , b και s παρουσιάζουν μηδαμινές διαφορές ως προς τις εκτροπές.

- Είναι λοιπόν στις περισσότερες περιπτώσεις ασύμφορη η χρησιμοποίηση των πρανών b και s αντί του p -πρανούς, εφόσον το τελευταίο αποτελεί την ιδανική διαμόρφωση τόσο ως προς την αντιμετώπιση της περιστροφικής επιτάχυνσης στην αρχή και στο τέλος των πρανών, όσο και ως προς την ευκολία των υπολογισμών του σε σχέση με τα b και s πρανή.