

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗΣ ΥΠΟΔΟΜΗΣ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΑΝΤΩΝΗΣ ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ Γ. ΦΛΕΣΣΑΣ

**ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗ ΣΤΑΘΜΩΝ ΟΧΗΜΑΤΩΝ ΠΑΡΟΧΗΣ ΒΟΗΘΕΙΑΣ
ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΟΔΟΥ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αθήνα, Μάρτιος 2003

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ, ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ABSTRACT, SUMMARY

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

**2.ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗ ΣΤΑΘΜΩΝ ΟΧΗΜΑΤΩΝ ΠΑΡΟΧΗΣ
ΒΟΗΘΕΙΑΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΟΔΟΥ ΜΕ Η ΧΩΡΙΣ
ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΕΠΙ ΤΟΠΟΥ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗΣ**

**2.1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΥΟ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ,
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ.**

**2.2. 1^Η ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ: U-TURN ΕΠΙΤΡΕΠΤΟ ΣΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ
ΘΕΣΕΙΣ.**

**1^Ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΝΤΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΜΙΑΣ
ΜΟΝΑΔΑΣ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΣΕ ΟΔΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΕ
ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΠΕΡΙΣΤΑΤΙΚΟΥ ΕΓΚΑΙΡΗΣ ΕΠΕΜΒΑΣΗΣ
ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ.**

**2^Ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΝΤΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΜΙΑΣ
ΜΟΝΑΔΑΣ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΣΕ ΟΔΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΕ ΜΗ
ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΠΕΡΙΣΤΑΤΙΚΟΥ ΕΓΚΑΙΡΗΣ ΕΠΕΜΒΑΣΗΣ
ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ.**

**2.3. 2^Η ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ: U-TURN ΕΠΙΤΡΕΠΤΟ ΣΤΙΣ ΘΕΣΕΙΣ
0,Γ,Ι.**

**3^Ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΝΤΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΜΙΑΣ
ΜΟΝΑΔΑΣ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΣΕ ΟΔΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΕ
ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΠΕΡΙΣΤΑΤΙΚΟΥ ΕΓΚΑΙΡΗΣ ΕΠΕΜΒΑΣΗΣ
ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ.**

3.ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ Μ/Γ/Ι.

4.ΠΡΟΤΥΠΟ ΜΕ ΔΥΟ ΚΕΝΤΡΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ.

**4.1. ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΗ
ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΗΣ ΟΥΡΑΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ .**

4.2. ΓΕΝΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ.

4.3. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΟΔΟΥ.

4.4. ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΕΡΙΟΧΗΣ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ.

5.ΚΥΒΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΑΝΑΜΟΝΗΣ.

5.1. ΜΕΡΙΚΕΣ ΧΡΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ.

5.2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ.

5.3. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΡΙΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ

5.4. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

5.5. ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΒΑΣΙΚΟΥ ΚΥΒΙΚΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ.

6. ΥΠΕΡΚΥΒΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ
 - 6.1. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ.
 - 6.2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΦΟΡΤΟΥ.
 - 6.3. ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΡΙΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ.
 - 6.4. ΠΟΣΟΣΤΟ ΑΠΟΣΤΟΛΩΝ ΔΙΑ ΣΥΝΕΡΓΑΖΟΜΕΝΩΝ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΩΝ ΟΝΤΟΤΗΤΩΝ.
 - 6.5. ΧΩΡΟΤΑΞΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΚΑΤΕΙΛΗΜΜΕΝΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ.
7. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ Α.ΟΔΟΝΙ ΓΙΑ ΜΙΑ ΟΔΟ 10 ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗ ΜΕ $N=2, \dots, 20$ ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ.
8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.
9. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.
10. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

Σύντομη Περίληψη: Στην παρούσα εργασία μελετάται η λειτουργία ενός συστήματος παροχής άμεσης βοήθειας κατά μήκος οδού. Αρχικά τίθεται το πρόβλημα της βέλτιστης χωροθέτησης μίας μονάδας ανταπόκρισης σε οδικό τμήμα έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ των θέσεων των συμβάντων που απαιτούν εξυπηρέτηση και της σταθερής ή όχι θέσης της μονάδας εξυπηρέτησης να γίνεται ελάχιστη. Επίσης υπολογίζεται ο φόρτος λειτουργίας κάθε μονάδας εξυπηρέτησης όταν επιχειρούν στο αντίστοιχο σύστημα αναμονής από $N=2$ έως $N=20$ μονάδες, για αυθαίρετες πολιτικές προτίμησης αποστολών και αυθαίρετα διαμορφωμένες περιοχές ευθύνης.

Λέξεις Κλειδιά: Συστήματα Άμεσης Βοήθειας, Χωροθέτηση ,
Γεωμετρική Πιθανότητα, Αλγόριθμος A.Odoni

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετάται η λειτουργία ενός συστήματος παροχής άμεσης βοήθειας κατά μήκος αστικής ή υπεραστικής οδού. Αρχικά τίθεται το πρόβλημα της βέλτιστης χωροθέτησης μίας μονάδας ανταπόκρισης σε οδικό τμήμα έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ των θέσεων των συμβάντων που απαιτούν εξυπηρέτηση και της σταθερής ή όχι θέσης της μονάδας εξυπηρέτησης να γίνεται ελάχιστη. Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα της ανάλυσης αυτής στη συνέχεια θα υπολογιστεί ο φόρτος λειτουργίας κάθε μονάδας εξυπηρέτησης του συστήματος αναμονής όταν επιχειρούν σε αυτό $N=2$ έως $N=20$ μονάδες.

Στο δεύτερο κεφάλαιο πέφτει το βάρος στη χωροταξική φύση του προβλήματος θεωρώντας μία μονάδα εξυπηρέτησης, αλλά χωρίς να ληφθούν υπόψη οι συνιστώσες της αβεβαιότητας και του κορεσμού. Αρχικά θα εκφραστεί ο νόμος πιθανότητας της απόστασης D μεταξύ της θέσης της μονάδας ανταπόκρισης και της θέσης του περιστατικού άμεσης βοήθειας. Ανάλογα με τη διαμόρφωση της οδού (δυνατότητα U-TURN ή όχι) η απόσταση αυτή διαφέρει.

Παίρνοντας ως παράδειγμα ένα οδικό τμήμα μοναδιαίου μήκους (1km) και εκφράζοντας με δύο τυχαίες μεταβλητές X_1 , X_2 τις πιθανές θέσεις των αιτήσεων για εξυπηρέτηση και τις πιθανές θέσεις της μονάδας ανταπόκρισης αντίστοιχα, θα υπολογιστεί η από κοινού συνάρτηση κατανομής της συνάρτησης D . Στην πρώτη προσέγγιση θεωρείται ομοιόμορφη κατανομή των περιστατικών άμεσης βοήθειας κατά μήκος της οδού. Στη δεύτερη προσέγγιση θεωρείται ότι στο σημείο α υπάρχει κόμβος, με αποτέλεσμα να διαφοροποιείται ο φόρτος της κυκλοφορίας στα τμήματα $[0,\alpha]$, $[\alpha,1]$. Σε κάθε θέση της οδού η πιθανότητα να συμβεί περιστατικό άμεσης βοήθειας είναι ανάλογη των οχηματο χιλιομέτρων του οδικού τμήματος στο οποίο βρίσκεται η θέση αυτή. Για διαφορετικές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X_2 , δηλαδή για διαφορετικές πολιτικές χωροθέτησης της μονάδας ανταπόκρισης, υπολογίζεται η μέση τιμή και η διασπορά της D σε κάθε μία από τις δύο προσεγγίσεις. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να βρεθεί η βέλτιστη θέση της μονάδας ανταπόκρισης για την οποία $D=D_{\min}$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία σε μοναδιαίο οδικό τμήμα με δυνατότητα επιτόπου αναστροφής στην αρχή, στο τέλος και σε ένα εσωτερικό διάστημα μήκους L ($0 < L < 1$) θα εξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με την βέλπστη στρατηγική χωροθέτησης της μονάδας ανταπόκρισης για ομοιόμορφα κατανεμημένη ζήτηση κατά μήκος του οδικού τμήματος. Επιπλέον θα ποσοτικοποιηθεί η επιβάρυνση που προκαλεί η κατασκευή διαχωριστικής νησίδας, συναρτήσει του μήκους L του εσωτερικού της ανοίγματος και της σχετικής του θέσης γ .

Στο τρίτο κεφάλαιο προκτομιάζεται το σύστημα άμεσης βοήθειας αποκλειστικά ως ένα σύστημα αναμονής customer to server, έχοντας κατά νου τα συμπεράσματα του πρώτου κεφαλαίου αλλά χωρίς να ληφθεί υπόψη η συνιστώσα της αβεβαιότητας. Θεωρείται ότι όλες οι μονάδες ανταπόκρισης έχουν ανεξάρτητες πανομοιότυπα κατανεμημένους χρόνους εξυπηρέτησης με μέση τιμή $1/\mu$. Ξεκινώντας από τη λειτουργία του συστήματος με ένα κέντρο εξυπηρέτησης και την περιγραφή του από τη θεωρία M/G/1, εξετάζεται στη συνέχεια στο τέταρτο κεφάλαιο η λειτουργία του συστήματος με δύο κέντρα εξυπηρέτησης, οπότε γίνεται μία πρώτη προσέγγιση των αναλυτικών εκφράσεων στις οποίες θα καταλήξουμε διερευνώντας συστήματα N – κέντρων εξυπηρέτησης (τα οποία απαιτούν επίλυση με τη βοήθεια H/Y). Στο πέμπτο κεφάλαιο εξετάζεται η λειτουργία του συστήματος με τρία κέντρα – μονάδες εξυπηρέτησης.

Στο έκτο κεφάλαιο αναλύεται ο αλγόριθμος προσεγγιστικής διαδικασίας του A.ODONI ο οποίος απαιτεί την επίλυση N καταστατικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των φόρτων λειτουργίας κάθε μίας από τις N το πλήθος μονάδες ανταπόκρισης ενός συστήματος αναμονής.

Στο έβδομο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων της επίλυσης του αλγορίθμου στο MICROSOFT EXCEL για εύρος λειτουργίας από N=1 έως N=20 μονάδες εξυπηρέτησης συναρτήσει του βαθμού χρησιμοποίησης του συστήματος ρ.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την εργασία είναι τα εξής:
 1^ο. Σε οδικά τμήματα εν σειρά χωρίς διαχωριστική νησίδα, η τοποθέτηση των μονάδων άμεσης βοήθειας πρέπει να γίνεται στη χιλιομετρική θέση που αντιστοιχεί στο κέντρο βάρους της συνάρτησης των οχηματοχιλιομέτρων όπως αυτή υπολογίζεται από τις μετρήσεις κυκλοφοριακού φόρτου σε κάθε τμήμα. Αντίστοιχα, σε οδικά τμήματα εν σειρά με μη διακοπτόμενη διαχωριστική νησίδα η τοποθέτηση των μονάδων άμεσης βοήθειας πρέπει να γίνεται στη χιλιομετρική θέση που αντιστοιχεί στο κέντρο βάρους της συνάρτησης των οχηματοχιλιομέτρων όπως αυτή υπολογίζεται από τις μετρήσεις κυκλοφοριακού φόρτου σε κάθε κατεύθυνση κυκλοφορίας κάθε τμήματος.

2^ο. Η ύπαρξη νησίδας άνευ ανοίγματος κατά μήκος οδικού τμήματος σταθερού φόρτου επιβαρύνει την μέση τιμή της προσδοκώμενης απόστασης D κατά 50% όταν η ζήτηση για παροχή εξυπηρέτησης παρέχεται από μία και μόνο μονάδα ανταπόκρισης στο τμήμα αυτό.

3^ο. Η ύπαρξη ανοίγματος μεταξύ δύο διαδοχικών τμημάτων μη διακοπτόμενης νησίδας επιβαρύνει τη μέση τιμή της προσδοκώμενης τιμής D σε ποσοστό που εξαρτάται από το σχετικό του μήκος και την σχετική του θέση.

4^ο. Ο προκαθορισμός μίας πολύ επίπεδης στρατηγικής αλληλο κάλυψης

μεταξύ των N το πλήθος μονάδων ανταπόκρισης όπως αυτή εκφράζεται από το $N \times N$ μητρώο προκαθορισμένων πολιτικών εκχώρησης αιτήσεων (predefined dispatch preferences) αυξάνει την αντίσταση του συστήματος έναντι κορεσμού γιατί εξαντλεί τη δυνατότητα αποστολής κάθε διατιθέμενου πόρου. Το χαρακτηριστικό αυτό οφείλεται στην γεωμετρική αύξηση της εξάρτησης της συν-λειτουργίας μεταξύ των μονάδων ανταπόκρισης καθώς το σύστημα αναμονής πλησιάζει την κατάσταση κορεσμού. Η διαμόρφωση του μητρώου αυτού διατηρεί μία απλότητα όταν μελετώνται προβλήματα κατανεμημένων πόρων σε μονοδιάστατη περιοχή εξυπηρέτησης. (οδικά τμήματα εν σειρά)

5^ο. Η μεταβολή του φόρτου λειτουργίας κάθε μονάδας εξυπηρέτησης όταν υφίσταται μη ανεξάρτητη λειτουργία μεταξύ αυτών, είναι συνάρτηση δύναμης του βαθμού χρησιμοποίησης του συστήματος ρ .

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα σύστημα παροχής άμεσης βοήθειας με περιοχή εξυπηρέτησης έναν οδικό άξονα , είτε αστικό είτε υπεραστικό, αποτελεί μία ειδική διαμόρφωση ενός τυπικού συστήματος αναμονής, λόγω της έμφυτης ικανότητας της αλλαγής θέσης κάθε μίας εκ των μονάδων που παρέχουν την εξυπηρέτηση κάθε χρονική στιγμή. Στη δυνατότητα αυτή των μονάδων αντιστοιχίζουμε ένα βαθμό ελευθερίας εφόσον η περιοχή εξυπηρέτησης είναι μονοδιάστατη, δύο όταν είναι δισδιάστατη κ.ο.κ. Επιπλέον μπορούμε να αναγνωρίσουμε και μερικά άλλα χαρακτηριστικά τα οποία διαφοροποιούν το σύστημα που θα μελετήσουμε από ένα τυπικό σύστημα αναμονής:

1. Τα στοιχεία **αβεβαιότητας** αναφέρονται στην χρονική στιγμή εμφάνισης του συμβάντος που χρίζει επέμβαση, στον εντοπισμό της περιοχής γέννησής του και ίσως στην χρονική διάρκεια κατάληψης ή ακόμα και στην ποσότητα των πόρων που πρέπει να δεσμευτούν.
2. Η **χωροταξική σύνθεση** της περιοχής εξυπηρέτησης πηρίζει ρόλο κλειδί στον τρόπο με τον οποίο παρέχεται η εξυπηρέτηση. Ιδιαίτερος σημαντικός είναι η χωροταξική κατανομή της ζήτησης και τα χαρακτηριστικά διαμετακόμισης από το ένα σημείο στο άλλο.

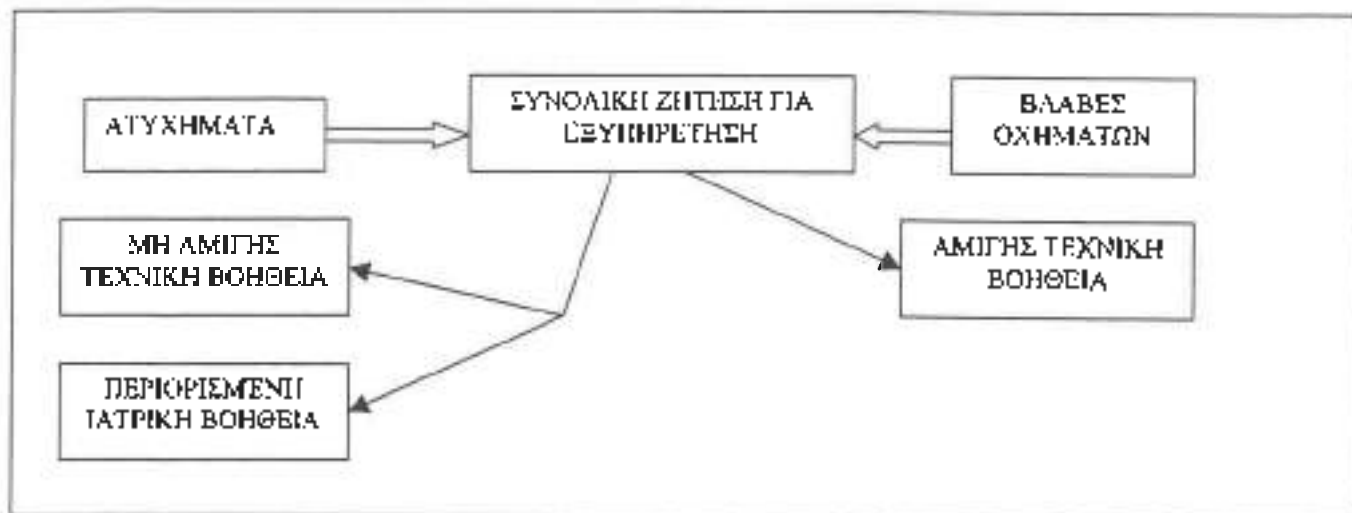
Επίσης κατά την παροχή της εξυπηρέτησης , είναι πολύ πιθανό να προκύψει **κορεσμός** με πολλές μορφές όπως σε όλα τα συστήματα αναμονής. Αυτό οφείλεται σε αβεβαιότητες στις απαιτήσεις της εξυπηρέτησης και στον πεπερασμένο αριθμό των πόρων που μπορεί να εκχωρηθούν σε κάθε συγκεκριμένη αίτηση για εξυπηρέτηση.

Οι αβεβαιότητες δίνουν αφορμή για πιθανοκρατικές αναλύσεις. Η χωροταξική φύση του προβλήματος απαιτεί εργαλεία παρμένα από το χώρο των δισδιάστατων κατανομών. Ο κορεσμός απαιτεί μία ανάλυση βασισμένη στη θεωρία αναμονής. Το τρίπτυχο αυτό παρουσιάζεται σε κάθε χωροταξικά κατανεμημένο σύστημα αναμονής ανεξάρτητα από τη διάσταση της περιοχής εξυπηρέτησης. Έτσι η ανάλυση που θα ακολουθήσει παρότι έχει ως αφετηρία τη μελέτη ενός συστήματος παροχής άμεσης βοήθειας με περιοχή εξυπηρέτησης έναν οδικό άξονα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη οποιουδήποτε άλλου χωροταξικά κατανεμημένου συστήματος αναμονής. Για τον λόγο αυτό άλλωστε έγινε ο υπολογισμός των φόρτων ενός συστήματος για τις περιπτώσεις λειτουργίας του με $N=2...20$ μονάδες εξυπηρέτησης, μέσω της υλοποίησης του αλγορίθμου του A.Odoni στο Microsoft Excel.

Σε ένα αστικό σύνολο μια χωροταξικά κατανεμημένη ουρά αναμονής είναι μία ουρά στην οποία οι πελάτες ή ακόμα και οι μονάδες εξυπηρέτησης βρίσκονται διασκορπισμένοι μέσα στην περιοχή εξυπηρέτησης ή σε ένα τμήμα αυτής. Είτε ο υποψήφιος πελάτης οδεύει προς τον παροχέα της υπηρεσίας είτε συμβαίνει το αντίθετο. Η εξυπηρέτηση μπορεί να ολοκληρωθεί με μία επίσκεψη στο σημείο γέννησης του συμβάντος, μπορεί όμως και όχι αν το συμβάν αυτό δεν είναι άμεσα αντιμετωπίσιμο από την ιατρική ή την τεχνική υποδομή της κινητής μονάδας. Είναι δηλαδή δυνατή η παροχή ενός δευτέρου επιπέδου εξυπηρέτησης μακριά από το σημείο γέννησης του συμβάντος.

Μια πρώτη ανάλυση διαφοροποιεί τη ζήτηση σε περιστατικά που οφείλονται αποκλειστικά σε **βλάβες των οχημάτων** και απαιτούν την παροχή **αμιγούς τεχνικής εξυπηρέτησης** και σε περιστατικά που οφείλονται σε **ατυχήματα** και απαιτούν τόσο την παροχή άμεσης ιατρικής βοήθειας όσο και **τεχνικής εξυπηρέτησης**.

Η δεύτερη διαφοροποίηση αφορά τον όρο **αμιγής ή μη τεχνική εξυπηρέτηση**. Στην ανάλυση που ακολουθεί, ο όρος **αμιγής τεχνική εξυπηρέτηση** αντιστοιχεί σε μη μόνιμες βλάβες που αντιμετωπίζονται στα σημεία γέννησης των περιστατικών και σε μόνιμες βλάβες που απαιτούν την απομάκρυνση του οχήματος, και την παροχή ενός δευτέρου επιπέδου εξυπηρέτησης σε κάποιο άλλο σημείο αλλά δεν προκαλούνται από κάποιο ατύχημα. Επίσης, ο όρος **μη αμιγής τεχνική εξυπηρέτηση** αντιστοιχεί σε μόνιμες ως επί το πλείστο βλάβες που οφείλονται σε κάποιο ατύχημα οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα την απομάκρυνση του οχήματος και οι οποίες συνοδεύονται από την παροχή περιορισμένης αρχικά ιατρικής βοήθειας. Υποτίθεται ότι αρχικά γίνεται μία εκτίμηση της σοβαρότητας του ατυχήματος και ανάλογα με την σοβαρότητά του παρέχεται ένα δεύτερο επίπεδο ιατρικής εξυπηρέτησης από μία πιο εξειδικευμένη μονάδα ή όχι.



Σχήμα 1.1 Συνιστώσες ζήτησης σε ένα σύστημα παροχής άμεσης βοήθειας με μονοδιάστατη ή διαδιάστατη περιοχή εξυπηρέτησης

Αντίθετα με τις περισσότερες ουρές αναμονής παράλληλα συνδεδεμένων παροχών, οι χωροταξικώς κατανεμημένες ουρές αναμονής έχουν διακριτούς παροχείς, καθένα με διαφορετικά επιχειρησιακά χαρακτηριστικά (όπως διαφορετικοί φόρτοι και μέσοι χρόνοι εξυπηρέτησης). Έτσι η απεικόνιση της κατάστασης του συστήματος που θα μελετήσουμε πρέπει να εξασφαλίσει τον διαχωρισμό ανάμεσα στους κατελημμένους και τους διαθέσιμους παροχείς.

Η λειτουργία του συστήματος άμεσης βοήθειας που θα εξετάζουμε βασίζεται σε δύο βασικές θεωρήσεις:

1. Αιτήσεις για εξυπηρέτηση πηγάζουν σαν μία διαδικασία Poisson ως προς τον χρόνο, σε ολόκληρο τον οδικό άξονα ή σε ένα τμήμα του.
2. Σε ανταπόκριση κάθε αίτησης, είτε:
 - A. Ένας κινούμενος παροχέας (service unit-response unit) εκχωρείται να οδεύσει προς τον πελάτη και να παράσχει εξυπηρέτηση με την παρουσία του (και ίσως με την αποχώρησή του) ή
 - B. Ο πελάτης οδεύει πλησίον ενός σταθμού εξυπηρέτησης για να εξασφαλίσει εξυπηρέτηση.

Ο πρώτος τύπος εξυπηρέτησης καλείται server to customer. Μπορεί να είναι ένα σύστημα αντιμετώπισης έκτακτων αναγκών, για παράδειγμα αστυνομία, πυροσβεστική, ΕΚΑΒ, ένα κέντρο κοινωνικής μέριμνας που περιλαμβάνει επισκέψεις κατ' οίκον ή ένα σύστημα διανομής γευμάτων, αλληλογραφίας και γενικά καταναλωτικών

προϊόντων που η παραγγελία τους υλοποιείται μέσω mail order. Ο δεύτερος τύπος εξυπηρέτησης καλείται customer to server, και αντιστοιχεί με εξωτερικά ιατρεία νοσοκομείου, πολυδύναμα αστυνομικά τμήματα, κέντρα κοινωνικής μέριμνας όπως ΚΑΠΗ, δημοτικές βιβλιοθήκες κ.α.

Τυπικά, οι γεωμετρικές θεωρήσεις είναι σχεδόν παρόμοιες για τους δύο τύπους συστημάτων, αλλά τα χαρακτηριστικά των αντίστοιχων συστημάτων αναμονής τους διαφέρουν. Και στους δύο τύπους συστημάτων η εγγύτητα του παροχέα εξυπηρέτησης παίζει πρωτεύοντα ρόλο και συνήθως ο κοντινότερος server είναι αυτός που χρησιμοποιείται. Παρ' όλα αυτά στα συστήματα server to customer το γεγονός ότι ο πρώτος προτιμώμενος παροχέας (συνήθως ο πλησιέστερος) είναι απασχολημένος, δεν συνεπάγεται υποχρεωτικά καθυστέρηση λόγω αναμονής στην ουρά για τον πελάτη. Αντίθετα, η συνεργασία μεταξύ των παροχέων ή το μοίρασμα του φόρτου εξυπηρέτησης είναι δυνατό να έχει αποτέλεσμα την ανάθεση σε έναν κοντινό back up παροχέα της εντολής για παροχή εξυπηρέτησης. Με τον τρόπο αυτό οι πελάτες έχουν το διπλό πλεονέκτημα κάλυψης της ζήτησης που προκαλούν τόσο από έναν παροχέα με περιοχή ευθύνης επιπέδου «γειτονιάς», για τη πλειοψηφία των αιτήσεών τους, όσο και από τη λειτουργία ενός δεύτερου δικτύου εξυπηρέτησης, που έχει ως αποτέλεσμα μικρές καθυστερήσεις -στα πολλαπλά back up κέντρα που το αποτελούν- εξαιτίας της διαίρεσης του υφιστάμενου φόρτου. Στο σύστημα customer to server, ο υποψήφιος πελάτης θεωρείται ότι δεν είναι πρόθυμος να οδεύσει προς το δεύτερο ή το τρίτο πλησιέστερο κέντρο εξυπηρέτησης ακόμα κι αν μια τέτοια απόφαση ελαττώνει το συνολικό χρόνο εξυπηρέτησης. Αυτό το αδρανειακό χαρακτηριστικό των πελατών, οφείλεται πρωτίστως, στην έλλειψη πραγματικού χρόνου πληροφόρησης για τον βαθμό κορεσμού κάθε κέντρου παροχής service καθώς και στο γεγονός ότι πολλά κέντρα με συγκεκριμένη περιοχή ευθύνης δεν επιτρέπουν τη μεταπήδηση παραγγελιών σε γειτονικά κέντρα εξυπηρέτησης, δηλαδή δεν έχει γίνει λεπτομερής προγραμματισμός δράσης προς μοίρασμα του προκαλούμενου φόρτου. Στη περίπτωση του συστήματος παροχής άμεσης βοήθειας με περιοχή εξυπηρέτησης έναν οδικό άξονα, θεωρούμε ότι: α) κάθε εν δυνάμει πελάτης της υπηρεσίας δηλαδή κάθε οδικά μεταφερόμενος επιβάτης ακινητοποιείται όταν αποφαστεί η ανάγκη παροχής εξυπηρέτησης, β) η πιθανότητα η ακινητοποίηση του οχήματος να συμβεί στο σημείο που βρίσκεται προ τοποθετημένη μία μονάδα εξυπηρέτησης είναι εξαιρετικά μικρή γ) η πιθανότητα να συμβεί ατύχημα κατά τη διάρκεια της περιπολίας μίας μονάδας ανταπόκρισης είναι επίσης εξαιρετικά μικρή και δ) είναι έμφυτη στη λειτουργία του συστήματος η απουσία του άνω αδρανειακού χαρακτηριστικού σε κάθε πελάτη όταν συμβεί κάποιο συμβάν. Συνεπώς

το σύστημα παροχής άμεσης βοήθειας σε οδικό άξονα μπορεί να θεωρηθεί ένα τυπικό server to customer σύστημα αναμονής.

2.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο για την επίλυση προβλημάτων δύο τυχαίων μεταβλητών - γεωμετρικής πιθανότητας.

Σε πολλά προβλήματα είναι γνωστός ο νόμος της πιθανότητας μίας ή περισσότερων τυχαίων μεταβλητών και πρέπει να προσδιοριστεί ο νόμος της πιθανότητας κάποιων άλλων τυχαίων μεταβλητών οι οποίες μπορούν να εκφραστούν ως όροι των αρχικών τυχαίων μεταβλητών. Οι τυχαίες μεταβλητές στο δεύτερο σύνολο είναι συναρτήσεις των τυχαίων μεταβλητών του πρώτου συνόλου. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται στην αγγλοσαξονική βιβλιογραφία ως **problem of derived distributions**, και αυτό γιατί πρέπει να αντληθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για κάθε μία εκ των τυχαίων μεταβλητών του δεύτερου συνόλου.

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για την άντληση της από κοινού σ.π.π. Στην ανάλυση που ακολουθεί θα δοθεί βάρος σε μία "never-fail" μέθοδο. Εικονικά, όλη η δουλειά που συνδέεται με τη μέθοδο αυτή υλοποιείται στον από κοινού δειγματικό χώρο των αρχικών τυχαίων μεταβλητών. Η μέθοδος "never-fail" αποτελεί μία απλή συστηματική διαδικασία εκτέλεσης του 4^{ου} βήματος -που θα εξηγηθεί παρακάτω- σε μία ανάλυση πιθανοκρατικής μοντελοποίησης.

Έστω ότι το αρχικό σύνολο των τυχαίων μεταβλητών δίνεται από το $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ με από κοινού συνάρτηση κατανομής $F_{X_1, X_2, \dots, X_N}(\cdot)$. Και ότι υπάρχουν M τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$, κάθε μία εκ των οποίων μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των $X_1, X_2, \dots, X_N$ δηλαδή $Y_i = g_i(X_1, X_2, \dots, X_N)$, $i = 1, 2, \dots, M$. Τότε η μέθοδος never-fail, επιτρέπει τον υπολογισμό της από κοινού συνάρτησης κατανομής για κάθε ένα Y_i .

$$F_{Y_1, Y_2, \dots, Y_M}(y_1, y_2, \dots, y_M) \equiv P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_M \leq y_M)$$

με τον ακόλουθο τρόπο:

α. Εξακρίβωση του συνόλου των σημείων στον αρχικό δειγματικό χώρο $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ που αντιστοιχούν στο κοινό γεγονός :

$$\{Y_1 = g_1(X_1, X_2, \dots, X_N) \leq y_1, Y_2 = g_2(X_1, X_2, \dots, X_N) \leq y_2, \dots, Y_M = g_M(X_1, X_2, \dots, X_N) \leq y_M\}$$

β. Για κάθε ένα σύνολο τιμών αντίστοιχο σε κάθε y_i , $[y_1, y_2, \dots, y_M]$, καθορισμός - με άθροισμα ή με ολοκλήρωση - στην δειγματικό χώρο

$(X_1, X_2, \dots, X_M)$ - της πιθανότητας του κοινού αυτού γεγονότος , αποκτώντας ως εκ τούτου την από κοινού συνάρτηση κατανομής $F_{Y_1, Y_2, \dots, Y_M}(Y_1, Y_2, \dots, Y_M), -\infty < Y_1, Y_2, \dots, Y_M < +\infty$.

Αν οι τυχαιές μεταβλητές είναι συνεχείς , είναι δυνατό να βρεθεί η από κοινού σ.π.π. για το $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_M\}$ παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $F_{Y_1, Y_2, \dots, Y_M}(\cdot)$ τη μία φορά ως προς y_1 , την άλλη ως προς y_2 , κ.ο.κ. Η σειρά παραγωγισής δεν έχει σημασία.

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_M}(y_1, y_2, \dots, y_M) = \frac{\partial^M}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_M} F_{Y_1, Y_2, \dots, Y_M}(y_1, y_2, \dots, y_M)$$

Αν είναι διακριτές , η συνάρτηση μάζας πιθανότητας βρίσκεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής και αφαιρώντας κατάλληλες διαδοχικές τιμές.

2.2

1° ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Απόσταση Ανταπόκρισης μίας μονάδας Εξυπηρέτησης σε οδικό τμήμα με ομοιόμορφα κατανεμημένη πιθανότητα δημιουργίας περιστατικού έκκαιρης επέμβασης κατά μήκος.

Έστω ότι ένα όχημα παροχής άμεσης - περιορισμένης όμως - ιατρικής αλλά και τεχνικής βοήθειας περιπολεί κατά μήκος ενός οδικού τμήματος. Αν ο οδηγός κάποιου οχήματος αντιμετωπίσει κάποια βλάβη, το όχημα ανταπόκρισης σταματά για να παρέχει την απαιτούμενη τεχνική υποστήριξη. Επίσης κατά μήκος της λεωφόρου είναι πιθανό να συμβούν ατυχήματα και με τον τρόπο αυτό προκαλείται η ανάγκη άμεσης ανταπόκρισης στο σημείο γέννησης του κάθε συμβάντος. Το όχημα αποστέλλεται στο σημείο αυτό επικοινωνώντας μέσω ραδιοσυχνότητας με το κέντρο ελέγχου κυκλοφορίας της υπό εξέταση οδικής αρτηρίας. Ζητείται ο νόμος της πιθανότητας της **απόστασης** μεταξύ της κινούμενης μονάδας ανταπόκρισης και του τυχαίου περιστατικού άμεσης επέμβασης.

Λύση

Για την επίλυση του άνω προβλήματος πρέπει να ακολουθηθεί η διαδικασία των παρακάτω βημάτων:

- Βήμα 1.** Καθορισμός των τυχαίων μεταβλητών που μας ενδιαφέρουν.
- Βήμα 2.** Εξακρίβωση του κοινού δειγματικού χώρου.
- Βήμα 3.** Προσδιορισμός της από κοινού συνάρτησης κατανομής πάνω στο δειγματικό χώρο του βήματος 3.
- Βήμα 4.** Ενασχόληση με το δειγματικό χώρο για τον προσδιορισμό των απαντήσεων σε κάθε ερώτημα που έχει τεθεί γύρω από το πείραμα τύχης.

1. **Τυχαίες Μεταβλητές.** Έστω ότι το μήκος του οδικού τμήματος είναι μία μονάδα μήκους. Τότε οι δύο τυχαίες μεταβλητές κλειδιά θα είναι:

X_1 : θέση των περιστατικών άμεσης επέμβασης, $0 \leq X_1 \leq 1$

X_2 : θέση της μονάδας ανταπόκρισης τη στιγμή της ειδοποίησης από το κέντρο, $0 \leq X_2$

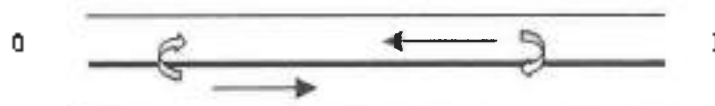
Στο σημείο αυτό πρέπει να διακρινιστεί ο διαφορετικός τρόπος αναλυτικής έκφρασης της ζητούμενης τυχαίας μεταβλητής, δηλαδή της απόστασης D μεταξύ της θέσης του συμβάντος με τη θέση της μονάδας ανταπόκρισης, ανάλογα με τα λειτουργικά χαρακτηριστικά του υπό εξέταση οδικού τμήματος. Μια πρώτη προσέγγιση διακρίνει δύο διαμετρικά αντίθετες διαμορφώσεις:

1^η. Όταν υπάρχει η δυνατότητα επί τόπου αναστροφής (U-turn) καθ' όλο το μήκος της τότε $D = |X_1 - X_2|$.

2^η. Όταν υπάρχει συνεχές διαχωριστικό έρεισμα μεταξύ των δύο ρευμάτων κυκλοφορίας και η επί τόπου αναστροφή είναι αδύνατη σε όλα τα σημεία της οδού.

Η πρώτη ενστικτώδης σκέψη που έρχεται κατά νου είναι ότι πρέπει να επιχειρούν ταυτόχρονα δύο μονάδες ανταπόκρισης για την παροχή εξυπηρέτησης και στις δύο κατευθύνσεις κυκλοφορίας, και μάλιστα πρέπει να ισαπέχουν κατά μία μονάδα μήκους όσο κινούνται - κυκλικά κατ' ουσία - για την παροχή ίσου επιπέδου εξυπηρέτησης σε σχέση με τις συνθήκες λειτουργίας της 1^{ης} διαμόρφωσης. Τι γίνεται όμως αν υπάρχει η δυνατότητα αναστροφής σε συγκεκριμένα σημεία κατά μήκος της οδού; Η ανάγκη διαφορετικής αντιμετώπισης της λειτουργίας του συστήματος σε όλες αυτές τις ειδικές αλλά συνάμα και πολύ συχνές περιπτώσεις επιδρά και στα υπόλοιπα βήματα της μεθόδου και θα αντιμετωπιστεί αργότερα. Η συνέχεια της παραγράφου ασχολείται μόνο με την 1^η διαμόρφωση του οδικού τμήματος.

1^η ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ U-TURN ΕΠΙΤΡΕΠΤΟ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΟΔΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ



2. Από κοινού δειγματικός χώρος. Ο από κοινού δειγματικός χώρος είναι το μοναδιαίο τετράγωνο στους θετικούς ημιάξονες που προσδιορίζεται από τις εξής ανισότητες: $0 \leq X_1 \leq 1, 0 \leq X_2 \leq 1$. (Δισδιάστατος Δειγματικός Χώρος).

3. Από κοινού συνάρτηση κατανομής. Έστω ότι οι θέσεις τόσο των σημείων πρόκλησης συμβάντων όσο και της μονάδας ανταπόκρισης είναι ομοιόμορφα, ανεξάρτητα κατανεμημένες κατά μήκος του οδικού τμήματος. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} f_{x1}(x_1) &= c_1, \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \\ f_{x2}(x_2) &= c_2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης προκύπτει ότι $c_1 = c_2 = 1$. Άρα είναι:

$$\begin{aligned} f_{x1x2}(x_1, x_2) &= f_{x1}(x_1) f_{x2}(x_2) \quad (\text{λόγω ανεξαρτησίας των } f_{x1}, f_{x2}) \\ &= \begin{cases} 1 \cdot 1 = 1, & 0 \leq x_1, x_2 \leq 1 \\ 0 & , \text{ διαφορετικά} \end{cases} \end{aligned}$$

4. Ενασχόληση με τον από κοινού δειγματικό χώρο. Σε αυτό το σημείο η μέθοδος never-fail μπαίνει στο προσκήνιο. Ζητείται ο προσδιορισμός του νόμου της πιθανότητας της συνάρτησης:

$$D = |X_1 - X_2|$$

Στην προκειμένη περίπτωση $N=2$, $M=1$. Ο τύπος του προβλήματος αυτού μερικές φορές καλείται μετασχηματισμός 2-σε-1.

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος never-fail έχοντας σκολό τον προσδιορισμό της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής D , $F_D(y)$, πρέπει αρχικά να προσδιοριστεί η υπεριοχή του κοινού δισδιάστατου δειγματικού χώρου (X_1, X_2) που αντιστοιχεί στο γεγονός $(D < y)$. Τυπικά τα βήματα γράφονται ως εξής:

$$F_D(y) \equiv P\{D \leq y\} = P\{|X_1 - X_2| \leq y\}$$

Για να απομακρυνθεί το απόλυτο, γίνεται θεώρηση δύο ξεχωριστών περιπτώσεων:

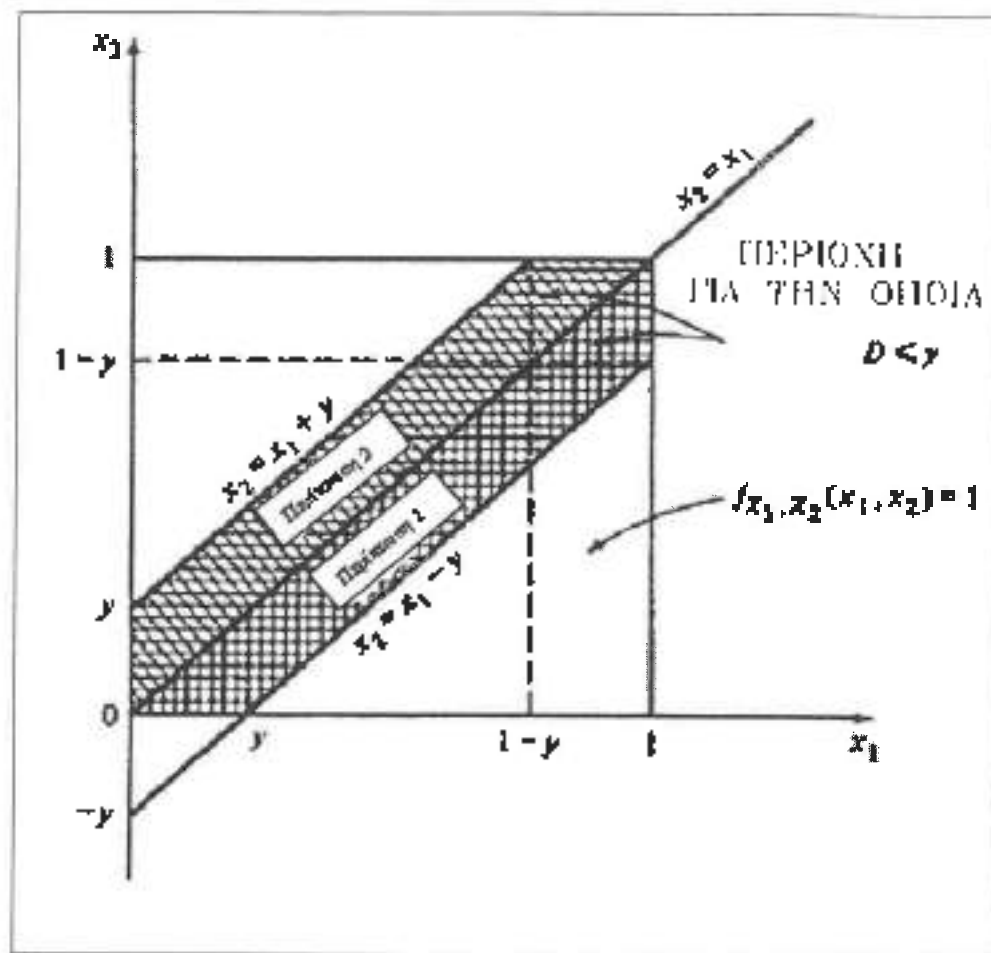
- 1^η περίπτωση $X_1 \geq X_2$

Στην περίπτωση αυτή, $D = X_1 - X_2$ και οι πειραματικές τιμές x_1, x_2 των τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2 αντίστοιχα πρέπει να κείνται μεταξύ των ευθειών $x_2 = x_1$ και $x_2 = x_1 - y$.

• 2^η περίπτωση $X_1 < X_2$

Στην περίπτωση αυτή, $D = X_2 - X_1$ και οι πειραματικές τιμές x_1, x_2 των τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2 αντίστοιχα πρέπει να κείνται μεταξύ των ευθειών $x_2 = x_1$ και $x_2 = x_1 + y$.

Η θεώρηση αυτών των δύο περιπτώσεων απεικονίζεται στη σκιαγραφημένη περιοχή του δειγματικού χώρου του παρακάτω σχήματος (Εικόνα 2.1). Από τη στιγμή που έχει προσδιοριστεί μία τέτοια περιοχή έχει γίνει ταυτόχρονα η εξακρίβωση του συνόλου των σημείων που αντιστοιχούν στο γεγονός άμεσου ενδιαφέροντος ($D < y$). Ο προσδιορισμός της περιοχής αυτής δεν εξαρτάται με κανένα τρόπο από την από κοινού σ.π.π. των X_1 και X_2 . Με τον τρόπο αυτό η ενασχόλησή μας με τον κοινό δειγματικό χώρο στο 4^ο βήμα της διαδικασίας θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε πολλά εναλλακτικά μοντέλα, καθένα με διαφορετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τις τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 .



Εικόνα 2.1 Από κοινό δειγματικός χώρος των ομοιόμορφα και ανεξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών (X_1, X_2)

Το δεύτερο βήμα της μεθόδου απαιτεί την ολοκλήρωση της από κοινού σ.π.π. $f_{x_1, x_2}(\cdot)$ στον γραμμασκιασμένο τόπο του άνω σχήματος για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής $F_D(y)$. Εφόσον η από κοινού σ.π.π. των X_1, X_2 είναι ομοιόμορφη στο μοναδιαίο τετράγωνο, η ολοκλήρωση είναι δυνατό να εκτελεστεί υπολογίζοντας τα εμβαδά στο δισδιάστατο δειγματικό χώρο.

$$F_D(y) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)(1 - y)^2 \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (2.1)$$

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση κατανομής ως προς y , προκύπτει η έκφραση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής D :

$$f_D(y) = \frac{dF_D(y)}{dy} = \begin{cases} 2(1 - y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.2)$$

Έτσι είναι δυνατός ο υπολογισμός οποιασδήποτε παραμέτρου. Η μέση τιμή της μεταβλητής D και της τοπικής απόκλισης είναι:

$$E[D] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_D(y) dy = \int_0^1 y 2(1-y) dy = \frac{1}{3} \quad (2.3)$$

$$\sigma_D^2 = E[(D - E[D])^2] = E[D^2] - (E[D])^2 = \frac{1}{12} \quad (2.4)$$

Το ερώτημα που τίθεται αμέσως είναι πώς θα επιδρούσε η προ τοποθέτηση της μονάδας ανταπόκρισης στο μέσο του οδικού τμήματος στις παραμέτρους της τυχαίας μεταβλητής $D = |X_1 - X_2|$ που υπολογίστηκαν πιο πριν, δηλαδή στη Μέση τιμή και στη Διασπορά.

Για την επίλυση του προβλήματος αυτού πρέπει να ακολουθηθεί η διαδικασία των τεσσάρων βημάτων όπως και πριν:

- Βήμα 1.** Καθορισμός των τυχαίων μεταβλητών που μας ενδιαφέρουν.
- Βήμα 2.** Εξακρίβωση του κοινού δειγματικού χώρου.
- Βήμα 3.** Προσδιορισμός της από κοινού συνάρτησης κατανομής πάνω στο δειγματικό χώρο του βήματος 3.
- Βήμα 4.** Ενασχόληση με το δειγματικό χώρο για τον προσδιορισμό των απαντήσεων σε κάθε ερώτημα που μας απασχολεί γύρω από το πείραμα τύχης.

1. **Τυχαίες Μεταβλητές.** Το μήκος του οδικού τμήματος είναι μία μονάδα μήκους. Τότε οι τυχαίες μεταβλητές θα είναι:

X_1 : θέση των περιστατικών άμεσης επέμβασης, $0 \leq X_1 \leq 1$.

X_2 : θέση της μονάδας ανταπόκρισης τη στιγμή της ειδοποίησης από το κέντρο, $X_2 = \frac{1}{2}$. Δηλαδή η X_2 παύει να είναι τυχαία μεταβλητή. Το πρόβλημα μεταπίπτει από πρόβλημα μετασχηματισμού 2-σε-1 σε πρόβλημα μετασχηματισμού 1-σε-1.

2. **Από κοινού δειγματικός χώρος.** Ο από κοινού δειγματικός χώρος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που προσδιορίζεται από τις εξής σχέσεις: $X_1 = \frac{1}{2}$, $0 \leq X_2 \leq 1$ (Μονοδιάστατος δειγματικός Χώρος). Παρατηρούμε ότι η διάσταση του κοινού δειγματικού χώρου ισούται με τον αριθμό των τυχαίων μεταβλητών που απαιτούνται για την λύση του προβλήματος.

3. Από κοινού συνάρτηση κατανομής. Έστω ότι η θέση των σημείων πρόκλησης συμβάντων είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη κατά μήκος της οδού και είναι ανεξάρτητη από τη θέση της μονάδας ανταπόκρισης. Δηλαδή:

$$f_{x1}(x_1) = c_2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1$$

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης προκύπτει ότι $c_2 = 1$.

Η έννοια της από κοινού συνάρτηση κατανομής στη περίπτωση αυτή εκφυλάζεται αφού το πρόβλημά μας περιγράφεται από μία τυχαία μεταβλητή.

4. Ενασχόληση με τον από κοινού δειγματικό χώρο.. Ζητείται ο προσδιορισμός του νόμου της πιθανότητας της συνάρτησης:

$$D' = |X_1 - 1/2|$$

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος never-fail έχοντας σκοπό τον προσδιορισμό της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής D' , $F_D(y)$, πρέπει αρχικά να προσδιοριστεί η υποπεριοχή του κοινού μονοδιάστατου δειγματικού χώρου $(X_1, 1/2)$ που αντιστοιχεί στο γεγονός $(D' < y)$. Τυπικά τα βήματα γράφονται ως εξής:

$$F_D(y) = P\{D' \leq y\} = P\{|X_1 - 1/2| \leq y\}$$

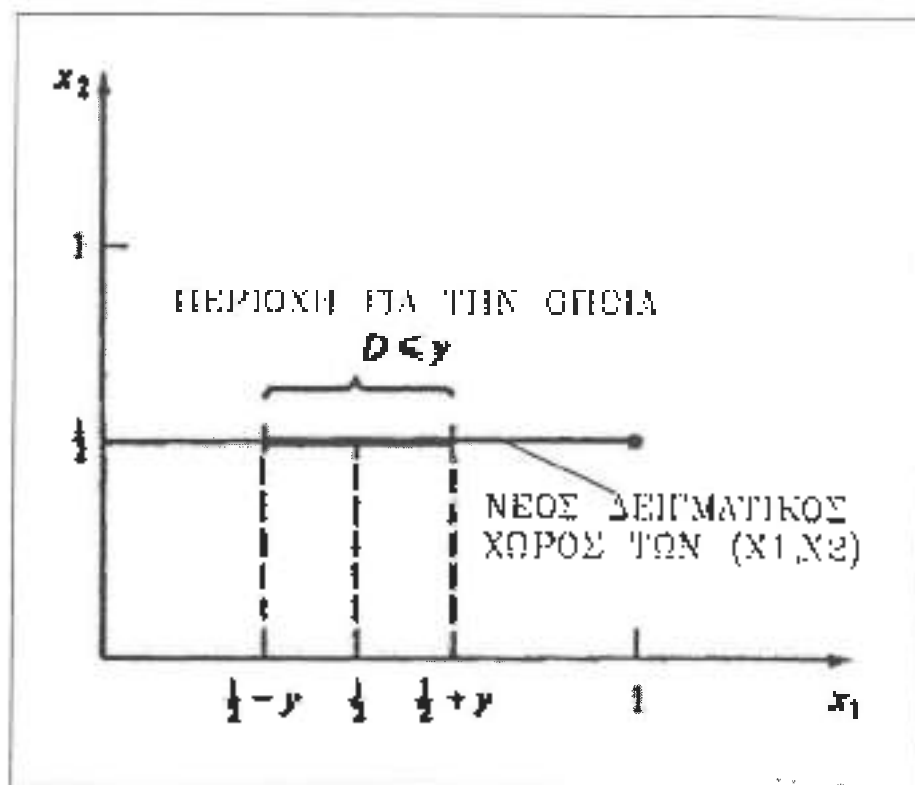
Για να απομακρυνθεί το απόλυτο, γίνεται θεώρηση δύο ξεχωριστών περιπτώσεων:

• 1^η περίπτωση $X_1 \geq 1/2$

Στην περίπτωση αυτή, $D = X_1 - 1/2$ και οι πειραματικές τιμές x_1 της τυχαίας μεταβλητής X_1 πρέπει να κείνται μεταξύ των ευθειών $x_1 = 1/2$ και $x_1 = 1/2 + y$.

• 2^η περίπτωση $X_1 < 1/2$

Στην περίπτωση αυτή, $D = 1/2 - X_1$ και οι πειραματικές τιμές x_1 της τυχαίας μεταβλητής X_1 πρέπει να κείνται μεταξύ των ευθειών $x_1 = 1/2 - y$ και $x_1 = 1/2$.



Εικόνα 2.2 Από κοινού δειγματικός χώρος της ομοιόμορφα κατανομημένης μεταβλητής X_1 , και της σταθερής μεταβλητής $X_2 = 1/2$

Συνεπώς, η περιοχή του μονοδιάστατου δειγματικού χώρου $(X_1, 1/2)$ που αντιστοιχεί στο γεγονός $(D' \leq y)$, είναι το ευθύγραμμο τμήμα μήκους $2y$ με κέντρο στο $X_1 = 1/2$.

Ολοκληρώνοντας την ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X_1 :

$$F_{D'}(y) = P\{D' \leq y\} = P\{|X_1 - 1/2| \leq y\} = 2y, \quad (0 \leq y \leq 1/2).$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της D' είναι:

$$f_{D'}(y) = \begin{cases} 2 & 0 \leq y \leq 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.5)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} E[D] &= \frac{1}{4} \\ \sigma_D^2 &= \frac{1}{12} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Συνεπώς όταν οι θέσεις των περιστατικών άμεσης επέμβασης κατανέμονται ομοιόμορφα κατά μήκος ενός οδικού τμήματος, μία διαφοροποίηση στην πολιτική χωροθέτησης της μονάδας ανταπόκρισης που έχει ως αποτέλεσμα την προ τοποθέτησή της στο μέσο της περιοχής εξυπηρέτησης αντί τυχαίας και απρογραμματίστης περιπολίας κατά μήκος της περιμετρικής αυτής, ελαττώνει τη μέση τιμή της απόστασης κατά 25%, τη διασπορά κατά 62,5% και τη μέγιστη δυνατή απόσταση κατά 50%.

2° ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Απόσταση Ανταπόκρισης μίας μονάδας Εξυπηρέτησης σε οδικό τμήμα με μη ομοιόμορφα κατανεμημένη πιθανότητα δημιουργίας περιστατικού άμεσης επέμβασης κατά μήκος.

Θεωρώντας ξανά το πρώτο πρόβλημα, μπορεί κάποιος να ξεκινήσει να σκιαγραφεί τις συνιστώσες της ομοιόμορφα κατανεμημένης ζήτησης για παροχή άμεσης - περιορισμένης όμως - ιατρικής και τεχνικής εξυπηρέτησης κατά μήκος ενός οδικού τμήματος, στη προσπάθειά του να προσεγγίσει πιο περίπλοκες λειτουργικές διαμορφώσεις.

Μία πρώτη ανάλυση διαφοροποιεί τη ζήτηση σε περιστατικά που οφείλονται αποκλειστικά σε βλάβες των οχημάτων και απαιτούν την παροχή αμιγούς τεχνικής εξυπηρέτησης και σε περιστατικά που οφείλονται σε ατυχήματα και απαιτούν τόσο την παροχή άμεσης ιατρικής βοήθειας όσο και τεχνικής εξυπηρέτησης.

Η δεύτερη διαφοροποίηση αφορά τον όρο *αμιγής ή μη τεχνική εξυπηρέτηση*. Στην ανάλυση που ακολουθεί, ο όρος *αμιγής τεχνική εξυπηρέτηση* αντιστοιχεί σε μη μόνιμες βλάβες που αντιμετωπίζονται στα σημεία γέννησης των περιστατικών και σε μόνιμες βλάβες που απαιτούν την απομάκρυνση του οχήματος, και την παροχή ενός δευτέρου επιπέδου εξυπηρέτησης σε κάποιο άλλο σημείο αλλά δεν προκαλούνται από κάποιο ατύχημα. Επίσης, ο όρος *μη αμιγής τεχνική εξυπηρέτηση* αντιστοιχεί σε μόνιμες ως επί το πλείστον βλάβες που οφείλονται σε κάποιο ατύχημα οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα την απομάκρυνση του οχήματος και οι οποίες συνοδεύονται από την παροχή περιορισμένης αοχικά ιατρικής βοήθειας. Υποτίθεται ότι αρχικά γίνεται μία εκτίμηση της σοβαρότητας του ατυχήματος και ανάλογα με την σοβαρότητά του παρέχεται ένα δεύτερο επίπεδο ιατρικής εξυπηρέτησης από μία πιο εξειδικευμένη μονάδα ή όχι.



Αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X_1 συμβολίζεται με $f_{x1}(x_1)$ τότε:

$$f_{x1}(x_1) = a_{x1}(x_1) + d_{x1}(x_1)$$

όπου $a_{x1}(x_1)$: η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ X_1 που αντιστοιχεί σε ζήτηση οφειλόμενη αποκλειστικά σε ατυχήματα.

$d_{x1}(x_1)$: η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ X_1 που αντιστοιχεί σε ζήτηση οφειλόμενη αποκλειστικά σε βλάβες οχημάτων.

Από τη Συνθήκη Κανονικοποίησης προκύπτει για την $f_{x1}(x_1)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x1}(x_1) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 (a_{x1}(x_1) + d_{x1}(x_1)) dx = 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 a_{x1}(x_1) dx + \int_0^1 d_{x1}(x_1) dx = 1$$

Έστω ότι στο σημείο που απέχει από την αρχή του μοναδιαίου οδικού τμήματος απόσταση α , $0 \leq \alpha \leq 1$, υπάρχει ένας ανισόπεδος κόμβος, με αποτέλεσμα να διαφοροποιείται ο φόρτος κυκλοφορίας στα δύο τμήματα. Δε λαμβάνεται υπόψη η διαφοροποίηση της επικινδυνότητας κατά μήκος των προσβάσεων του κόμβου. Επίσης έστω ότι ο λόγος των κυκλοφοριακών φόρτων μεταξύ των τμημάτων 1: $[0, \alpha]$ και 2: $[\alpha, 1]$ είναι ανεξάρτητος του χρόνου και ίσος με:

$$V_1/V_2 = b,$$

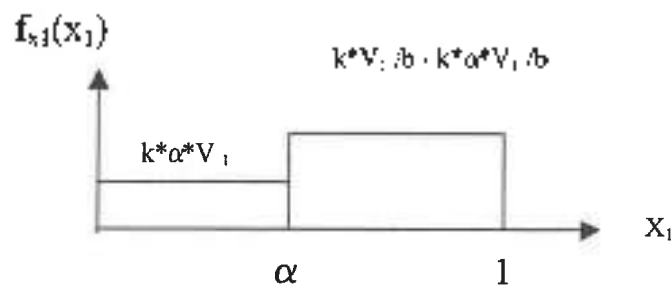
Η πιθανότητα df_{x1} να δημιουργηθεί ένα περιστατικό άμεσης επέμβασης σε διάστημα dx_1 (ανάμεσα στις θέσεις x_1 , x_1+dx_1) εξαρτάται από τη θέση x_1 .

Σε κάθε θέση x_1 η πιθανότητα δημιουργίας συμβάντος προς εξυπηρέτηση είναι ανάλογη των οχηματοχιλιωμέτρων του οδικού τμήματος στο οποίο βρίσκεται η θέση αυτή. Δηλαδή ισχύει:

$$f_{x1}(x_1) = \begin{cases} k \cdot \alpha \cdot V_1, & 0 \leq x_1 \leq \alpha \\ k \cdot (1-\alpha) \cdot V_2, & \alpha \leq x_1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f_{x1}(x_1) = \begin{cases} k \cdot \alpha \cdot V_1, & 0 \leq x_1 \leq \alpha \\ \frac{k \cdot (1-\alpha) \cdot V_1}{b}, & \alpha \leq x_1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f_{x1}(x_1) = \begin{cases} k^* \alpha^* V_1, & 0 \leq x_1 \leq \alpha \\ \frac{k^* V_1}{b} \dots \frac{k^* \alpha^* V_1}{b}, & \alpha \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$



Από τη Συνθήκη Κανονικοποίησης προκύπτει για την $f_{x1}(x_1)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{x1}(x_1) dx = 1 \implies \int_0^{\alpha} k^* \alpha^* V_1 dx + \int_{\alpha}^1 \frac{k^* (1-\alpha)^* V_1}{b} dx = 1 \implies$$

$$k^* \alpha^2 V_1 + \frac{k^* (1-\alpha)^2 V_1}{b} = 1$$

Ποίος είναι ο νόμος της πιθανότητας της απόστασης D μεταξύ της κινούμενης μονάδας ανταπόκρισης και του τυχαίου περιστατικού άμεσης επέμβασης.

1. **Τυχαίες Μεταβλητές.** Το μήκος του οδικού τμήματος είναι μία μονάδα μήκους. Τότε οι δύο τυχαίες μεταβλητές κλειδιά θα είναι:

X_1 : Θέση των περιστατικών άμεσης επέμβασης, $0 \leq X_1 \leq 1$

X_2 : θέση της μονάδας ανταπόκρισης τη στιγμή της ειδοποίησης από το κέντρο, $0 \leq X_2$

2. Από κοινού δειγματικός χώρος. Ο από κοινού δειγματικός χώρος είναι το μοναδιαίο τετράγωνο στους θετικούς ημιάξονες που προσδιορίζεται από τις εξής ανισότητες : $0 \leq X_1 \leq 1, 0 \leq X_2 \leq 1$ (Δισδιάστατος Δειγματικός Χώρος).
3. Από κοινού συνάρτηση κατανομής. Έστω ότι οι θέσεις των σημείων της μονάδας ανταπόκρισης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες κατά μήκος της οδού ανεξάρτητα από τις θέσεις των περιστατικών. Δηλαδή:

$$f_{x2}(x_2) = c_2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1$$

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης προκύπτει ότι $c_2 = 1$. Άρα είναι:

$$f_{x1, x2}(x_1, x_2) = f_{x1}(x_1) * f_{x2}(x_2) = f_{x1}(x_1) \implies$$

$$f_{x1, x2}(x_1, x_2) = \begin{cases} k * \alpha * V_1, & 0 \leq x_1 \leq \alpha, 0 \leq x_2 \leq 1 \\ \frac{k * V_1}{b} - \frac{k * \alpha * V_1}{b}, & \alpha \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$$

4. Ενασχόληση με τον από κοινού δειγματικό χώρο. Σε αυτό το σημείο η μέθοδος never-fail μπαίνει στο προσκήνιο. Ζητείται ο προσδιορισμός του νόμου της πιθανότητας της συνάρτησης:

$$D = |X_1 - X_2|$$

Στην προκειμένη περίπτωση $N=2$, $M=1$. Ο τύπος του προβλήματος μερικές φορές καλείται μετασχηματισμός 2-σε-1.

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος never-fail έχοντας σκοπό τον προσδιορισμό της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής D , $F_D(y)$, πρέπει αρχικά να προσδιοριστεί η υποπεριοχή του κοινού δισδιάστατου δειγματικού χώρου (X_1, X_2) που αντιστοιχεί στο γεγονός $(D < y)$. Τυπικά τα βήματα γράφονται ως εξής:

$$F_D(y) = P(D \leq y) = P(|X_1 - X_2| \leq y)$$

Για να απομακρυνθεί το απόλυτο, γίνεται θεώρηση δύο ξεχωριστών περιπτώσεων:

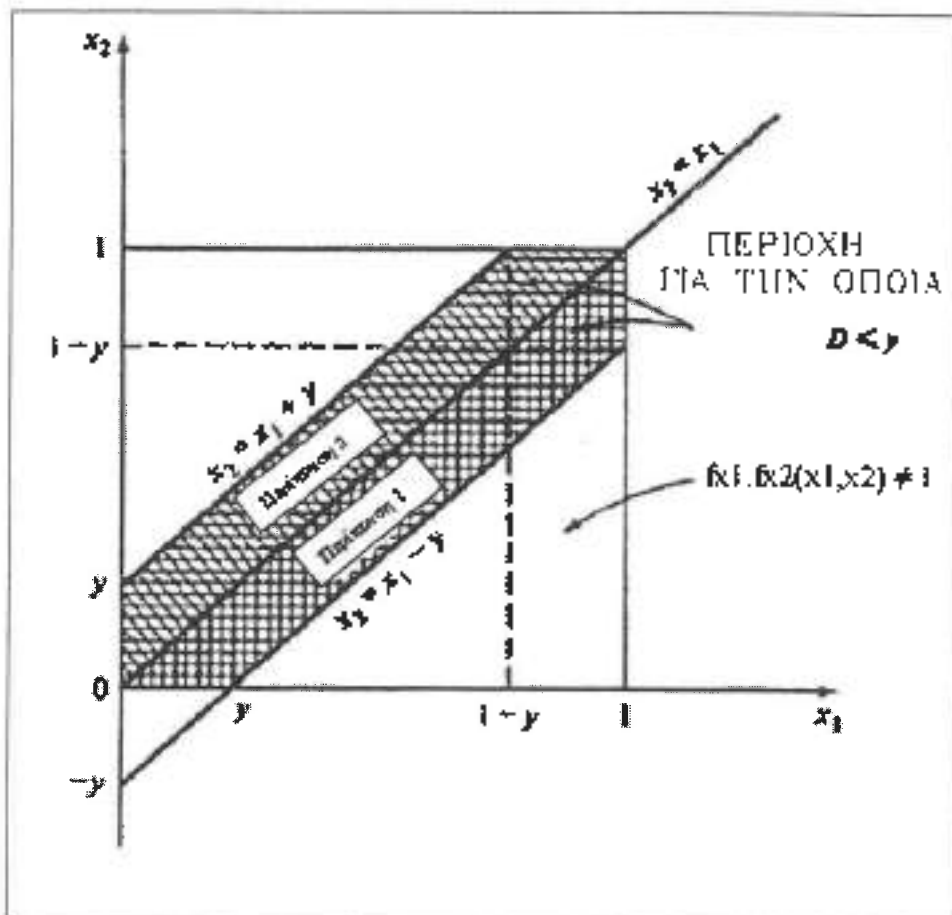
• 1^η περίπτωση $X_1 \geq X_2$

Στην περίπτωση αυτή, $D = X_1 - X_2$ και οι πειραματικές τιμές x_1 , x_2 των τυχαιών μεταβλητών X_1 , X_2 αντίστοιχα πρέπει να κείνται μεταξύ των ευθειών $x_2 = x_1$ και $x_2 = x_1 - y$.

• 2^η περίπτωση $X_1 < X_2$

Στην περίπτωση αυτή, $D = X_2 - X_1$ και οι πειραματικές τιμές x_1 , x_2 των τυχαιών μεταβλητών X_1 , X_2 αντίστοιχα πρέπει να κείνται μεταξύ των ευθειών $x_2 = x_1$ και $x_2 = x_1 + y$.

Η θεώρηση αυτών των δύο περιπτώσεων απεικονίζεται στη σκιαγραφημένη περιοχή του δειγματικού χώρου του παρακάτω σχήματος. Από τη στιγμή που έχει προσδιοριστεί μία τέτοια περιοχή ταυτόχρονα έχει εξακριβωθεί το σύνολο των σημείων που αντιστοιχούν στο γεγονός άμεσου ενδιαφέροντος ($D < y$).



Εικόνα 2.3 Από κοινού δειγματικός χώρος των μη ομοιόμορφα κατανομημένων τυχαιών μεταβλητών (X_1, X_2)

Το δεύτερο βήμα της μεθόδου απαιτεί την ολοκλήρωση της από κοινού σ.π.π. $f_{x_1, x_2}(\cdot)$ στον γραμμοσκιασμένο τόπο (Γ.Τ) του άνω σχήματος για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής $F_D(y)$. Εφόσον η από κοινού σ.π.π. των X_1, X_2 είναι **ανομοιομόρφη** στο μοναδιαίο τετράγωνο, η ολοκλήρωση δεν είναι δυνατό να εκτελεστεί υπολογίζοντας τα εμβαδά στο δισδιάστατο δειγματικό χώρο όπως στο πρώτο πρόβλημα.

$$F_D(y) = \iint_{\Gamma.T} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \begin{cases} \iint_{\Gamma.T} k^* \alpha^* V_1 dx_1 dx_2, & 0 \leq x_1 \leq \alpha \\ \iint_{\Gamma.T} \frac{k^* V_1}{b} - \frac{k^* \alpha^* V_1}{b} dx_1 dx_2, & \alpha \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \iint_{\Gamma.T1} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \iint_{\Gamma.T2} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \iint_{\Gamma.T3} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\begin{aligned} \Gamma.T1 &:= \{(x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2: & 0 \leq x_2 \leq 1+y, & 0 \leq x_1 \leq y \\ \Gamma.T2 &:= \{(x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2: & x_1-y \leq x_2 \leq x_1+y, & y \leq x_1 \leq 1-y \\ \Gamma.T3 &:= \{(x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2: & x_1-y \leq x_2 \leq 1, & 1-y \leq x_1 \leq 1 \end{aligned} \} \Rightarrow$$

$$\Gamma.T1 \cup \Gamma.T2 \cup \Gamma.T3 = D_{x_2}$$

$$\iint_{\Gamma.T1} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \iint_{\Gamma.T2} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \iint_{\Gamma.T3} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$\iint_{\Gamma.T1} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$\int_0^{x_1+y-y} \left(\int_0^y f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_0^{x_1+y} f_{x_2}(x_2) dx_2 = \int_0^{x_1+y} 1 dx_2 = (x_1+y-0)$$

$$\iint_{\Gamma.T2} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$\int_{x_1=y}^{x_1+y} \left(\int_{x_2=y}^{1-y} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{x_1=y}^{x_1+y} f_{x_2}(x_2) dx_2 = \int_{x_1=y}^{x_1+y} 1 dx_2 = x_1+y - x_1+y$$

$$= 2y$$

$$\iint_{\Gamma, \Gamma_3} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$\int_{x_1=y}^1 \left(\int_{x_2=1-y}^1 f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{x_2=y}^1 f_{x_1}(x_2) dx_2 = \int_{x_1=y}^1 1 dx_2 = 1 - x_1 + y$$

Επομένως:

$$F_D(y) = (x_1 + y - 0) + 2y + 1 - x_1 + y = 4y + 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$E[D] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_D(y) dy = \int_0^1 y(4y+1) dy = \int_0^1 (4y^2 + y) dy = \left[\frac{4}{3} y^3 + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1$$

$$= 11/6$$

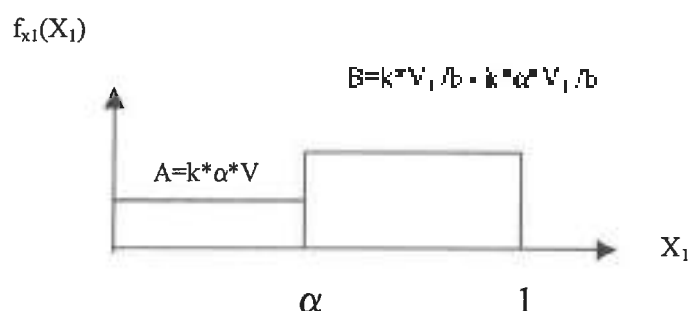
$$\sigma_D^2 = E[D^2] - E[D]^2$$

$$E[D^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_D(y) dy = \int_0^1 y^2 (4y+1) dy = \int_0^1 (4y^3 + y^2) dy = \left[y^4 + \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1$$

$$= 4/3$$

$$\sigma_D^2 = 4/3 + (11/6)^2 = 169/36$$

Το ερώτημα που τίθεται αμέσως είναι πώς θα επιδρούσε η προ τοποθέτηση της μονάδας ανταπόκρισης στην τετμημένη X_c του κέντρου βάρους του διαγράμματος της σ.π.π. της τυχαίας μεταβλητής X_1 στις παραμέτρους της τυχαίας μεταβλητής $D = |X_1 - X_2|$ που υπολογίστηκαν πιο πριν, δηλαδή στη Μέση τιμή και στη Διασπορά.



$$X_c = \frac{\frac{\alpha^2 \alpha^* A}{2} + \frac{(1-\alpha)^2 (1-\alpha)^* B}{2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X1}(x_1) dx} = \frac{\alpha^2 A + (1-\alpha)^2 B}{2}$$

Για την επίλυση του προβλήματος αυτού πρέπει να ακολουθηθεί η διαδικασία των τεσσάρων βημάτων όπως και πριν:

Βήμα 1. Καθορισμός των τυχαίων μεταβλητών που μας ενδιαφέρουν.

Βήμα 2. Εξακρίβωση του κοινού δειγματικού χώρου.

Βήμα 3. Προσδιορισμός της από κοινού συνάρτησης κατανομής πάνω στο δειγματικό χώρο του βήματος 3.

Βήμα 4. Ενασχόληση με το δειγματικό χώρο για τον προσδιορισμό των απαντήσεων σε κάθε ερώτημα που μας απασχολεί γύρω από το πείραμα τύχης.

1. **Τυχαίες Μεταβλητές.** Το μήκος του οδικού τμήματος είναι μία μονάδα μήκους. Τότε οι τυχαίες μεταβλητές θα είναι:

X_1 : θέση των περιστατικών άμεσης επέμβασης, $0 \leq X_1 \leq 1$.

X_2 : θέση της μονάδας ανταπόκρισης τη στιγμή της ειδοποίησης από το κέντρο, $X_2 = (\alpha^2 A + (1-\alpha)^2 B)/2 = E[X_1]$

Δηλαδή η X_2 παύει να είναι τυχαία μεταβλητή. Ταυτόχρονα όμως παύει να είναι ανεξάρτητη της X_1 αφού ισούται με τη μέση τιμή $E[X_1]$.

2. Από κοινού δειγματικός χώρος. Ο από κοινού δειγματικός χώρος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που προσδιορίζεται από τις εξής σχέσεις: $X_2 = (\alpha^2 A + (1-\alpha)^2 B)/2 = E[X_1]$, $0 \leq X_1 \leq l$ (Μονοδιάστατος δειγματικός Χώρος).
3. Από κοινού συνάρτηση κατανομής. Η θέση των σημείων πρόκλησης συμβάντων είναι ανομοιόμορφα κατανεμημένη κατά μήκος της οδού. Δεν είναι όμως ανεξάρτητη από τη θέση της μονάδας ανταπόκρισης αφού αυτή βρίσκεται πλέον τοποθετημένη σε θέση ίση με τη μέση τιμή της σ.π.π. της τυχαίας μεταβλητής X_1 .

$$f_{x_1}(x_1) = \begin{cases} A = k \cdot \alpha \cdot V_1, & 0 \leq x_1 \leq \alpha, \\ B = \frac{k \cdot V_1}{b} - \frac{k \cdot \alpha \cdot V_1}{b}, & \alpha \leq x_1 \leq l \end{cases}$$

Η έννοια της από κοινού συνάρτηση κατανομής στη περίπτωση αυτή εκφυλίζεται αφού το πρόβλημά μας περιγράφεται από μία τυχαία μεταβλητή.

4. Ενασχόληση με τον από κοινού δειγματικό χώρο.. Ζητείται ο προσδιορισμός του νόμου της πιθανότητας της συνάρτησης:

$$D = |X_1 - (\alpha^2 A + (1-\alpha)^2 B)/2| = |X_1 - E[X_1]|$$

$$F_D(y) = P\{D \leq y\} = P\{|X_1 - E[X_1]| \leq y\}$$

Για να απομακρυνθεί το απόλυτο, γίνεται θεώρηση δύο ξεχωριστών περιπτώσεων :

$$1^{\text{η}} \text{ περίπτωση } X_1 \geq E[X_1] \implies D' = X_1 - E[X_1] \implies$$

$$E[D] = E[X_1 - E[X_1]] \implies E[D] = E[X_1] - E[E[X_1]] \implies$$

$$E[D] = E[X_1] - \int_0^l E[X_1] f(x_1) dx_1 \implies$$

$$E[D] = E[X_1] - \int_0^1 \int_0^1 x_1 f(x_1) dx_1 f(x_1) dx_1 \Rightarrow$$

$$E[D] = E[X_1] - \int_0^1 \int_0^1 x_1 f^2(x_1) d^2 x_1 \Rightarrow$$

$$E[D] = E[X_1] - \int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^1 f^2(x_1) dx_1 \Rightarrow$$

$$E[D] = E[X_1] - \left[\frac{1}{2} x_1^2 \right]_0^1 * \left(\int_0^\alpha f^2(x_1) dx_1 + \int_\alpha^1 f^2(x_1) dx_1 \right) \Rightarrow$$

$$E[D] = E[X_1] - \frac{1}{2} \left(\int_0^\alpha A^2 dx_1 + \int_\alpha^1 B^2 dx_1 \right) \Rightarrow$$

$$E[D] = E[X_1] - \frac{1}{2} (A^2 \alpha + B^2 (1-\alpha)) = 0$$

2^η περίπτωση $X_1 < E[X_1]$ $D' = E[X_1] - X_1$

$$E[D] = E[E[X_1] - X_1] \Rightarrow E[D] = E[E[X_1]] - E[X_1] \Rightarrow$$

$$E[D] = \int_0^1 E[X_1] f(x_1) dx_1 - E[X_1] \Rightarrow$$

$$E[D] = \int_0^1 \int_0^1 x_1 f(x_1) dx_1 f(x_1) dx_1 - E[X_1] \Rightarrow$$

$$E[D] = \int_0^1 \int_0^1 x_1 f^2(x_1) d^2 x_1 - E[X_1] \Rightarrow$$

$$E[D] = \int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^1 f^2(x_1) dx_1 - E[X_1] \Rightarrow$$

$$E[D] = \left[\frac{1}{2} x_1^2 \right]_0^1 * \left(\int_0^\alpha f^2(x_1) dx_1 + \int_\alpha^1 f^2(x_1) dx_1 \right) - E[X_1] \Rightarrow$$

$$E[D] = \frac{1}{2} \left(\int_0^\alpha A^2 dx_1 + \int_\alpha^1 B^2 dx_1 \right) - E[X_1] \Rightarrow$$

$$E[D] = \frac{1}{2} (A^2 \alpha + B^2 (1-\alpha)) - E[X_1] = 0$$

$$\text{Άρα είναι : } E[D] = 0$$

Για την διασπορά θα χρησιμοποιηθεί η γνωστή σχέση:

$$\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

Δηλαδή:

$$\sigma_D^2 = E[D^2] - E[D]^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_D^2 = E[D^2]$$

$$D = |X_1 - E[X_1]| \Rightarrow D^2 = (|X_1 - E[X_1]|)^2 \Rightarrow$$

$$D^2 = (X_1^2 + E[X_1]^2 - 2 X_1 E[X_1]) \Rightarrow$$

$$\sigma_D^2 = E[X_1^2 + E[X_1]^2 - 2 X_1 E[X_1]] \Rightarrow$$

$$\sigma_D^2 = E[X_1^2] + E[E[X_1]^2] - 2 E[X_1 E[X_1]] \Rightarrow$$

$$\bullet E[X_1^2] = \int_0^1 x_1^2 f(x_1) dx_1 = \int_0^\alpha x_1^2 f(x_1) dx_1 + \int_\alpha^1 x_1^2 f(x_1) dx_1 \Rightarrow$$

$$E[X_1^2] = \int_0^\alpha A x_1^2 dx_1 + \int_\alpha^1 B x_1^2 dx_1 = A [x_1^3 / 3]_0^\alpha + B [x_1^3 / 3]_\alpha^1 \Rightarrow$$

$$E[X_1^2] = A \alpha^3 / 3 + B (1-\alpha)^3 / 3$$

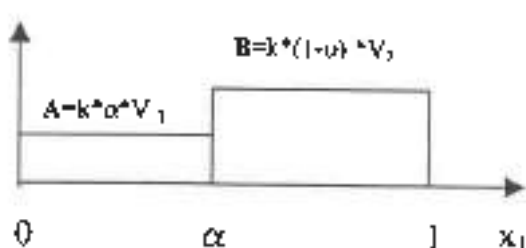
$$\bullet E[E[X_1]^2] = \int E[X_1]^2 f(x_1) dx_1 = E[X_1]^2 \int f(x_1) dx_1 = E[X_1]^2 \cdot 1 = E[X_1]^2$$

$$\bullet E[X_1 E[X_1]] = \int X_1 E[X_1] f(x_1) dx_1 = E[X_1] \int X_1 f(x_1) dx_1 = E[X_1]^2$$

$$\text{Άρα } \sigma_D^2 = A \alpha^3 / 3 + B (1-\alpha)^3 / 3 - (A \alpha^2 / 2 + B (1-\alpha)^2 / 2)^2$$

$$\sigma_D^2 = A \alpha^3 / 3 + B (1-\alpha)^3 / 3 - x_c^2$$

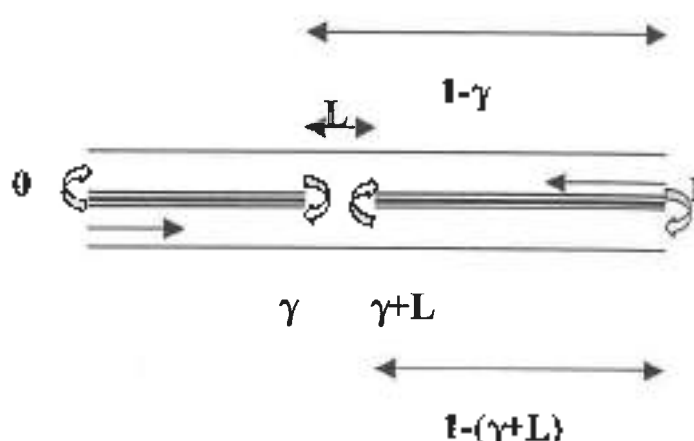
$D = X_1 - X_2 $	$0 \leq x_2 \leq 1$	$x_2 = x_c$
$E[D]$	$11/6$	0
σ_D^2	$169/36$	$A \alpha^3 / 3 + B (1-\alpha)^3 / 3 - x_c^2$

$$X_c = \frac{\alpha^2 A + (1-\alpha)^2 B}{2}$$


Συνεπώς όταν οι θέσεις των περιστατικών άμεσης επέμβασης κατανέμονται ανομοιόμορφα κατά μήκος ενός οδικού τμήματος, μία διαφοροποίηση στην πολιτική χωροθέτησης της μονάδας ανταπόκρισης που έχει ως αποτέλεσμα την προ τοποθέτησή της στο «κέντρο βάρους» της περιοχής εξυπηρέτησης αντί τυχαίας και απρογραμμάτιστης περιπολίας κατά μήκος της περιοχής αυτής, ελαχιστοποιεί τη μέση τιμή της απόστασης.

2.3 2η Διαμόρφωση: U-TURN επιτρεπτό στις θέσεις 0, γ, 1 .

Θα μελετηθούν τώρα τα δύο πρώτα προβλήματα επιβάλλοντας τον εξής περιορισμό: λόγω ύπαρξης διαχωριστικής νησίδας είναι αδύνατη η αναστροφή της μονάδας άμεσης επέμβασης εκτός των θέσεων γ, στο εσωτερικό του οδικού τμήματος όπου υπάρχει επαρκές άνοιγμα μήκους L καθώς και στα δύο άκρα της στις θέσεις 0,1. Προ του ανοίγματος αυτού έχει διαμορφωθεί ειδική λωρίδα αλλαγής κατεύθυνσης ικανού μήκους και έχει τοποθετηθεί προειδοποιητική σήμανση και στα δύο ρεύματα της κυκλοφορίας.



3^ο Πρόβλημα

Απόσταση Ανταπόκρισης μίας μονάδας Εξυπηρέτησης σε ειδικό τμήμα με ομοιόμορφα κατανεμημένη πιθανότητα δημιουργίας περιστατικού έγκαιρης επέμβασης κατά μήκος της οδού (U-TURN επιτρεπτό από τη θέση γ ως τη θέση γ+L)

Στην περίπτωση αυτή η νέα απόσταση D' μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα της ήδη υπολογισμένης από το 1^ο πρόβλημα απόστασης D και μίας νέας απόστασης όχλησης D_e . Ισχύει η σχέση

$$D' = D + D_e$$

όπου D_e είναι η επιπλέον απόσταση που διανύει η μονάδα ανταπόκρισης λόγω της ύπαρξης της διαχωριστικής νησίδας. Συνεπώς η μέση τιμή της νέας απόστασης D' είναι:

$$E[D'] = E[D] + E[D_c]$$

Αφού η μέση τιμή $E[D]$ είναι υπολογισμένη στο 1^ο πρόβλημα αρκεί να υπολογιστεί μόνο η μέση τιμή $E[D_c]$. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$E[D_c] = \sum_i E[D_c / A_i | P(A_i)]$$

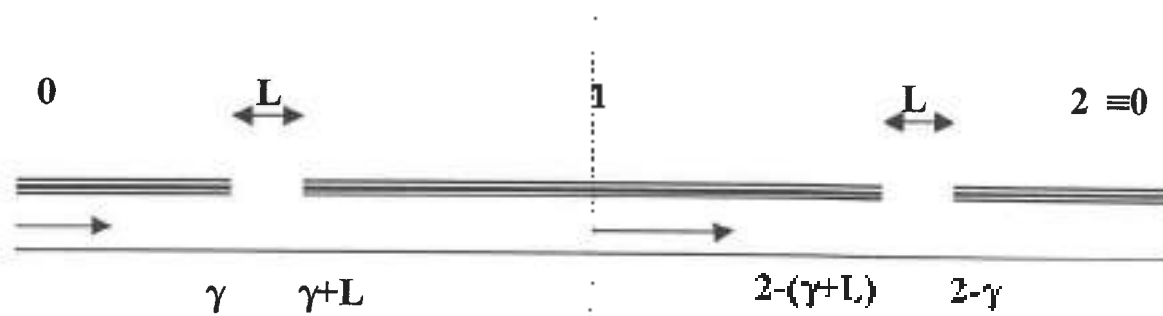
όπου τα γεγονότα A_i είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα και η ένωσή τους ταυτίζεται με το δειγματικό χώρο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται θεώρηση των εξής γεγονότων:

$$A_1: D_c > 0$$

$$A_2: D_c = 0$$

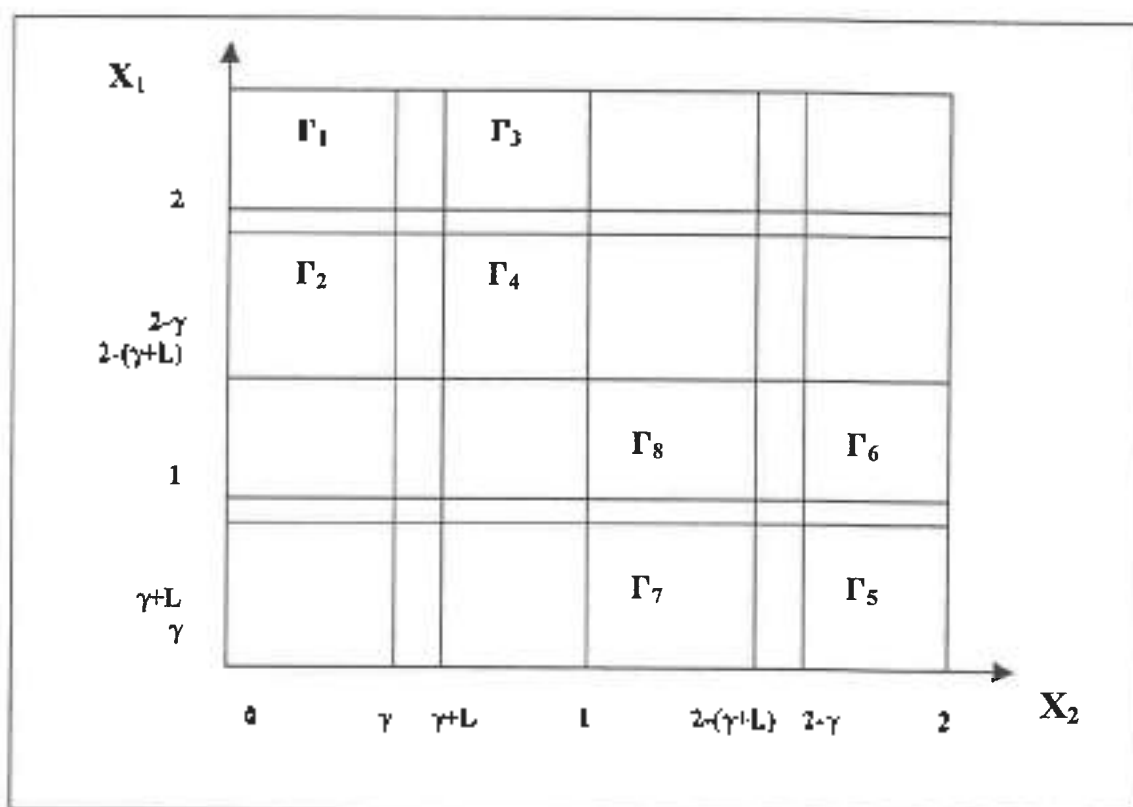
Το γεγονός A_1 συμβαίνει όταν τόσο η μονάδα άμεσης επέμβασης όσο και το σημείο γέννησης του περιστατικού βρίσκονται εκατέρωθεν της διαχωριστικής νησίδας.

Για να καταδειχθούν σχηματικά οι περιπτώσεις αυτές η μοναδιαία λεωφόρος αναπτύσσεται έτσι ώστε να αποκτήσει μήκος ίσο με δύο μονάδες μήκους.



Έστω τα εξής αμοιβαίως αποκλειόμενα γεγονότα:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: & \{ 0 < X_2 < \gamma, \quad 2-\gamma < X_1 < 2 \} \\ \Gamma_2: & \{ 0 < X_2 < \gamma, \quad 1 < X_1 < 2 - (\gamma+L) \} \\ \Gamma_3: & \{ \gamma+L < X_2 < 1, \quad 2-\gamma < X_1 < 2 \} \\ \Gamma_4: & \{ \gamma+L < X_2 < 1, \quad 1 < X_1 < 2 - (\gamma+L) \} \\ \Gamma_5: & \{ 2-\gamma < X_2 < 2, \quad 0 < X_1 < \gamma \} \\ \Gamma_6: & \{ 2-\gamma < X_2 < 2, \quad \gamma+L < X_1 < 1 \} \\ \Gamma_7: & \{ 1 < X_2 < 2 - (\gamma+L), \quad 0 < X_1 < \gamma \} \\ \Gamma_8: & \{ 1 < X_2 < 2 - (\gamma+L), \quad \gamma+L < X_1 < 1 \} \end{aligned}$$



Εικόνα 2.4 Από κοινό δειγματικό χώρο των τυχαίων μεταβλητών (X_1, X_2) και περιπτώσεις στις οποίες $D_c > 0$

$$P(\Gamma_1) = \gamma(2 - 2 + \gamma) / 4 = \gamma^2 / 4$$

$$P(\Gamma_2) = \gamma(2 - \gamma - L - 1) / 4 = \gamma(1 - \gamma - L) / 4$$

$$P(\Gamma_3) = (1 - \gamma - L)(2 - 2 + \gamma) / 4 = \gamma(1 - \gamma - L) / 4$$

$$P(\Gamma_4) = (1 - \gamma - L)(2 - \gamma - L - 1) / 4 = (1 - \gamma - L)^2 / 4$$

$$P(\Gamma_5) = (2 - 2 + \gamma)\gamma / 4 = \gamma^2 / 4$$

$$P(\Gamma_6) = (2 - 2 + \gamma)(1 - \gamma - L) / 4 = \gamma(1 - \gamma - L) / 4$$

$$P(\Gamma_7) = (2 - \gamma - L - 1)\gamma / 4 = \gamma(1 - \gamma - L) / 4$$

$$P(\Gamma_8) = (2 - \gamma - L - 1)(1 - \gamma - L) / 4 = (1 - \gamma - L)^2 / 4$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7 \cup \Gamma_8 \Rightarrow \\
 P(A_1) &= P(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7 \cup \Gamma_8) \Rightarrow \\
 P(A_1) &= P(\Gamma_1) + P(\Gamma_2) + P(\Gamma_3) + P(\Gamma_4) + P(\Gamma_5) + P(\Gamma_6) + P(\Gamma_7) + P(\Gamma_8) \Rightarrow \\
 P(A_1) &= (\gamma^2 + (1-\gamma-L)^2 + 2\gamma(1-\gamma-L))/2 \Rightarrow \\
 P(A_1) &= (\gamma^2 + 1 + \gamma^2 + L^2 + 2\gamma L - 2\gamma - 2L - 2\gamma - 2\gamma^2 - 2\gamma L)/2 \Rightarrow \\
 P(A_1) &= (L^2 - 2L + 1)/2 = (L-1)^2/2
 \end{aligned}$$

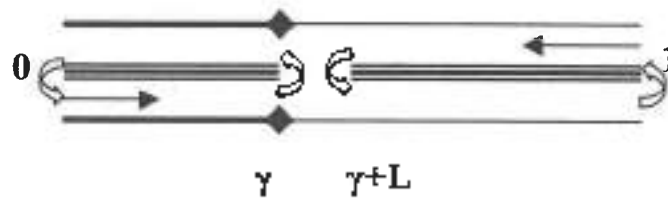
Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με την διαίσθηση του αναγνώστη. Για $L = 1$, δηλαδή για απουσία διαχωριστικής νησίδας κατά μήκος του οδικού τμήματος, η πιθανότητα της μονάδας ανταπόκρισης να διανύσει επιπλέον απόσταση $D_e > 0$ είναι ίση με μηδέν. Αντίθετα για $L=0$, δηλαδή όταν η διαχωριστική νησίδα δεν διακόπτεται σε κανένα σημείο κατά μήκος, η πιθανότητα της μονάδας ανταπόκρισης να διανύσει επιπλέον απόσταση $D_e > 0$ είναι ίση με 1.

Παρακάτω, οι δυνατές θέσεις των X_1 , X_2 δηλώνονται με το κόκκινο και το μπλέ χρώμα αντίστοιχα.

$$X_1 \quad \text{---} \blacklozenge \quad 0 \leq X_1 \leq 1$$

$$X_2 \quad \text{---} \blacklozenge \quad 0 \leq X_2 \leq 1$$

Γ1:



$$D_e / \Gamma 1 = 2 \min \{Z_1, Z_2\}$$

$$Z_1 = \gamma - (X_1 / \Gamma 1) - 2$$

$$Z_2 = \gamma - (X_2 / \Gamma 1)$$

Με τον τρόπο αυτό οι μεταβλητές Z_1 , Z_2 είναι ομοιόμορφα και ανεξάρτητα κατανομημένες στο διάστημα $[0, \gamma]$.

Έστω όμως ότι οι μεταβλητές Z_1 , Z_2 είναι ομοιόμορφα και ανεξάρτητα κατανομημένες στο διάστημα $[0, 1]$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της μέσης τιμής συνεχούς τυχαίας μεταβλητής θα

υπολογιστεί η μέση τιμή για κάθε ένα από τα οκτώ γεγονότα που μας ενδιαφέρουν.

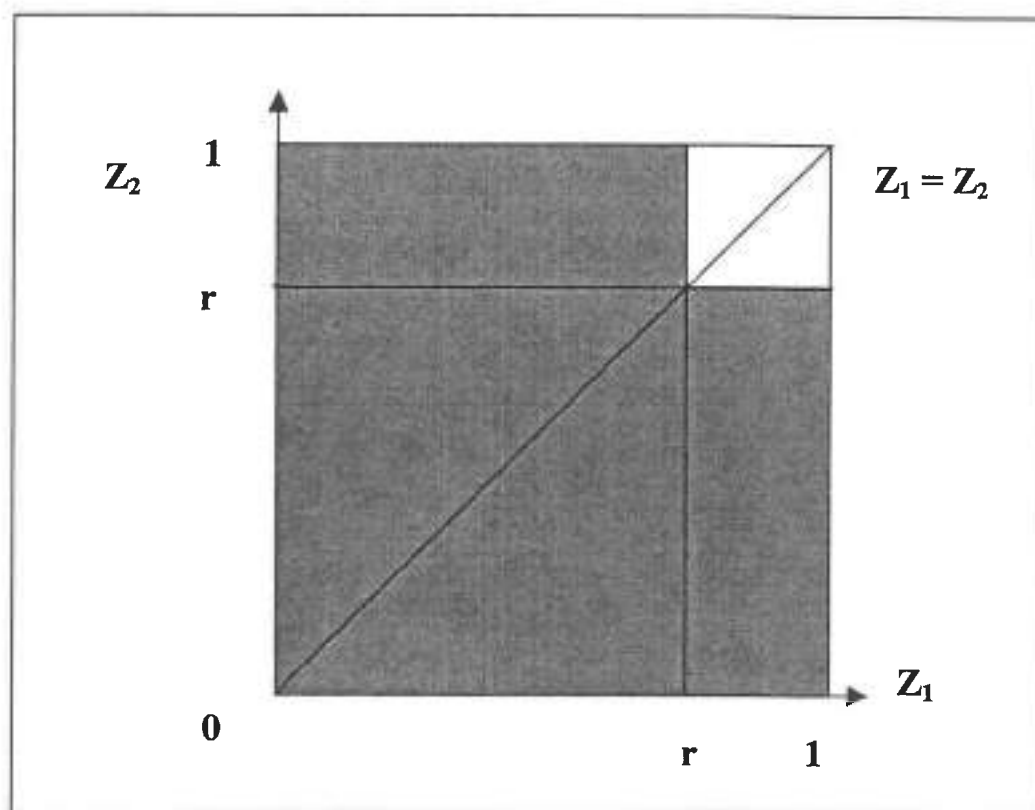
Αρχικά θα υπολογιστεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής $\min [Z_1, Z_2] = R$.

$$F_R(r) = P\{R \leq r\} = P\{\min [Z_1, Z_2] \leq r\}$$

Αν $Z_1 < Z_2$ τότε $\min [Z_1, Z_2] = Z_1$ και το γεγονός $\min [Z_1, Z_2] \leq r$ αντιστοιχεί στο σύνολο των σημείων που κείται αριστερά της ευθείας $z_1 = r$.

Αν $Z_1 > Z_2$ τότε $\min [Z_1, Z_2] = Z_2$ και το γεγονός $\min [Z_1, Z_2] \leq r$ αντιστοιχεί στο σύνολο των σημείων που κείται κάτω από την ευθεία $z_2 = r$.

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές περιπτώσεις, το γεγονός $\min [Z_1, Z_2] \leq r$ αντιστοιχεί στη περιοχή σχήματος L του παρακάτω σχήματος.



Εικόνα 2.5 Από κοινό δειγματικός χώρος δύο τυχαίων μεταβλητών (Z_1, Z_2) ομοιόμορφα κατανομημένων στο δώστημα $[0,1]$.

Επειδή $f_{z1}(z_1) = f_{z2}(z_2) = 1/1$, $0 \leq z_1, z_2 \leq 1$, μπορεί να υπολογιστεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δουλεύοντας απευθείας με τις επιφάνειες του δειγματικού χώρου.

$$F_R(r) = (r^2 + 2r(1-r)) = (r^2 + 2r - 2r^2) = (2r - r^2), \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$\text{Άρα } f_R(r) = 2 - 2r, \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$E[R] = \int_0^1 r f_R(r) dr = \int_0^1 r (2 - 2r) dr = \int_0^1 2r - 2r^2 dr$$

$$E[R] = \int_0^1 2r dr - \int_0^1 2r^2 dr = \left[r^2 \right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[r^3 \right]_0^1$$

$$E[R] = 1 - (2/3) = 1/3$$

$$\text{Όμως } D_c / T1 = 2 \min [Z_1, Z_2] = 2R$$

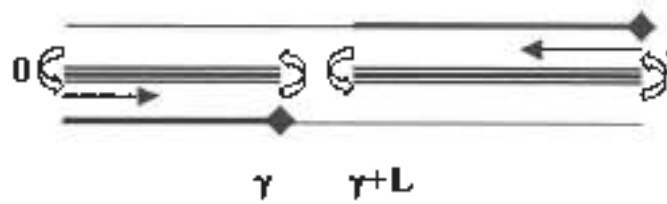
$$\text{Άρα } E[D_c / T1] = (2\gamma) / 3$$

Γ2:

$$D_c / T2 = 2(1 - X_1) = 2 - 2X_1$$

Η μεταβλητή X_1 είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[1, 2-(\gamma+L)]$.

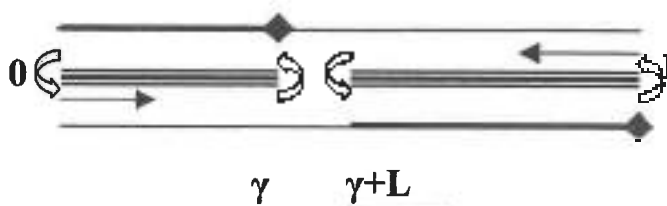
$$\text{Άρα } E[X_1] = (3 - \gamma - L) / 2$$



$$E[D_c / T2] = E[2 - 2X_1] = -2E[X_1] + 2 = -2(3 - \gamma - L) / 2 + 2 =$$

$$E[D_c / T2] = -3 + \gamma + L + 2 = -1 + \gamma + L$$

Γ3:



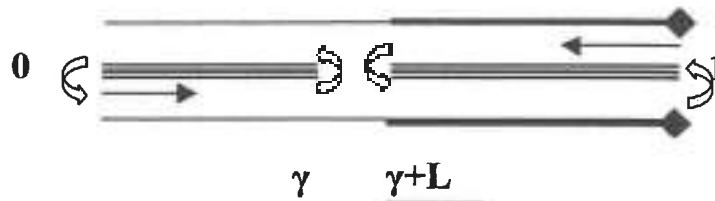
$$D_c / \Gamma 3 = 2 (1 - X_2) = 2 - 2 X_2$$

Η μεταβλητή X_2 είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[\gamma+L, 1]$.
Άρα $E[X_2] = (1 + \gamma + L) / 2$

$$E[D_c / \Gamma 3] = E[2 - 2 X_2] = - 2 E[X_2] + 2 = - 2 (1 + \gamma + L) / 2 + 2 =$$

$$E[D_c / \Gamma 3] = - 1 - \gamma - L + 2 = 1 - \gamma - L$$

Γ4:



$$D_c / \Gamma 4 = 2 \min [Z_1, Z_2]$$

$$Z_1 = -1 + (X_1 / \Gamma 4)$$

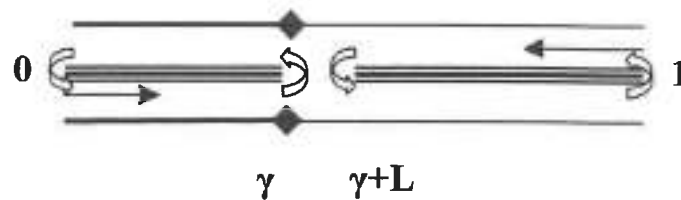
$$Z_2 = -\gamma - L + (X_2 / \Gamma 4)$$

Με τον τρόπο αυτό οι μεταβλητές Z_1, Z_2 είναι ομοιόμορφα και ανεξάρτητα κατανομημένες στο διάστημα $[0, 1 - \gamma - L]$.

$$\text{Όμως } D_c / \Gamma 4 = 2 \min [Z_1, Z_2]$$

$$\text{Άρα } E[D_c / \Gamma 4] = 2 (1/3) (1 - \gamma - L)$$

Γ5:



$$D_c / \Gamma 5 = 2 \min [Z_1, Z_2]$$

$$Z_1 = 0 + (X_1 / \Gamma 5)$$

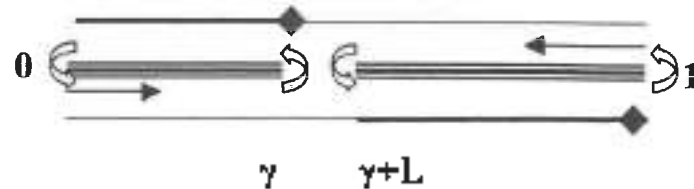
$$Z_2 = \gamma - L + (X_2 / \Gamma 5)$$

Με τον τρόπο αυτό οι μεταβλητές Z_1, Z_2 είναι ομοιόμορφα και ανεξάρτητα κατανομημένες στο διάστημα $[0, \gamma]$.

Όμως $D_c / \Gamma 5 = 2 \min [Z_1, Z_2]$

Άρα $E[D_c / \Gamma 5] = (2 \gamma / 3)$

Γ6:



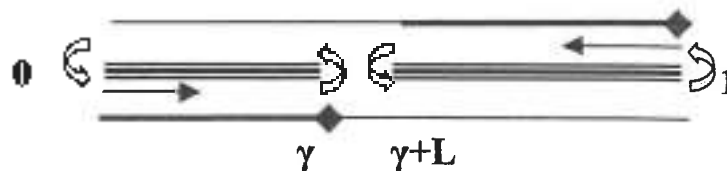
$$D_c / \Gamma 6 = 2 X_2$$

Η μεταβλητή X_2 είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[2-\gamma, 2]$.

Άρα $E[X_2] = (4-\gamma) / 2$

$$E[D_c / \Gamma 6] = E[2 X_2] = 2 E[X_2] = 2 (4-\gamma) / 2 = 4-\gamma$$

Γ7:



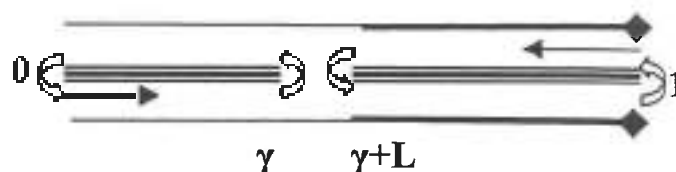
$$D_c / \Gamma 7 = 2 X_1$$

Η μεταβλητή X_1 είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στα διάστημα $[0, \gamma]$.

Άρα $E[X_1] = \gamma / 2$

$$E[D_c / \Gamma 7] = E[2 X_1] = 2 E[X_1] = 2 \gamma / 2 = \gamma$$

Γ8



$$D_c / \Gamma 8 = 2 \min [Z_1, Z_2]$$

$$Z_1 = -\gamma - L + (X_1 / \Gamma 3)$$

$$Z_2 = -1 + (X_2 / \Gamma 3)$$

Με τον τρόπο αυτό οι μεταβλητές Z_1 , Z_2 είναι ομοιόμορφα και ανεξάρτητα κατανομημένες στο διάστημα $[0, 1 - \gamma - L]$.

Όμως $D_c / \Gamma 8 = 2 \min [Z_1, Z_2]$

Άρα $E[D_c / \Gamma 8] = 2 (1 - \gamma - L)(1/3)$

$$\begin{aligned} E[D_c] &= \left[\sum_{i=1}^8 E[D_c / \Gamma_i] P(\Gamma_i) \right] (L - 1)^2 / 2 \\ &= \left[(2\gamma) / 3 * \gamma^2 / 4 + \right. \\ &\quad (-1 + \gamma + L) * \gamma (1 - \gamma - L) / 4 + \\ &\quad (1 - \gamma - L) * \gamma (1 - \gamma - L) / 4 + \\ &\quad [2(1 - \gamma - L)(1/3) * (1 - \gamma - L)^2 / 4 + \\ &\quad (2\gamma) / 3 * \gamma^2 / 4 + \\ &\quad (4 - \gamma) * \gamma (1 - \gamma - L) / 4 + \\ &\quad \gamma * \gamma (1 - \gamma - L) / 4 + \\ &\quad \left. [2(1 - \gamma - L)(1/3) * (1 - \gamma - L)^2 / 4] \right] (L - 1)^2 / 2 \\ &= [\gamma^3 / 3 + (1 - \gamma - L)^3 / 3 + \gamma (1 - \gamma - L)] (L - 1)^2 / 2 \end{aligned}$$

Η επιφάνεια που ορίζει η σχέση αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

γ	L	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0.167	0.098	0.055	0.028	0.013	5.208E-3	1.707E-3	4.05E-4	5.333E-5	1.667E-6	0	0
0,1	0.167	0.102	0.059	0.032	0.017	7.708E-3	3.147E-3	1.035E-3	2.133E-4	1.667E-6	0	0
0,2	0.167	0.104	0.062	0.035	0.019	8.958E-3	3.627E-3	1.035E-3	5.333E-5	-	0.833E-5	0
0,3	0.167	0.106	0.064	0.037	0.019	8.958E-3	3.147E-3	4.05E-4	-	4.267E-4	-	2.683E-4
0,4	0.167	0.107	0.065	0.037	0.019	7.708E-3	1.707E-3	8.55E-4	-	1.227E-3	-	5.383E-4
0,5	0.167	0.107	0.064	0.035	0.017	5.208E-3	-	6.933E-4	-	2.745E-3	-	8.983E-4
0,6	0.167	0.106	0.062	0.032	0.013	1.458E-3	-	4.053E-3	-	5.265E-3	-	3.787E-3
0,7	0.167	0.104	0.059	0.028	7.92E-3	-	3.542E-3	-	8.175E-3	-	5.547E-3	-
0,8	0.167	0.102	0.055	0.022	1.44E-3	-	9.792E-3	-0.014	-0.012	-	7.627E-3	-
0,9	0.167	0.098	0.049	0.015	-	6.48E-3	-0.017	-0.02	-0.017	-0.01	-	3.238E-3
1	0.167	0.094	0.042	5.962E-3	-0.016	-0.026	-0.027	-0.027	-0.022	-0.013	-	4.048E-3

ΠΙΝ.2.1
 $E_{pr}(\gamma, L)$

Αν προστεθεί στις τιμές του άνω πίνακα η μέση τιμή $E[D]=0,333$ από το 1^ο πρόβλημα, θα προκύψει ένα νέο μητρώο το οποίο δείχνει τη συνολική μέση τιμή $E[D']$ μετά τη προσθήκη της διαχωριστικής νησίδας.

$\gamma \backslash l$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,500	0,431	0,388	0,361	0,346	0,338	0,335	0,335	0,333	0,333	0,333
0,1	0,500	0,435	0,392	0,365	0,350	0,341	0,336	0,334	0,333	0,333	
0,2	0,500	0,437	0,395	0,368	0,352	0,342	0,337	0,334	0,333		
0,3	0,500	0,439	0,397	0,370	0,352	0,342	0,336	0,333			
0,4	0,500	0,440	0,398	0,370	0,352	0,341	0,335				
0,5	0,500	0,440	0,397	0,368	0,350	0,338					
0,6	0,500	0,439	0,395	0,365	0,346						
0,7	0,500	0,437	0,392	0,361							
0,8	0,500	0,435	0,388								
0,9	0,500	0,431									
1	0,500										

ΠΙΝ. 2.2
 $E[D_0] + E[D] - E[D']$

Διαιρώντας τις τιμές αυτές με τη γνωστή από το 1^ο πρόβλημα μέση τιμή $E[D]=0,333$ προκύπτει ένα νέο μητρώο που δείχνει την ποσοστιαία αύξηση της μέσης τιμής $E[D]$ λόγω της προσθήκης της διαχωριστικής νησίδας.

$\gamma \backslash L$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	50,15	29,43	16,52	8,41	3,90	1,56	0,51	0,12	0,02	0,00	0,00
0,1	50,15	30,63	17,72	9,61	5,11	2,31	0,95	0,31	0,06	0,00	
0,2	50,15	31,23	18,62	10,51	5,71	2,69	1,09	0,31	0,02		
0,3	50,15	31,83	19,22	11,11	5,71	2,69	0,95	0,12			
0,4	50,15	32,13	19,52	11,11	5,71	2,31	0,51				
0,5	50,15	32,13	19,22	10,51	5,11	1,56					
0,6	50,15	31,83	18,62	9,61	3,90						
0,7	50,15	31,23	17,72	8,41							
0,8	50,15	30,63	16,52								
0,9	50,15	29,43									
1	50,15										

ΠΙΝ. 2.3
ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ % ΑΥΞΗΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΙΔΟΥ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΙΚΗΣ
ΝΗΣΙΔΑΣ

Ανάλυση των τιμών του άνω πίνακα.

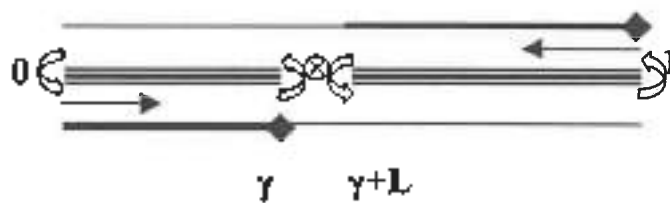
Όταν το μήκος του μεσαίου ανοίγματος της νησίδας είναι μεγαλύτερο από το $\frac{1}{2}$ του συνολικού μήκους της οδού η επιβάρυνση της ύπαρξης της νησίδας στη μέση τιμή της απόστασης D είναι μικρότερη από 1,56 %.

Αντίθετα, η επιβάρυνση αυτή αυξάνεται όσο ο λόγος μήκος ανοίγματος -μήκος λεωφόρου τείνει προς το μηδέν, $L \rightarrow 0$.

Για κάθε τιμή γ και $L=0$ δηλαδή για συνεχόμενη διαχωριστική νησίδα κατά μήκος της λεωφόρου $E[D_c]=0,167$ που αποτελεί και τη μέγιστη τιμή της επιπλέον απόστασης D_c . Δηλαδή η ύπαρξη νησίδας κατά μήκος της λεωφόρου προκαλεί μία αύξηση κατά 50% της μέσης τιμής της απόστασης D .

Το ερώτημα που τίθεται αμέσως είναι πώς θα επιδρούσε η προτοποθέτηση της μονάδας ανταπόκρισης στο μέσο του ανοίγματος της διαχωριστικής νησίδας στις παραμέτρους της τυχαίας μεταβλητής D .

$$\begin{array}{ll} X_1 & \xrightarrow{\quad \blacklozenge \quad} \quad 0 \leq X_1 \leq 1 \\ X_2 & \otimes \quad \quad \quad X_2 = \gamma + L/2 \end{array}$$



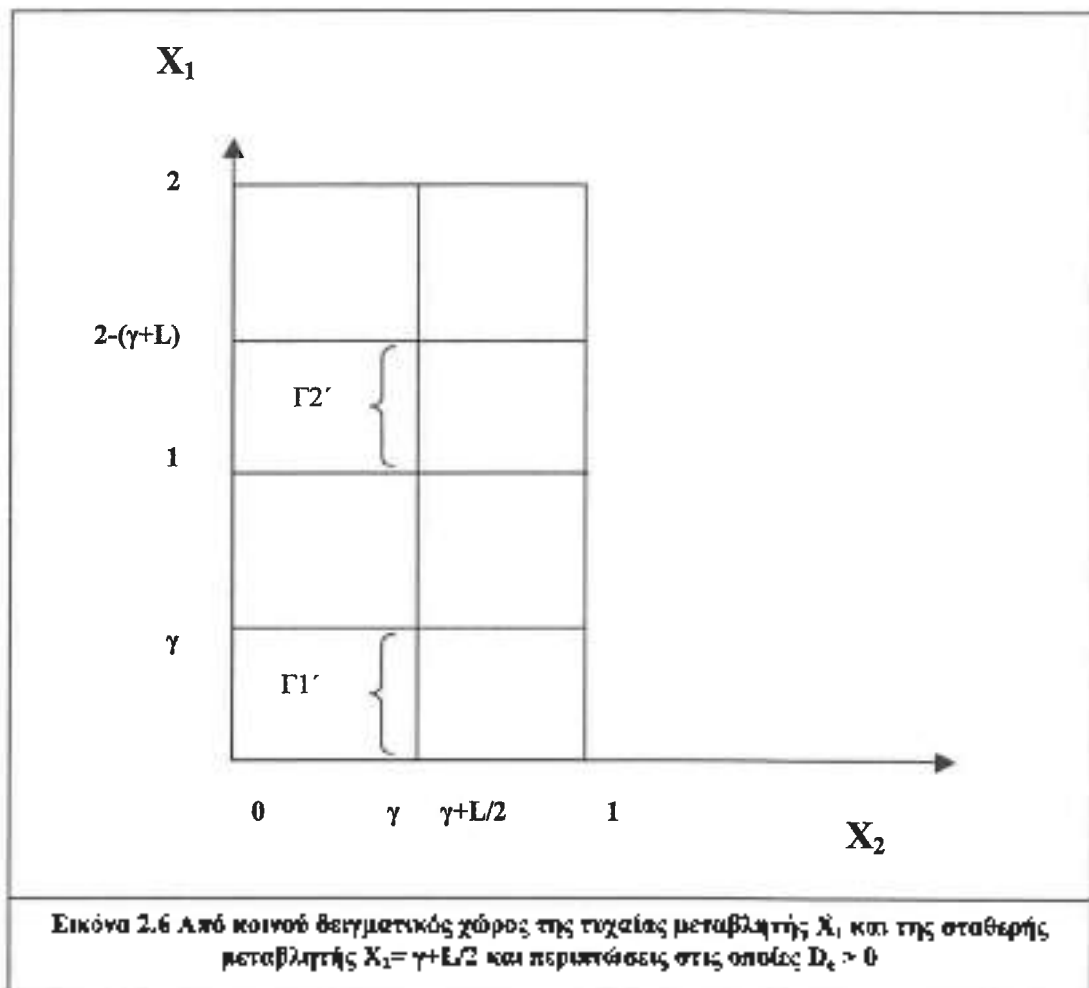
Επιπλέον απόσταση D_c' θα προκληθεί όταν συμβεί κάποιο από τα παρακάτω γεγονότα:

$$\Gamma 1' = \{ X_2 = \gamma + L/2, 0 \leq X_1 \leq \gamma \}$$

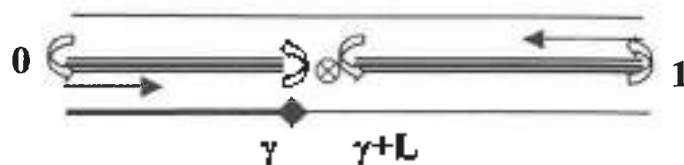
$$\Gamma 2' = \{ X_2 = \gamma + L/2, 1 \leq X_1 \leq 2 - (\gamma + L) \}$$

$$E[D_c'] = E[D_c' / D_c' > 0] P(D_c' > 0)$$

$$P(D_c' > 0) = P(\Gamma 1') + P(\Gamma 2') = \gamma + 1 - \gamma - L = 1 - L$$



$\Gamma 1'$



$$D_c' / \Gamma 1' = 2 X_1$$

Η μεταβλητή X_1 είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στα διάστημα $[0, \gamma]$.
Άρα $E[X_1] = \gamma / 2$

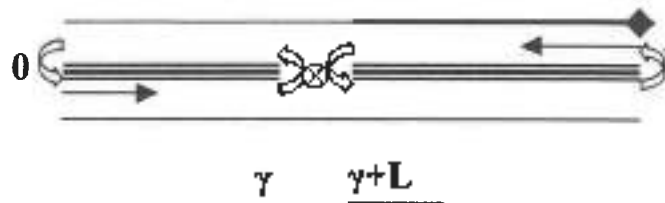
$$E[D_c' / \Gamma 1'] = E[2 X_1] = 2 E[X_1] = 2 \gamma / 2 = \gamma$$

Γ_2'

$$D_c' / \Gamma_2' = 2 (1 - X_1) = 2 - 2 X_1$$

Η μεταβλητή X_1 είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[1, 2-(\gamma+L)]$.

$$\text{Άρα } E[X_1] = (3 - \gamma - L) / 2$$



$$E[D_c' / \Gamma_2'] = E[2 - 2 X_1] = -2 E[X_1] + 2 = -2 (3 - \gamma - L) / 2 + 2 =$$

$$E[D_c' / \Gamma_2'] = -3 + \gamma + L + 2 = -1 + \gamma + L$$

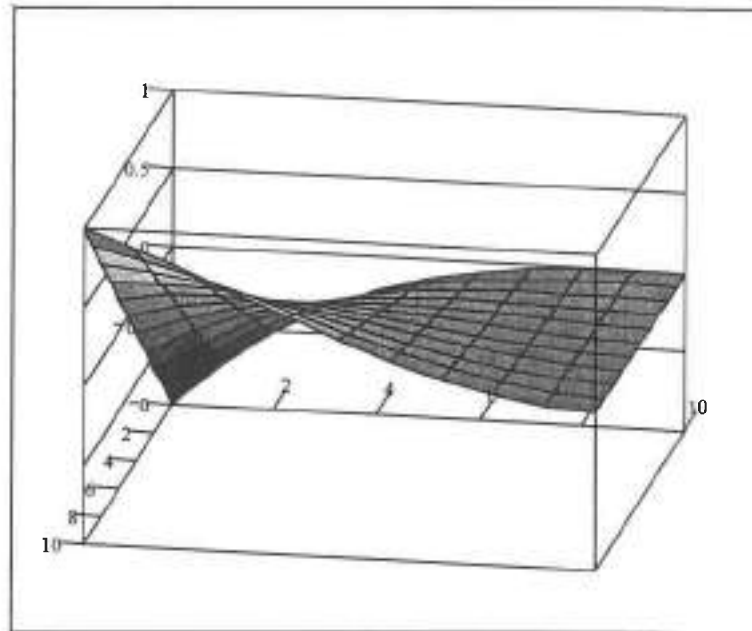
$$E[D_c' / D_c' > 0] = \sum_{i=1}^2 E[D_c' / \Gamma_i] P(\Gamma_i)$$

$$= \gamma^2 + (-1 + \gamma + L) (1 - \gamma - L)$$

$$= \gamma^2 - (1 - \gamma - L)^2$$

$$E[D_c'] = [\gamma^2 - (1 - \gamma - L)^2] (1-L)$$

Η επιφάνεια που ορίζει η σχέση αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



M

L	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
γ											
0	-1	-0.729	-0.512	-0.343	-0.216	-0.125	-0.064	-0.027	-8E-3	-1E-3	0
0,1	-0.8	-0.567	-0.384	-0.245	-0.144	-0.075	-0.032	-9E-3	0	1E-3	0
0,2	-0.6	-0.405	-0.256	-0.147	-0.072	-0.025	0	9E-3	8E-3	3E-3	0
0,3	-0.4	-0.243	-0.128	-0.049	0	0.025	0.032	0.027	0.016	9E-3	0
0,4	-0.2	-0.081	0	0.049	0.072	0.075	0.064	0.045	0.024	7E-3	0
0,5	0	0.081	0.128	0.147	0.144	0.125	0.096	0.063	0.032	9E-3	0
0,6	0.2	0.243	0.256	0.245	0.216	0.175	0.128	0.081	0.04	0.011	0
0,7	0.4	0.405	0.384	0.343	0.288	0.225	0.16	0.099	0.048	0.013	0
0,8	0.6	0.567	0.512	0.441	0.36	0.275	0.192	0.117	0.056	0.015	0
0,9	0.8	0.729	0.64	0.539	0.432	0.325	0.224	0.135	0.064	0.017	0
1	1	0.891	0.768	0.637	0.504	0.375	0.256	0.153	0.072	0.019	0

ΠΙΝ.2.4
 $E_{De}'(\gamma, L)$

Εάν υπολογιστεί η διαφορά των συναρτήσεων E_{De} , E_{De}' δηλαδή η συνάρτηση:

$$F(\gamma, L) = E_{De}' - E_{De} = [\gamma^2 - (1 - \gamma - L)^2] (1 - L) -$$

$$[\gamma^3 / 3 + (1 - \gamma - L)^3 (1/3) + (1 - \gamma - L) \gamma^2 / 2] (L - 1)^2 / 2$$

$$0 \leq \gamma \leq 1, 0 \leq L \leq 1, \gamma + L \leq 1$$

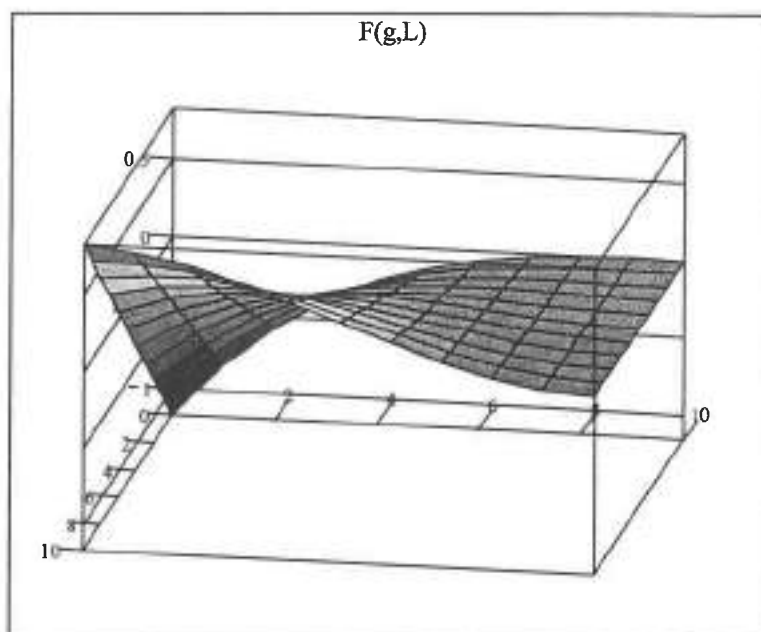
θα βρεθούν οι μέγ των γ, L για τις οποίες η νέα αυτή συνάρτηση έχει αρνητικές τιμές και συνεπώς τις τιμές για τις οποίες ισχύει:

$$E_{De}' < E_{De}$$

Αντίθετα για τις τιμές των γ, L για τις οποίες η νέα αυτή συνάρτηση έχει θετικές τιμές ισχύει :

$$E_{De}' > E_{De}$$

Επομένως το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $F(\gamma, L)$ υποδεικνύει, για κάθε ζεύγος τιμών γ, L , ποια χωροθέτηση της μονάδας ανταπόκρισης συντελεί σε μικρότερη επιπλέον απόσταση D_e .



M

L	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
γ											
0	- 1.167	- 0.827	- 0.567	- 0.371	- 0.229	-0.13	- 0.066	- 0.027	- 8.053 E-3	- 1.002 E-3	0
0,1	- 0.967	- 0.669	- 0.443	- 0.277	- 0.161	- 0.083	- 0.035	-0.01	- 2.133 E-4	- 9.983 E-4	0
0,2	- 0.767	- 0.509	- 0.318	- 0.182	- 0.091	- 0.034	- 3.627 E-3	- 7.965 E-3	- 7.947 E-3	- 3.088 E-3	0
0,3	- 0.567	- 0.349	- 0.192	- 0.086	- 0.019	- 0.016	- 0.029	- 0.027	- 0.016	- 5.268 E-3	0
0,4	- 0.367	- 0.188	- 0.065	- 0.012	- 0.053	- 0.067	- 0.062	- 0.046	- 0.025	- 7.538 E-3	0
0,5	- 0.167	- 0.026	- 0.064	- 0.112	- 0.127	- 0.12	- 0.097	- 0.066	- 0.034	- 9.898 E-3	0
0,6	0.033	0.137	0.194	0.213	0.203	0.174	0.132	0.086	0.044	0.012	0
0,7	0.233	0.301	0.325	0.313	0.28	0.229	0.168	0.107	0.054	0.015	0
0,8	0.433	0.465	0.457	0.419	0.359	0.285	0.206	0.129	0.064	0.018	0
0,9	0.633	0.631	0.591	0.524	0.438	0.342	0.244	0.152	0.074	0.02	0
1	0.833	0.797	0.726	0.631	0.52	0.401	0.283	0.175	0.085	0.021	0

ΠΙΝ.2.5
F(γ,L)

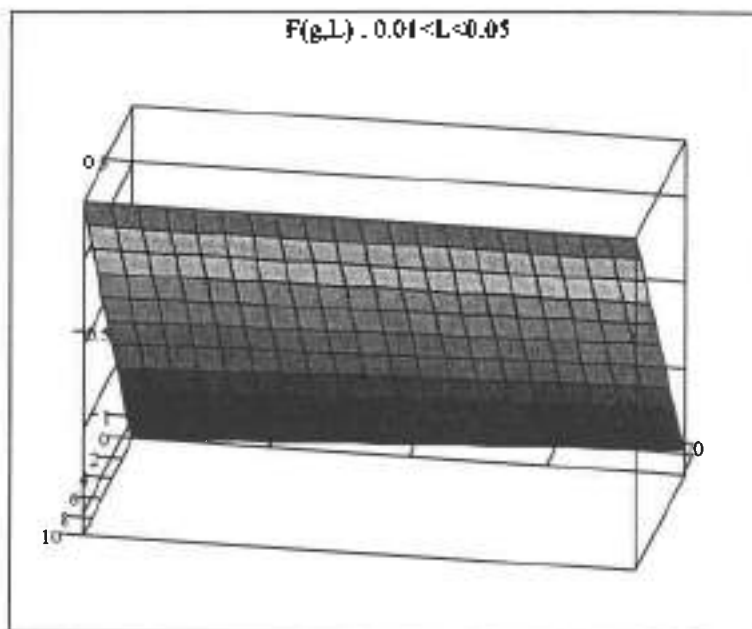
$E_{De}' < E_{De}$: τοποθέτηση της μονάδας στο μέσο του ανοίγματος μήκους L

$E_{De}' > E_{De}$: περιπολία κατά μήκος εναλλάξ στις δύο λωρίδες κυκλοφορίας

$\gamma+L>1$: αδύνατο

Βρέθηκε ένα εργαλείο επιλογής στρατηγικής για τη χωροθέτηση μίας μονάδας ανταπόκρισης σε τμήμα οδού με ομοιόμορφη κατά μήκος κατανομή ζήτησης για εξυπηρέτηση και δυνατότητα επιτόπου αναστροφής στην αρχή, στο τέλος και σε ένα ενδιάμεσο τμήμα αυθαίρετου μήκους.

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνουν μερικές παρατηρήσεις. Στις περισσότερες περιπτώσεις το άνοιγμα της διαχωριστικής λωρίδας είναι της τάξης μερικών δεκάδων μέτρων και παρεμβάλλεται μεταξύ οδικών τμημάτων μήκους μερικών χιλιομέτρων. Αναγόμενοι σε μοναδιαίο οδικό μήκος, αυτό σημαίνει ότι $L \approx 0,01-0,05$. Επαναλαμβάνοντας την άνω διαδικασία, μεγεθύνοντας ουσιαστικά την επιφάνεια της συνάρτησης $F(\gamma, L)$ στην περιοχή $0,01 < L < 0,05$ με βήμα ΔL οσοδήποτε μικρό μπορεί να προσεγγισθεί το σύνολο του δισδιάστατου χώρου των γ και L που οριοθετεί τις δύο εναλλακτικές στρατηγικές.



M

γ	L	0,001	0,002	0,004	0,007	0,010	0,016	0,022	0,024	0,026	0,028	0,03	0,032	0,034	0,036	0,038	0,04	0,042	0,044	0,046	0,048	0,05
0	-1,129	-1,121	-1,114	-1,107	-1,099	-1,092	-1,085	-1,077	-1,077	-1,07	-1,063	-1,056	-1,049	-1,042	-1,035	-1,028	-1,021	-1,014	-1,007	-1	-0,993	-0,986
0,1	-0,933	-0,927	-0,92	-0,914	-0,907	-0,901	-0,894	-0,888	-0,881	-0,875	-0,869	-0,863	-0,856	-0,85	-0,844	-0,838	-0,832	-0,826	-0,82	-0,814	-0,808	
0,2	-0,738	-0,732	-0,726	-0,72	-0,715	-0,709	-0,704	-0,698	-0,693	-0,687	-0,682	-0,676	-0,671	-0,665	-0,66	-0,655	-0,65	-0,644	-0,639	-0,634	-0,629	
0,3	-0,542	-0,537	-0,532	-0,527	-0,522	-0,518	-0,513	-0,508	-0,503	-0,499	-0,494	-0,489	-0,485	-0,48	-0,476	-0,471	-0,467	-0,462	-0,458	-0,454	-0,449	
0,4	-0,346	-0,342	-0,338	-0,334	-0,33	-0,326	-0,322	-0,318	-0,314	-0,31	-0,306	-0,302	-0,299	-0,295	-0,291	-0,287	-0,284	-0,28	-0,276	-0,273	-0,269	
0,5	-0,15	-0,147	-0,143	-0,14	-0,137	-0,134	-0,131	-0,127	-0,124	-0,121	-0,118	-0,115	-0,112	-0,109	-0,106	-0,103	-0,1	-0,097	-0,095	-0,092	-0,089	
0,6	0,046	0,049	0,051	0,054	0,056	0,058	0,061	0,063	0,066	0,068	0,07	0,072	0,075	0,077	0,079	0,081	0,083	0,086	0,088	0,09	0,092	
0,7	0,242	0,244	0,246	0,248	0,249	0,251	0,252	0,254	0,256	0,257	0,259	0,26	0,262	0,263	0,265	0,266	0,268	0,269	0,27	0,272	0,273	
0,8	0,439	0,44	0,441	0,442	0,442	0,443	0,444	0,445	0,446	0,447	0,448	0,449	0,449	0,45	0,451	0,452	0,452	0,453	0,454	0,454	0,455	
0,9	0,635	0,635	0,636	0,636	0,636	0,636	0,636	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	
1	0,831	0,831	0,831	0,83	0,83	0,829	0,829	0,828	0,828	0,827	0,826	0,826	0,825	0,825	0,824	0,823	0,823	0,822	0,821	0,821	0,82	

ΠΙΝ. 2.6
 $F(\gamma, L), 0,01 < L < 0,05$

$$\begin{array}{ll} \text{Για } \gamma < 0,5 & E_{De}' < E_{De} \\ \text{Για } \gamma > 0,5 & E_{De}' > E_{De} \end{array}$$

Συνεπώς αν η αρχή του (μεσαίου) ανοίγματος βρίσκεται πριν από το μέσο της οδού είναι προτιμότερη η τοποθέτηση της μονάδας στο μέσο του ανοίγματος, ενώ αν αρχή του (μεσαίου) ανοίγματος βρίσκεται μετά από το μέσο της οδού είναι προτιμότερη η περιπολία της μονάδας κατά μήκος της οδού εναλλάξ στις δύο κατευθύνσεις κυκλοφορίας.

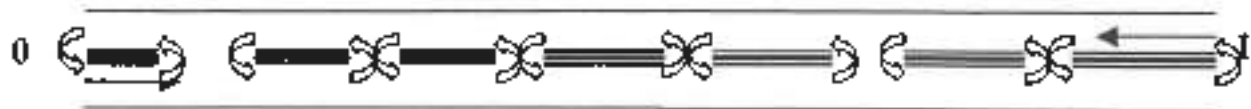
Το άνω συμπέρασμα έχει πρακτική εφαρμογή όταν σε έναν οδικό άξονα σταθερού φόρτου ό διατιθέμενος από την εκάστοτε υπηρεσία παροχής εξυπηρέτησης αριθμός μονάδων ανταπόκρισης είναι ίσος με το ήμισυ του αριθμού των τμημάτων μη διακοπτόμενης διαχωριστικής νησίδας. Στη μοναδιαία λεωφόρο που εξετάστηκε στο 3^ο πρόβλημα υπάρχουν, στη γενική περίπτωση, δύο τμήματα μη διακοπτόμενης διαχωριστικής νησίδας και μία μονάδα εξυπηρέτησης. Θα μπορούσε να υπήρχε όμως και η παρακάτω διαμόρφωση:



Δηλαδή τέσσερα συνεχόμενα τμήματα διαχωριστικής νησίδας.



Η τρία συνεχόμενα τμήματα διαχωριστικής νησίδας



Η 5^η συνεχόμενα τμήματα διαχωριστικής νησίδας.

Ανεξάρτητα του πλήθους των συνεχόμενων τμημάτων της διαχωριστικής νησίδας η διαδικασία εύρεσης της συνάρτησης $E_{Dk'} - E_{Dk}$ παραμένει σταθερή.

Μία επιπλέον πολυπλοκότητα αναμένεται, αν συμβολιστούν οι σχετικές αποστάσεις του 2^{ου}, του 3^{ου} κ.ο.κ. εσωτερικού ανοιγματος συναρτήσει νέων μεταβλητών π.χ. των δ, ε οπότε στη περίπτωση των τριών συνεχόμενων τμημάτων η συνάρτηση $E_{D\varepsilon'} - E_{D\varepsilon}$ θα είναι τριών μεταβλητών (γ, L, δ) ενώ στην περίπτωση των τεσσάρων συνεχόμενων τμημάτων θα είναι τεσσάρων μεταβλητών $(\gamma, L, \delta, \varepsilon)$ κ.ο.κ. Το κέρδος μίας τέτοιας επίλυσης συνίσταται στον απευθείας υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης $E_{Dk'} - E_{Dk}$ για κάθε τμήμα οδικού άξονα που έχει σταθερό μήκος ανοιγμάτων μεταξύ διαδοχικών νησίδων και ίδιο αριθμό συνεχόμενων τμημάτων διαχωριστικής νησίδας με την εκάστοτε αντίστοιχη οδό μοναδιαίου μήκους αλλά **μη σταθερά μήκη διαχωριστικών νησίδων.**

Αν όμως εκφραστούν οι σχετικές αποστάσεις των θέσεων των ανοιγμάτων ως αθροίσματα του γ και κλασμάτων του μοναδιαίου μήκους κατάλληλα επιλεγμένων $(\gamma+1/3), (\gamma+1/4, \gamma+2/4) \dots (\gamma+1/S_N, \gamma+2/S_N, \dots, \gamma+(S_N-2/S_N))$ διατηρείται η αναλυτική απλότητα.. Ο δεύτερος αυτός τρόπος είναι πιο εύκολα εφαρμόσιμος σε τμήματα οδικών αξόνων στα οποία τα μήκη των συνεχόμενων διαχωριστικών νησίδων είναι **σταθερά.**

Το κόστος που πληρώνεται ως αντάλλαγμα της θεώρησης σταθερού μήκους ανοιγματος L μεταξύ δύο διαδοχικών νησίδων σχετίζεται με την αδυναμία περαιτέρω διερεύνησης της επίπτωσης σταδιακά μειούμενων μηκών διαχωριστικής νησίδας –δηλαδή πιο συχνών σημείων όπου είναι δυνατή η αναστροφή- κατά τη κατεύθυνση από χαμηλότερου φόρτου – άρα και χαμηλότερης ζήτησης- προς υψηλότερου φόρτου οδικά τμήματα και αντίστροφα.(π.χ. επέκταση περιοχής εξυπηρέτησης από οδικά τμήματα εθνικών οδών σε οδικά τμήματα επαρχιακού δικτύου.) Κάτι τέτοιο είναι εφικτό έμμεσα, στη γενική περίπτωση S_N συνεχόμενων τμημάτων διαχωριστικής νησίδας, συγκρίνοντας τις τιμές της συνάρτησης $E_{Dk'} - E_{Dk}$ για τις διάφορες ακολουθίες προσδιορισμού των σχετικών αποστάσεων των εσωτερικών ανοιγμάτων $1, 2, \dots, S_N-2$.

Ο αριθμός και τα χαρακτηριστικά των περιπτώσεων που θα αναλυθούν σε κάθε περίπτωση εφαρμογής σχετίζεται άμεσα με τον αριθμό των διαθέσιμων μονάδων ανταπόκρισης της υπηρεσίας παροχής εξυπηρέτησης και τον αριθμό των συνεχόμενων τμημάτων διαχωριστικής νησίδας που συναντώνται κατά μήκος της περιοχής ευθύνης. Έτσι αν πρέπει να τοποθετηθούν 5 μονάδες ανταπόκρισης σε τμήμα οδικού άξονα 10 τμημάτων διαχωριστικής νησίδας, σταθερού φόρτου, χωρίζεται η συνολική περιοχή εξυπηρέτησης σε 5 τμήματα και

αντιστοιχίζεται κάθε μονάδα σε μία υποπεριοχή 2 τμημάτων. Το αν κάθε μονάδα τοποθετηθεί στο μέσο του μεσαίου ανοίγματος ή θα περιτολεί εναλλάξ στις δύο κατευθύνσεις σχετίζεται με τη σχετική θέση του ανοίγματος της υποπεριοχής ευθύνης της και του μέσου της. Αν διατίθενται 5 μονάδες και η περιοχή εξυπηρέτησης περιλαμβάνει τμήμα οδικού άξονα σταθερού φόρτου 15 τμημάτων νησίδας, χωρίζεται η συνολική περιοχή σε 5 υποπεριοχές 3 τμημάτων η κάθε μία. Για να προχωρήσει η χωροθέτηση κάθε μονάδας θα πρέπει πρώτα να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης $E_{ix} - E_{ix}$ για $S_N=3$. Βασισμένοι στο συμπέρασμα του 3^{ου} προβλήματος θα πρέπει να διατεθούν 7 ή 8 μονάδες. Έχοντας υπολογίσει τις τιμές της $E_{ix} - E_{ix}$ για $S_N=2,3,4,5,\dots,S_N$ είναι δυνατό να επιλεγεί η στρατηγική που ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ της θέσης του περιστατικού άμεσης βοήθειας και της θέσης της μονήρους μονάδας εξυπηρέτησης για κάθε τμήμα οδικού άξονα που περιλαμβάνει 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή ...ή S_N συνεχόμενα τμήματα διαχωριστικής νησίδας σταθερού φόρτου. Η προϋπόθεση αυτή της ομοιόμορφης κατανομής της ζήτησης για εξυπηρέτηση, πρακτικά περιορίζει τον αριθμό των συναρτήσεων $E_{ix} - E_{ix}$ σε ένα πεπερασμένο σύνολο, ακόμα και στην δυσχερέστερη από πλευράς υπολογιστικού φόρτου περίπτωση μελέτης παροχής εξυπηρέτησης μέσω μίας μονάδας ανταπόκρισης.

Τα συμπεράσματα που αντλήθηκαν από την ανάλυση του κεφαλαίου αυτού ασφαλώς δεν επαρκούν για τη χωροθέτηση ενός συνόλου μονάδων άμεσης επέμβασης κατά μήκος διαδοχικών οδικών τμημάτων και αυτό γιατί στο κεφάλαιο αυτό λήφθηκε υπόψη μόνο η χωροταξική φύση του προβλήματος και αγνοήθηκαν παντελώς τα άλλα δύο κύρια συστατικά ενός συστήματος αναμονής με χωροταξικά κατανεμημένες μονάδες εξυπηρέτησης: ο κορεσμός και η αβεβαιότητα. Εντούτοις, θα αποδειχθούν ιδιαίτερα κρίσιμα όταν αργότερα εισαχθεί η έννοια της αποκλειστικής περιοχής ευθύνης για κάθε μία από τις N το πλήθος μονάδες εξυπηρέτησης. Στην περίπτωση αυτή, η χωροθέτηση κάθε μονάδας εντός της αποκλειστικής περιοχής ευθύνης της θα γίνεται με βάση τα συμπεράσματα του 2^{ου} κεφαλαίου.

3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ Μ/Γ/1

Ο απλούστερος τύπος server to customer συστήματος αναμονής είναι αυτό με ένα κέντρο εξυπηρέτησης. Στη περίπτωση αυτή, οι αιτήσεις προς εξυπηρέτηση είναι γεωγραφικά διανεμημένες στην περιοχή ευθύνης του κέντρου αυτού. Η μονάδα παροχής υπηρεσιών είναι δυνατό να βρίσκεται σε μία σταθερή τοποθεσία όταν είναι διαθέσιμη, ή να είναι κινούμενη (όπως ένα αστυνομικό όχημα που περιπολεί). Η μονάδα αποστέλλεται προς εξυπηρέτηση των κλήσεων καθώς αυτές κατανοθούν σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, και οι κλήσεις που σχηματίζουν ουρά αναμονής χειρίζονται σύμφωνα με κάποιο κανόνα προτεραιότητας (όπως FCFS- ερχόμενος πρώτος εξυπηρετούμενος πρώτος). Ο συνολικός χρόνος εξυπηρέτησης αποτελείται από το χρόνο μετακίνησης προς το σημείο που γεννάται η κλήση συν τη χρονική διάρκεια της επίσκεψης στο σημείο γέννησής της συν το χρονικό διάστημα μιας πιθανής δευτέρου επιπέδου εξυπηρέτησης μακριά από το σημείο γέννησης.

Αυτός ο τύπος συστήματος συχνά μπορεί να μελετηθεί εφαρμόζοντας το πρότυπο Μ/Γ/1. Εντούτοις, κάποιες φορές το πρότυπο Μ/Γ/1 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί επακριβώς, εξαιτίας της υπόθεσης των ανεξάρτητων, πανομοιότυπα κατανεμημένων χρόνων εξυπηρέτησης που χρησιμοποιεί. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση εξυπηρέτησης που παρέχεται στο σημείο γέννησης της κλήσης και μόνο στο σημείο αυτό, ο χρόνος εξυπηρέτησης του πρώτου πελάτη, σε περίοδο αιχμής, ακολουθεί πιθανώς διαφορετική κατανομή απ' ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης των εναπομεινάντων πελατών που έπονται της πρώτης αυτής κλήσης.

Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί στο συναφές παράδειγμα ενός οχήματος άμεσης βοήθειας. Έστω ότι μία μονάδα εξυπηρέτησης ενώ είναι διαθέσιμη, αποστέλλεται από τη βάση της στο σημείο γέννησης ενός περιστατικού που χρίζει άμεσης ανταπόκρισης. Η τυχαία μεταβλητή του συνολικού χρόνου εξυπηρέτησης, αντιστοιχεί στο άθροισμα του χρόνου μετακίνησης από το σημείο βάσης της μονάδας προς το σημείο γέννησης του περιστατικού, συν τον απαιτούμενο χρόνο που διαρκεί η επίσκεψη στο σημείο γέννησης της κλήσης. Κατά τη διάρκεια του πρώτου συνολικού αυτού χρόνου εξυπηρέτησης, ένα δεύτερο περιστατικό μπορεί να προκύψει, απαιτώντας την συνεχόμενη εκχώρηση ή μάλλον δέσμευση του οχήματος άμεσης βοήθειας. Η πιθανότητα να συμβεί ένα νέο περιστατικό καθώς το όχημα επιστρέφει στη βάση του θεωρείται αμελητέα. Στην περίπτωση αυτή το όχημα θα μετακινηθεί από το πρώτο σημείο γέννησης περιστατικού άμεσης βοήθειας στο δεύτερο σημείο. Και τα δύο αυτά σημεία είναι ασφαλώς τυχαία. Στη δεύτερη αυτή περίπτωση ο συνολικός χρόνος εξυπηρέτησης περιλαμβάνει το χρόνο μετακίνησης από το πρώτο τυχαίο σημείο προς το δεύτερο, συν το

χρόνο που διαρκεί η επίσκεψη στο δεύτερο σημείο. Εφόσον η τυχαία μεταβλητή του χρόνου μετακίνησης στις δύο αυτές περιπτώσεις είναι διαφορετική, διαφορετικοί θα είναι και οι αντίστοιχοι συνολικοί χρόνοι εξυπηρέτησης. Υποθέτοντας νόμο προτεραιότητας FCFS- ερχόμενος πρώτος εξυπηρετούμενος πρώτος, κάθε άλλο περιστατικό που ίσως συμβεί κατά τη διάρκεια αυτής της αιχμής, θα έχει χρόνο εξυπηρέτησης πανομοιότυπα κατανεμημένο με το χρόνο εξυπηρέτησης που θα γευτεί ο δεύτερος πελάτης.

Μία μικρή εξάρτηση των διαδοχικών χρόνων εξυπηρέτησης πηγάζει από το γεγονός ότι ο ένας χρόνος εξυπηρέτησης ξεκινάει στο γεωγραφικό σημείο στο οποίο ο προηγούμενος χρόνος εξυπηρέτησης ολοκληρώνεται. Εντούτοις, όπως θα υποδείξουν και τα παραδείγματα, η εξάρτηση αυτή είναι αρκετά μικρή ώστε να αγνοείται στις περισσότερες εφαρμογές.

Στη κατάσταση που μόλις περιγράφηκε, το πρότυπο M/G/1 σχεδόν εναρμονίζεται, έχοντας ως εξαίρεση τον πρώτο χρόνο εξυπηρέτησης κατά τη διάρκεια μίας περιόδου αιχμής, ο οποίος διαφοροποιείται από τους επερχόμενους χρόνους εξυπηρέτησης. Ο ΟΔΟΝΙ ανάλυσε διεξοδικά ένα αντίστοιχο τροποποιημένο πρότυπο M/G/1, και χρησιμοποιώντας μεθόδους μετασχηματισμού, εισήγαγε σχέσεις υπολογισμού του μέσου αριθμού πελατών και του μέσου χρόνου στην ουρά αναμονής. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται ως εξής:

Έστω :

S_1, σ_1^2 = μέση τιμή και διασπορά, αντίστοιχα, του πρώτου χρόνου εξυπηρέτησης σε μία περίοδο αιχμής

S_2, σ_2^2 = μέση τιμή και διασπορά, αντίστοιχα, του δεύτερου και των επόμενων χρόνων εξυπηρέτησης σε μία περίοδο αιχμής

λ = μέσος ρυθμός άφιξης αιτήσεων για εξυπηρέτηση στη μονάδα του χρόνου

μ = μέσος ρυθμός εξυπηρέτησεων ολόκληρου του συστήματος

L_s = αναμενόμενος ή μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα αναμονής

L_q = αναμενόμενος ή μέσος αριθμός πελατών στη σειρά αναμονής

W_s = αναμενόμενος ή μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα αναμονής (περιλαμβάνει τον χρόνο εξυπηρέτησης)

W_q = αναμενόμενος ή μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στη σειρά αναμονής

Τότε, για να υπάρχει μόνιμη κατάσταση ισορροπίας στη λειτουργία του πρότυπου πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\lambda * S_2 < 1$$

Με την προϋπόθεση αυτή:

$\rho = 1 - P_0 = \lambda / \mu$, πυκνότητα κυκλοφορίας ή ποσοστό χρόνου κατά τον οποίο μία μονάδα εξυπηρέτησης είναι κατελυσμένη

$$\rho = \lambda * S_1 / (1 - \lambda * (S_2 - S_1)) \quad (3.1)$$

$$L_s = \rho + \frac{\lambda^2 [\sigma_1^2 + S_1^2 + \lambda(S_1(\sigma_2^2 + S_2^2) - S_2(\sigma_1^2 + S_1^2))]}{[1 - \lambda * (S_2 - S_1)] * 2(1 - \lambda * S_2)} \quad (3.2)$$

$$W_s = L_s / \lambda \quad (3.3)$$

$W_q = W_s - \text{αναμενόμενος χρόνος εξυπηρέτησης ενός τυχαίου πελάτη}$

$$= W - (P_0 * S_1 + (1 - P_0) * S_2) = W - S_1 / (1 - \lambda * (S_2 - S_1)) \quad (3.4)$$

$$L_q = \lambda * W_q \quad (3.5)$$

Κάνοντας μία σύγκριση με το αρχικό M/G/1 πρότυπο, παρατηρείται ότι στο τροποποιημένο πρότυπο ο μέσος χρόνος και το μέσο μήκος στην ουρά αναμονής εξαρτώνται από τις δύο κατανομές των χρόνων εξυπηρέτησης, και μάλιστα μόνο από τη μέση τιμή και τη διασπορά αυτών. Αν η μέση τιμή και η διασπορά των δύο αυτών κατανομών είναι ίσες, τότε το πρότυπο μεταπίπτει στο κλασικό M/G/1 πρότυπο.

4. ΠΡΟΤΥΠΟ ΜΕ ΔΥΟ ΚΕΝΤΡΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ (ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΟΥΡΑΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ)

Όπως και στην περίπτωση του μονήρους κέντρου εξυπηρέτησης, είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι αναλυτικές εκφράσεις που ισχύουν για χωροταξικά κατανομημένη ουρά αναμονής στην περίπτωση κατά την οποία η εξυπηρέτηση παρέχεται από δύο κέντρα εξυπηρέτησης. Πέραν τούτου, το πρότυπο δύο κέντρων εξυπηρέτησης, είναι το απλούστερο πρότυπο που ενσωματώνει συνεργασία αλληλεπιδράσεως λόγω διαίρεσης του φόρτου ανάμεσα στα δύο κέντρα. Αυτός ο τύπος συνεργασίας γενικεύεται σε N κέντρα εξυπηρέτησης δια μέσου του υπερκυβικού πρότυπου.

Το πρότυπο των δύο κέντρων που θα εξεταστεί πρωταρχικά αναλύθηκε το 1972 από τους Carter, Chaiken, Ignall, Larson και Stevenson.

4.1. Περιορισμοί στο χρόνο εξυπηρέτησης και στην συμπεριφορά της ουράς αναμονής

Όπως θα φανεί παρακάτω, καθώς η ανάλυση προχωρά από ένα σε δύο και τελικά σε N κέντρα εξυπηρέτησης, οι περιορισμοί που πρέπει να τεθούν στην κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης γίνονται ολοένα και πιο αυστηροί. Σε αυτό το πρότυπο όπου $N=2$, γίνεται η υπόθεση ότι τα δύο κέντρα έχουν ίδια κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης με αναμενόμενο ή μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $1/\mu$. Επιτυχείς χρόνοι εξυπηρέτησης, πρέπει να αντιπροσωπεύουν ανεξάρτητα δείγματα αυτής της κατανομής, ανεξάρτητα από την ιστορία του συστήματος, την τρέχουσά του κατάσταση, την ταυτότητα του ανταποκρινόμενου κέντρου, και την τοποθεσία γέννησης της αίτησης. Έτσι, αντίθετα από το πρότυπο M/G/1, (ή την τροποποίησή του στο προηγούμενο εδάφιο), το πρότυπο $N=2$ δεν μπορεί ρητά να περιλάβει αποκλίσεις του χρόνου εξυπηρέτησης, εξαιτίας μόνο των αποκλίσεων στη θέση των πελατών, ή στην ταυτότητα του κέντρου εξυπηρέτησης. Αυτό δεν σημαίνει ότι ο χρόνος μετακίνησης προς το σημείο γέννησης πρέπει να αγνοείται στον υπολογισμό του χρόνου εξυπηρέτησης. Αντιθέτως, ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης μπορεί να τεθεί ίσος με το άθροισμα του εκτιμώμενου μέσου χρόνου μετακίνησης (που έχει εκτιμηθεί προ της ανάλυσης) με το χρόνο εξυπηρέτησης στο σημείο γέννησης και κάθε άλλο χρόνο δευτέρου επιπέδου εξυπηρέτησης. Μετά την ανάλυση, ο μέσος χρόνος μετακίνησης αποτελεί ένα μέτρο απόδοσης, υπολογιζόμενο από το πρότυπο. Αν υπάρχει ασυμφωνία μεταξύ του εκτιμώμενου με τον υπολογιζόμενο μέσο χρόνο εξυπηρέτησης, ο υπολογιζόμενος μέσος χρόνος εξυπηρέτησης θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να διορθώσει την

παράμετρο του πρότυπου που αντιστοιχεί στο μέσο χρόνο εξυπηρέτησης και η ανάλυση θα παρουσιαστεί ξανά με τη διορθωμένη τιμή. Η διαδικασία αυτή, η ονομαζόμενη βαθμονόμηση του μέσου χρόνου εξυπηρέτησης, συνήθως συγκλίνει πολύ γρήγορα, μετά από μία ή δύο επαναλήψεις. Μετά τη βαθμονόμηση, ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης που εισάγεται στο πρότυπο, συμφωνεί με αυτόν που υπολογίζεται από αυτό. Κατά τη διάρκεια του επόμενου πρότυπου εξέλιξης, θεωρείται ότι η βαθμονόμηση αυτή έχει ήδη ολοκληρωθεί.

Ένα τίμημα που πληρώνεται ως αντάλλαγμα της γενικής κατανομής των χρόνων εξυπηρέτησης (αντί μιας εκθετικής ως πούμε κατανομής), είναι ότι δεν επιτρέπεται ο σχηματισμός ουράς αναμονής. Με αυτόν τον τρόπο, όταν εμφανίζονται πελάτες καθώς τα δύο κέντρα είναι κατειλημμένα, δεν εξυπηρετούνται από το σύστημα $N=2$. Υποτίθεται ότι στην πραγματικότητα, χειρίζονται από κάποιο σύστημα υποστήριξης (όπως για παράδειγμα ένα αστυνομικό τμήμα που υποστηρίζει τις κλήσεις ενός κέντρου άμεσης βοήθειας). Εάν επιθυμούσαμε τον σχηματισμό μίας ουράς ιεραρχημένου μήκους, θα έπρεπε να είχαμε περιορίσει περαιτέρω τη υπόθεση του χρόνου εξυπηρέτησης, απαιτώντας η κατανομή του να είναι αρνητική εκθετική. Αυτό είναι ένα ακόμα παράδειγμα του πώς μια ξεχωριστή απλή τροποποίηση της συμπεριφοράς λειτουργίας της ουράς αναμονής, μπορεί να αλλάξει αξιοσημείωτα την ευκολία ή τη δυσκολία ανάλυσης της ουράς αναμονής.

4.2 Γενικό πρότυπο

Θεωρούμε μία περιοχή B η οποία εξυπηρετείται από δύο μονάδες ανταπόκρισης, τη μονάδα 1 και τη μονάδα 2. Κάθε μονάδα, όταν είναι διαθέσιμη σε μία κλήση, είναι τοποθετημένη σε μία σταθερή θέση, ή ένα κτίριο υπηρεσιών. Το σύστημα επιχειρεί ως εξής:

1. Αν X ένα υποσύνολο του B , έστω ότι οι αιτήσεις προς εξυπηρέτηση καταφθάνουν στο X σύμφωνα με μία εξέλιξη Poisson ως προς το χρόνο με παράμετρο $\lambda(X)$, και οι αφίξεις σε κάθε ζεύγος υποσυνόλων είναι ανεξάρτητες.
2. Η περιοχή B απαρτίζεται από δύο πρωτογενείς περιοχές ανταπόκρισης, την 1 που συμπεριλαμβάνει το σύνολο A και τη 2 που περιλαμβάνει το σύνολο $B - A$. Αιτήσεις για εξυπηρέτηση καταφθάνουν από την περιοχή 1 με ρυθμό $\lambda(A)=\lambda_1$ και από την περιοχή 2 με ρυθμό $\lambda(B-A)=\lambda_2$. Θέτω $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$.
3. Αν μία κλήση καταφθάνει από την περιοχή n , όταν και οι δύο μονάδες είναι διαθέσιμες, η εξυπηρέτηση παρέχεται από τη μονάδα n , $n=1,2$.

4. Αν μία κλήση καταφθάνει από την περιοχή n , όταν μία μονάδα είναι διαθέσιμη, η εξυπηρέτηση παρέχεται από τη μονάδα αυτή n , $n=1,2$.
5. Αν μία κλήση καταφθάνει από την περιοχή n , όταν καμία μονάδα δεν είναι διαθέσιμη, η αίτηση χάνεται. Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω μια τέτοια υπόθεση συνήθως συνεπάγεται ότι η αίτηση χειρίζεται από κάποιο σύστημα υποστήριξης.
6. Το σύστημα λειτουργεί στη μόνιμη κατάστασή ισορροπίας του.
7. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης για όλες τις κλήσεις είναι πανομοιότυπα κατανομημένους με πεπερασμένο μέσο όρο $1/\mu$, ανεξάρτητα από την ιστορία ή την κατάσταση του συνολικού συστήματος την στιγμή της άφιξης της κλήσης, την τοποθεσία του σημείου γέννησής της, και την ταυτότητα της μονάδας εξυπηρέτησης.

Κάθε μονάδα εξυπηρέτησης έχει δύο πιθανές καταστάσεις λειτουργίας: την κατάσταση 0 όταν είναι διαθέσιμη, και την κατάσταση 1 όταν είναι κατειλημμένη. Υπάρχουν δηλαδή $2^2 = 4$ πιθανές καταστάσεις του συστήματος.

00: και οι δύο μονάδες είναι διαθέσιμες

01: η μονάδα 1 είναι κατειλημμένη, και η μονάδα 2 διαθέσιμη

10: η μονάδα 1 είναι διαθέσιμη, και η μονάδα 2 κατειλημμένη

11: και οι δύο μονάδες είναι κατειλημμένες

(Σημειώστε ότι η κατάσταση της μονάδας n , δίνεται από το n -στο ψηφίο από τα δεξιά, στη μορφή της δυαδικής κατάστασης). Όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο, η ταξινόμηση της δυαδικής κατάστασης, επεκτείνεται με φυσικό τρόπο και στην περίπτωση των N μονάδων, όπου το σύστημα έχει 2^N πιθανές καταστάσεις.

Παρότι οι πιθανότητες στην μόνιμη κατάσταση δεν εξαρτώνται ακριβώς από την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης θα υποτεθεί αρνητική εκθετική κατανομή με σκοπό να σχηματιστούν οι εξισώσεις μόνιμου καταστάσεως.

Αρχή ισότητας ρυθμών εισόδου και εξόδου: Για κάθε κατάσταση n του συστήματος ($n = 0,1,2, \dots$) ο μέσος ρυθμός (αναμενόμενος αριθμός εμφανίσεων ανά μονάδα χρόνου) με τον οποίο εμφανίζονται τα γεγονότα εισόδου πρέπει να είναι ίσος με τον μέσο ρυθμό, με τον οποίο εμφανίζονται τα γεγονότα εξόδου.

Η εξίσωση που εκφράζει την αρχή αυτή λέγεται εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση n και είναι:

$$\lambda_{n+1} \cdot P_{n+1} + \mu_{n+1} \cdot P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) \cdot P_n$$

Εφαρμόζοντας την αρχή της ισορροπίας στις τέσσερις πιθανές καταστάσεις του συστήματος :

1. Διατήρηση της ροής στην κατάσταση 00:

$$P_{00} \cdot \lambda = (P_{01} + P_{10}) \cdot \mu \quad (4.6)$$
2. Διατήρηση της ροής στην κατάσταση 01:

$$P_{01} \cdot (\lambda + \mu) = P_{00} \cdot \lambda_1 - P_{11} \cdot \mu \quad (4.7)$$
3. Διατήρηση της ροής στην κατάσταση 11:

$$P_{11} \cdot 2\mu = P_{01} \cdot \lambda + P_{10} \cdot \lambda \quad (4.8)$$
4. Άθροισμα πιθανοτήτων:

$$P_{00} + P_{01} + P_{10} + P_{11} = 1 \quad (4.9)$$

Αντικαθιστώντας την 8 στην 6:

$$P_{11} = \lambda^2 \cdot P_{00} / 2\mu^2 \quad (4.10)$$

Αντικαθιστώντας την 10 στην 7:

$$P_{01} = P_{00} \lambda_1 + P_{11} / \lambda + \mu = [\lambda_1 + (\lambda^2 / 2\mu)] P_{00} / \lambda + \mu$$

Λόγω συμμετρίας πρέπει να είναι:

$$P_{10} = [\lambda_2 + (\lambda^2 / 2\mu)] P_{00} / \lambda + \mu$$

Τελικά αντικατάσταση στη 9 οδηγεί:

$$P_{00} = 1 / (1 + \lambda/\mu + \lambda^2/\mu^2)$$

Παρατηρούμε ότι η P_{00} πιθανότητα είναι η ίδια με την $P\{S_0\}$ σε ένα σύστημα $M/M/2$ χωρίς χώρο αναμονής. Αυτό άλλωστε αναμενόταν: το σύστημα των δύο κέντρων εξυπηρέτησης που αναλύεται είναι απλά ένα σύστημα $M/M/2$ με διακριτά κέντρα εξυπηρέτησης χωρίς χώρο αναμονής. Ορίζοντας $\eta = \lambda/2\mu$, $\eta_1 = \lambda_1/\mu$, $\eta_2 = \lambda_2/\mu$ προκύπτει μια διαφορετική μορφή των εξισώσεων μονίμου καταστάσεως του συστήματος:

$$P_{00} = 1 / (1 + 2\eta + 2\eta^2) \quad (4.11a)$$

$$P_{01} = (\eta_1 + 2\eta^2) P_{00} / (1 + 2\eta) \quad (4.11b)$$

$$P_{10} = (\eta_2 + 2\eta^2) P_{00} / (1 + 2\eta) \quad (4.11c)$$

$$P_{11} = 2\eta^2 P_{00} \quad (4.11d)$$

Ορίζεται βαθμός χρησιμοποίησης της μονάδας n , ως η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης η μονάδα αυτή n να παρέχει εξυπηρέτηση σε μία κλήση, και συμβολίζεται ρ_n . Δηλαδή:

$$\rho_1 = P_{01} + P_{11} = \frac{n_1 + 4n^2 + 4n^3}{1 + 2n} P_{00} \quad (4.12a)$$

$$\rho_2 = P_{10} + P_{11} = \frac{n_2 + 4n^2 + 4n^3}{1 + 2n} P_{00} \quad (4.12b)$$

Η διαφορά των βαθμών χρησιμοποίησης $\Delta\rho$ των δύο μονάδων, αποτελεί ένα δείκτη που μας δείχνει πόσο πιο πολύ λειτουργεί η μία μονάδα απ' ότι η άλλη. Και είναι:

$$\Delta\rho = [\rho_1 - \rho_2] = \frac{P_{00} \cdot |n_1 - n_2|}{1 + 2n} \quad (4.13)$$

Άλλη μία ποσότητα άμεσου ενδιαφέροντος είναι και η:

f_{nj} = το ποσοστό των κλήσεων που προκαλούν τη μετακίνηση της μονάδας n στην περιοχή ευθύνης j .

Αυτή η συχνότητα ανταποκρίσεων μας επιτρέπει να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος μετακίνησης των μονάδων.

Ορίζεται:

$T_n (C)$ = μέσος χρόνος μετακίνησης της μονάδας n προς εξυπηρέτηση μίας κλήσης με περιοχή γέννησης τη C

$T'_n (C)$ = μέσος όρος των όλων των χρόνων μετακίνησης, υποθέτοντας ότι η περιοχή ευθύνης της πρώτης μονάδας είναι η C .

Για παράδειγμα, $T_n (B)$ είναι ο μέσος χρόνος μετακίνησης αν κάθε αίτηση για εξυπηρέτηση στην τοποθεσία B καλύπτεται από το κέντρο n . Εφόσον η περιοχή A είναι η περιοχή ευθύνης της μονάδας 1 , ο μέσος όρος των χρόνων μετακίνησης και των δύο μονάδων προς κάλυψη την γεννήσεων, μπορεί να γραφεί:

$$T'_n (A) = f_{11} T_1(A) + f_{22} T_2(B-A) + f_{12} T_1(B-A) + f_{21} T_2(A) \quad (4.14)$$

Πώς προκύπτουν οι συντελεστές f_{ij} ; Έστω ένα μεγάλο χρονικό διάστημα T . Στη μόνιμη κατάσταση του συστήματος ο μέσος συνολικός αριθμός των αιτήσεων που εξυπηρετούνται είναι $(1 - P_{E1}) * \lambda * T$. Ο μέσος αριθμός των αιτήσεων που οδηγούν τη μονάδα 1 στην περιοχή 2 , για παράδειγμα, ισούται με $\lambda_2 * T$, πολλαπλασιασμένο με το ποσοστό

του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση P_{10} . Δηλαδή το ποσοστό όλων των εξυπηρετούμενων κλήσεων στο χρόνο T που έχουν ως αποτέλεσμα την όδευση της μονάδας 1 στην περιοχή 2 είναι:

$$f_{12} = \frac{\lambda_2 T P_{10}}{(1-P_{11}) \lambda T} = \frac{\lambda_2 P_{10}}{(1-P_{11}) \lambda} \quad (4.16a)$$

$$f_{11} = \frac{\lambda_1 (P_{00} + P_{10})}{(1-P_{11}) \lambda} \quad (4.16b)$$

$$f_{22} = \frac{\lambda_2 (P_{00} + P_{01})}{(1-P_{11}) \lambda} \quad (4.16c)$$

$$f_{21} = \frac{\lambda_2 P_{01}}{(1-P_{11}) \lambda} \quad (4.16d)$$

Αντικαθιστώντας τις 15, 16, στη 14 προκύπτει ότι ο μέσος συνολικός χρόνος μετακίνησης είναι:

$$T''(A) = \frac{[P_{10} T_1(B) + P_{01} T_2(B)]}{1 - P_{11}} + \frac{P_{00} [\lambda_1 T_1(A) + \lambda_2 T_2(B-A)]}{\lambda (1 - P_{11})} \quad (4.17)$$

Αυτός ο αλγόριθμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του μέσου χρόνου μετακίνησης για κάθε προτεινόμενη πρωταρχική περιοχή ευθύνης $A, B - A$.

4.4 Βέλτιστη Διαίρεση Περιοχής Εξυπηρέτησης

Οι Carter, Chaiken και Ignall, έχοντας ως αφετηρία τις ιδέες του προηγούμενου παραδείγματος, προχώρησαν στη διερεύνηση της βέλτιστης διαίρεσης μίας περιοχής όταν εξυπηρετείται από δύο μονάδες με τις κάτωθι παραδοχές: τα σημεία γέννησης των κλήσεων περιγράφονται από μία γενική χωροταξική κατανομή και οι χρόνοι μετακίνησης των μονάδων από μία αυθαίρετη συνάρτηση. Η βέλτιστη διαίρεση, υπονοεί ελαχιστοποιημένο μέσο χρόνο μετακίνησης για ολόκληρο το σύστημα. Κάθε βέλτιστη συνοριακή γραμμή, αποτελείται από το σύνολο των σημείων εντός της περιοχής για τα οποία, οι χρόνοι μετακίνησης με αφετηρία τη μονάδα 1 και τη μονάδα 2 διαφέρουν κατά μία σταθερά. Η σταθερά αυτή, s_0 , αναπαριστά πάνω στο χάρτη της περιοχής το σύνολο των σημείων για τα οποία η μονάδα 1 βρίσκεται πιο κοντά χρονικά s_0 δευτερόλεπτα από ότι η μονάδα 2. Για παράδειγμα, εάν η σταθερά είναι 30 δευτερόλεπτα, η βέλτιστη συνοριακή γραμμή είναι το σύνολο των σημείων στα οποία η μονάδα 1 έχει άμεση πρόσβαση 30 δευτερόλεπτα πιο νωρίς από την μονάδα 2. Έστω ότι ο χρόνος μετακίνησης είναι γραμμική συνάρτηση της διανυθείσας απόστασης. Τότε η βέλτιστη συνοριακή γραμμή έχει μετακινηθεί από την συνοριακή γραμμή των ίσων χρόνων μετακίνησης κατά την ποσότητα $s_0/2$. Ο διαφέτης 2 προκύπτει επειδή η ενός δευτερολέπτου κίνηση της γραμμής προς την μονάδα 1 προκαλεί την περαιτέρω απομάκρυνση της γραμμής από την μονάδα 2 κατά ένα δεύτερο. Με τον τρόπο αυτό η ενός δευτέρου κίνηση της γραμμής προκαλεί διαφορά δύο δευτέρων στους χρόνους άφιξης.

Οι Carter, Chaiken και Ignall απέδειξαν ότι η βέλτιστη συνοριακή γραμμή βρίσκεται από τον κάτωθι τύπο:

$$s_0 = 2n^*(T_2(B) - T_1(B)) / (2n+1) \quad (4.18)$$

Πρέπει να υπογραμμιστεί ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι τελείως γενικό: έχει εφαρμογή σε μη ομογενείς περιοχές αυθαίρετου σχήματος στις οποίες ο απαιτούμενος χρόνος μετακίνησης μπορεί να υπολογιστεί από την ευκλείδεια μέθοδο. Στην πράξη όμως συναντώνται πιο περίπλοκες μορφές λόγω ασυνεχειών στη ροή της κυκλοφορίας που με τη σειρά τους οφείλονται σε δρόμους μονής κατεύθυνσης ή απαγορεύσεις στροφών.

5.ΚΥΒΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Με αφετηρία τα συμπεράσματα του προηγούμενου κεφαλαίου είναι δυνατό να προσδιοριστεί ένα πιο αποτελεσματικό εργαλείο διερευνώντας τη συμπεριφορά Ν μονάδων εξυπηρέτησης. Ένα τέτοιο εργαλείο θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο αν περιλάμβανε τις πραγματικές πολυπλοκότητες της γεωγραφίας μίας περιοχής εξυπηρέτησης είτε αυτή είναι δισδιάστατη είτε μονοδιάστατη καθώς και τις εκάστοτε πολιτικές αποστολής παρά υποθέσεις περί ομοιομορφίας ή όχι, υποθέσεις που απαιτούνται για την αναλυτική εξακρίβωση του πρότυπου. Αυτοί είναι και οι στόχοι του κυβικού πρότυπου αναμονής. Υλοποιημένη από έναν υπολογιστή η «επίλυση» του πρότυπου αποτελείται από ένα σύνολο αριθμητικών τιμών των πιθανοτήτων των δυνατών καταστάσεων του συστήματος και από τα αντίστοιχα προς αυτά κριτήρια απόδοσής του. (χρόνοι μετακίνησης, φόρτοι μονάδων, συχνότητες αποστολής μεταξύ υποπεριοχών).

Η γεωγραφία της συνολικής περιοχής εξυπηρέτησης αναπαριστάται με την διαίρεσή της από ένα σύνολο γεωγραφικών οντοτήτων ή περιοχών αναφοράς, κάθε ένα από τα οποία αντιπροσωπεύει ένα ανεξάρτητο σημείο γέννησης αιτήσεων προς εξυπηρέτηση. Η πρωταρχική περιοχή ευθύνης μίας μονάδας εξυπηρέτησης αποτελείται από τις γεωγραφικές οντότητες εκείνες στις οποίες αυτή θα αποσταλεί εφόσον είναι διαθέσιμη, ακόμα κι αν όλες οι υπόλοιπες μονάδες είναι διαθέσιμες. Με αυτήν την προσέγγιση οι περιοχές εξυπηρέτησης μπορεί να έχουν οποιοδήποτε γεωμετρικό σχήμα: δεν είναι υποχρεωτικό να συμπεριλαμβάνουν γεωγραφικές οντότητες που συνορεύουν. Μία μονάδα σταθερής θέσης, όταν είναι διαθέσιμη, θα βρίσκεται προ τοποθετημένη σε μία συγκεκριμένο γεωγραφική οντότητα του δικτύου. Μία κινούμενη μονάδα π.χ. ένα όχημα περιπολίας μπορεί να αναλάβει ύστερα από πιθανοκρατική ανάλυση την εξυπηρέτηση ενός ή περισσοτέρων γεωγραφικών οντοτήτων που θα αποτελέσουν την περιοχή περιπολίας του. Οι περιοχές περιπολίας δεν χρειάζεται να συμπίπτουν με τις πρωταρχικές περιοχές ευθύνης.

Ο χρήστης του πρότυπου δεν είναι αναγκαίο να απασχολείται με την λύση των εξισώσεων της ισορροπίας του συστήματος γιατί αυτό γίνεται από συγκεκριμένο αλγόριθμο.

Το όνομα του πρότυπου πηγάζει από το χώρο του συστήματος που περιγράφει τη διαθεσιμότητα των μονάδων. Όπως και στο προηγούμενο πρότυπο των δύο μονάδων, έτσι και εδώ κάθε μονάδα μπορεί να βρίσκεται σε δύο πιθανές καταστάσεις: να είναι απασχολημένη ή διαθέσιμη. Μία λεπτομερής κατάσταση του συστήματος δίνεται από ολόκληρο τον κατάλογο των μονάδων που είναι απασχολημένες ή διαθέσιμες. Για παράδειγμα η κατάσταση 110 αντιστοιχεί στην

περίπτωση του συστήματος των τριών μονάδων εξυπηρέτησης στην οποία η μονάδα 1 είναι διαθέσιμη και οι μονάδες 2 και 3 είναι απασχολημένες. Ο χώρος του συστήματος για ένα σύστημα τριών μονάδων δίνεται από τις κορυφές ενός τρισδιάστατου κύβου. Καθώς ο αριθμός των μονάδων εξυπηρέτησης αυξάνεται πέρα των τριών η έννοια του κύβου μεταφέρεται σε ένα διανυσματικό χώρο N διαστάσεων. Αντίθετα από ότι συνέβαινε στην περίπτωση του πρότυπου των δύο μονάδων εξυπηρέτησης, το υπερκυβικό πρότυπο επιτρέπει το σχηματισμό ουράς αναμονής των μη εξυπηρετούμενων κλήσεων. Εφόσον ασκηθεί το δικαίωμα αυτό, η διάσταση του διανυσματικού χώρου του συστήματος πρέπει να αυξηθεί κατά μία μονάδα, η οποία αντιστοιχεί στην πρόσθεση μίας ουράς αναμονής απείρου μήκους στο σύστημα.

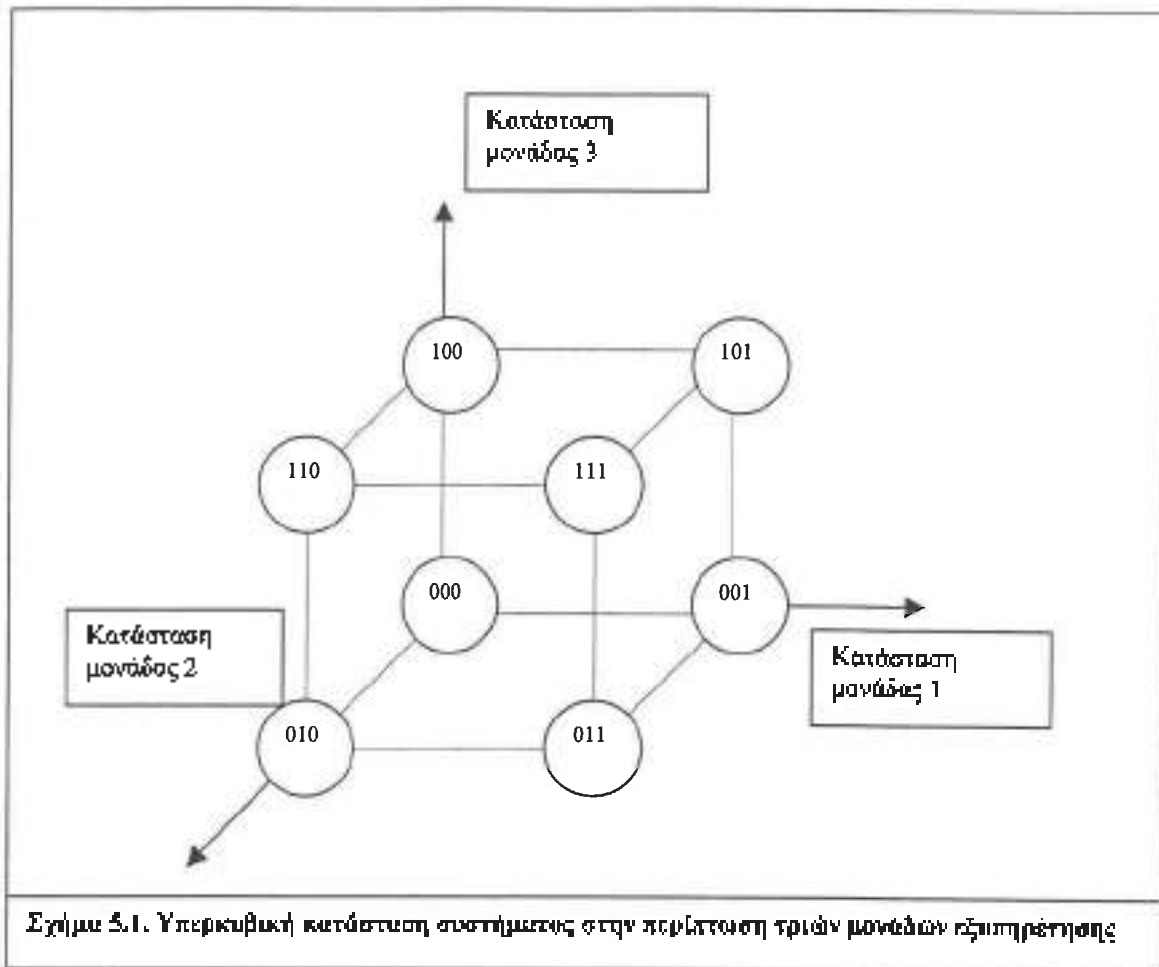
Τα μαθηματικά του υπερκυβικού πρότυπου του ενώ δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολα απαιτούν αυξημένη αντίληψη και καταλαμβάνουν σημαντικό χώρο. Η προσοχή επικεντρώνεται σε τέσσερα σημεία:

1. Να υποδειχθεί η χρήση του πρότυπου σε πρακτικά προβλήματα διοίκησης αποφάσεων παρέχοντας περιεκτικά σχεδιαγράμματα αληθοφανών (και ορισμένες φορές πραγματικών) εφαρμογών του πρότυπου.

2. Να υποδειχθεί για μία ειδική έκδοση του υπερκυβικού πρότυπου πώς κάποιος μπορεί να συνδέσει τη χωροταξική δομή της περιοχής εξυπηρέτησης με παραμέτρους του πρότυπου αναμονής, και πώς μπορεί να καταστρώσει ένα τέτοιο πρότυπο προς αριθμητική επίλυση με έναν υπολογιστή.

3. Να καταδειχθεί για το ίδιο πρότυπο γιατί κάποιος ίσως επιθυμεί μία υπολογιστικά ταχύτερη προσεγγιστική διαδικασία επίλυσης και να εξελιχθούν οι αρχές της προσεγγιστικής αυτής διαδικασίας.

4. Να αποκομιστεί μεγάλο όφελος σε γνώση όσο αφορά τη μοντελοποίηση ενός συστήματος N -μονάδων εξυπηρέτησης κατανεμημένων κατά μήκος μίας μονοδιάστατης περιοχής εξυπηρέτησης.



5.1 Μερικές Χρήσεις του Πρότυπου

Το υπερκυβικό πρότυπο αναπαριστά ένα σημαντικό σχεδιαστικό εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μία ποικιλία εφαρμογών από σχεδιαστές ή διαχειριστές υπηρεσιών παροχής εξυπηρέτησης που λειτουργούν στο μοτίβο server to customer. Στο σημείο αυτό θα περιγραφούν εν συντομία κάποιες εφαρμογές που είναι πολύ πιθανό να είναι σημαντικές σε πολλές αστικές περιοχές.

Σχεδιασμός τομέων ευθύνης αστυνομικών τμημάτων: Έστω ότι το αστυνομικό τμήμα μίας πόλης δεν έχει επανασχεδιάσει τους τομείς ευθύνης του εδώ και πολλά χρόνια. Τότε εξαιτίας της πληθυσμιακής αλλαγής, ποσοτικής αλλά και ποιοτικής, που έχει συντελεστεί κατά το διάστημα αυτό, είναι πιθανό να έχει αλλάξει και η κατανομή των συμβάντων που χρίζουν αστυνομικής παρέμβασης και εμπλοκής από τον τελευταίο σχεδιασμό. Αυτό μπορεί να έχει ως συνέπεια μία ανυπόφορη κατάσταση κατά την οποία ορισμένοι αξιωματικοί περιπολίας δουλεύουν σημαντικά περισσότερο από ότι άλλοι απαντώντας στις κλήσεις. Συνθέτοντας το πρόβλημα, υπάρχει το ενδεχόμενο στις περιοχές υψηλού φόρτου οι περιπολίες πρόληψης εγκλημάτων να έχουν μικρή επικράτηση, εφόσον ο υψηλός ρυθμός κλήσεων προς εξυπηρέτηση μειώνει απότομα τον διαθέσιμο χρόνο για τις περιπολίες αυτές. Επιπλέον οι περιοχές του υψηλού ρυθμού κλήσεων είναι και αυτές που χρειάζονται, πιθανώς, περισσότερες περιπολίες.

Στην περίπτωση αυτή το πρότυπο χρησιμοποιείται για να υποβοηθήσει τον υπεύθυνο αστυνομικό διοικητή στον επανασχεδιασμό των τομέων ευθύνης προς διόρθωση της υπάρχουσας ανισορροπίας που περιγράφηκε. Το πρότυπο παρέχει συγκρίσιμα αριθμητικά αποτελέσματα των χρόνων μετακίνησης, του φόρτου εργασίας κάθε αστυνομικού οχήματος, των συχνοτήτων των περιπολιών πρόληψης περιστατικών, καθώς και άλλων παραγόντων που επιτρέπουν την ταυτόχρονη θεώρηση της ελαχιστοποίησης του χρόνου ανταπόκρισης, της διάφρεσης του φόρτου μεταξύ των οχημάτων ή των αξιωματικών, τη «δύναμη» των περιπολιών πρόληψης και άλλων. Το πρότυπο αποκαλύπτει τα ανταλλάξιμα λειτουργικά μεγέθη τα οποία πρέπει να αντιμετωπίσει κανείς κατάλληλα, στην απόπειρά του να κατακτήσει αποδεκτή επίδοση σε κάθε μία από τις κατηγορίες αυτές.

Χρησιμοποιώντας το πρότυπο ο αστυνομικός διοικητής πρέπει να προσδιορίσει τη διαμόρφωση των τομέων που ο ίδιος επιθυμεί. Στη συνέχεια ο αλγόριθμος υπολογίζει τις αριθμητικές τιμές για κάθε ένα κριτήριο επίδοσης. Αδιαμφισβήτητα, κάθε σχεδιαστής θέτει ένα σύνολο θεμάτων προς μελέτη μερικά από τα οποία είναι περισσότερο σημαντικά κατά την εκάστοτε εφαρμογή, χωρίς να είναι όμως όλα αυτά τα θέματα

ποσοτικοποιημένα. Για παράδειγμα ο διάσημος σχεδιαστής O.W. Wilson επικέντρωνε την προσοχή του στην εξισορρόπηση του προκαλούμενου φόρτου. Στις περισσότερες των περιπτώσεων, εντούτοις, αδιαφορώντας για τα εισαχθέντα από τον σχεδιαστή θεμάτων προς μελέτη και την μεταξύ τους ιεράρχηση, το πρότυπο που περιγράφεται εδώ κρίνεται ιδιαίτερα χρήσιμο, πρωταρχικά διότι υπολογίζει γρήγορα και αποτελεσματικά πολλά εκ των ποσοτικοποιημένων κριτηρίων αλύσεως που προκύπτουν στη διαδικασία σχεδιασμού των τομέων ευθύνης.

Σχεδιασμός περιοχής ανταπόκρισης οχημάτων άμεσης βοήθειας: Υποθέστε ότι ο διοικητής μίας υπηρεσίας διασκορπίζει τα οχήματα άμεσης βοήθειας σε ολόκληρη την πόλη ή κατά μήκος ενός οδικού τμήματος, προ τοποθετώντας τα έτσι ώστε να προλαμβάνουν τις πιθανές κλήσεις για παροχή άμεσης βοήθειας. Τότε, ο σχεδιαστής του συστήματος χρειάζεται βοήθεια στην απόφασή του για την επιλογή των σωστών θέσεων και την χάραξη λογικών περιοχών αποκλειστικής ευθύνης για κάθε ένα από αυτά. Το πρότυπο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τους σκοπούς αυτούς, με παρόμοιο κατά πολύ τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιήθηκε και για τον σχεδιασμό τομέων ευθύνης αστυνομικών τμημάτων. Στη περίπτωση δισδιάστατης περιοχής εξυπηρέτησης, οι θέσεις των οχημάτων όσο αυτά δεν παρέχουν εξυπηρέτηση είναι πιο πιθανό να βρίσκονται σε σταθερά προεπιλεγμένα σημεία, ενώ τα αστυνομικά οχήματα περιτολούν στους τομείς ευθύνης τους. Στην περίπτωση μονοδιάστατης περιοχής εξυπηρέτησης θα χρησιμοποιηθεί η ανάλυση του 2^{ου} κεφαλαίου για να καθοριστεί η στρατηγική χωροθέτησης κάθε μονάδας ανταπόκρισης στην πρωταρχική περιοχή ευθύνη της. Διαφορά υπάρχει επίσης και στην σύνθεση του χρόνου εξυπηρέτησης. Στα οχήματα άμεσης βοήθειας ο χρόνος εξυπηρέτησης περιλαμβάνει το χρόνο μετακίνησης από ή προς ένα νοσοκομείο (για τη μεταφορά του ασθενούς), πράγμα που δεν ισχύει στα περιπολικά οχήματα εκτός της περίπτωσης σύλληψης και προσαγωγής στα κρατητήρια του τμήματος. Κατά αυτόν τον τρόπο στη περίπτωση των οχημάτων άμεσης βοήθειας με δισδιάστατη περιοχή ευθύνης είναι πολύ πιο πιθανό ότι οι χρόνοι μετακίνησης (χρόνος μέχρι την άφιξη στο σημείο γέννησης, χρόνος από το σημείο γέννησης ως το νοσοκομείο και χρόνος από το νοσοκομείο ως το σταθερό προεπιλεγμένο σημείο) θα παίζουν κυρίαρχο ρόλο στον συνολικό απαιτούμενο χρόνο ανά περιστατικό. Αυτή η συνέπεια είναι λιγότερο παρούσα στην περίπτωση στόλου οχημάτων επιδιόρθωσης βλαβών. (Στη περίπτωση των αστυνομικών οχημάτων ο χρόνος εμπλοκής στο σημείο γέννησης του περιστατικού είναι κατά πολύ μεγαλύτερος από το χρόνο μετακίνησης προς το σημείο αυτό).

Με τον τρόπο αυτό ο σχεδιαστής του στόλου των οχημάτων άμεσης βοήθειας ή επιδιόρθωσης βλαβών μπορεί να χρησιμοποιήσει το πρότυπο για να διερευνήσει τις συνέπειες επιλογής εναλλακτικών προεπιλεγμένων θέσεων και αντίστοιχων περιοχών πρωτοβάθμιας ανταπόκρισης για κάθε ένα από τα οχήματα του στόλου. Εφόσον οι χρόνοι μετακίνησης παίζουν τόσο σημαντικό ρόλο στην περίπτωση των οχημάτων άμεσης βοήθειας, είναι πιθανό ότι ο σχεδιαστής του συστήματος θα πρέπει να διευθετήσει τον χρόνο εξυπηρέτησης κάθε οχήματος ξεχωριστά για να υπογραμμίσει τους διαφορετικούς γεωγραφικούς παράγοντες που αντανακλώνται. Ο σχεδιαστής του συστήματος οχημάτων επιδιόρθωσης βλαβών ίσως δεν είναι απαραίτητο να πράξει ανάλογα. Εάν είναι αναγκαία μία τέτοια διευθέτηση το πρότυπο επιτρέπει τη βαθμονόμηση (calibration) του μέσου χρόνου εξυπηρέτησης για κάθε ξεχωριστή μονάδα εξυπηρέτησης.

Για τον καθορισμό των τελικών σημείων προ τοποθέτησης και των περιοχών πρωταρχικής ευθύνης των μονάδων εξυπηρέτησης πρέπει να ληφθεί υπόψη ο βαθμός επίτευξης των αντικειμενικών συναρτήσεων (ακρίβεια φόρτου μεταξύ των μονάδων, ελάττωση χρόνου μετακίνησης), την ακεραιότητα των κατά τόπους γειτονιών κ.α. Κατά αντίστοιχο τρόπο με τον σχεδιασμό των περιοχών ευθύνης των αστυνομικών τμημάτων μίας πόλης, το συνολικό «αλγεβρικό άθροισμα» των λειτουργικών διαμορφώσεων του συστήματος πρέπει να καθορίζονται από τον χρήστη του πρότυπου και όχι από το ίδιο το πρότυπο.

Μη προγραμματισμένες κατ' οίκον επισκέψεις κοινωνικών λειτουργών: Ας θεωρηθεί το τμήμα μίας υπηρεσίας κοινωνικής πρόνοιας που ανταποκρίνεται στην κατ' οίκον προκαλούμενη ζήτηση με την αποστολή ειδικευμένων υπάλληλων. Οι υπάλληλοι αυτοί μπορεί να είναι κοινωνικοί λειτουργοί, φυσιοθεραπευτές, ή νοσοκομειακοί υπάλληλοι.

Έστω ότι οι ειδικευμένοι υπάλληλοι σε κάποια κέντρα εξυπηρέτησης αποφασίζουν να παρέχουν υπηρεσίες σε συνεργασία μεταξύ τους· συνεταιριστικά. Ένα άτομο που απαιτεί μια κατ' οίκον επίσκεψη παίρνει τηλέφωνο στο τηλεφωνικό κέντρο και ένας ειδικευμένος υπάλληλος από το πλησιέστερο κέντρο εξυπηρέτησης αποστέλλεται εφόσον υπάρχει ένας τουλάχιστον διαθέσιμος. Εάν δεν υπάρχει διαθέσιμος υπάλληλος στο πλησιέστερο κέντρο η αναζήτηση συνεχίζεται στο αμέσως πλησιέστερο κέντρο κ.ο.κ. μέχρι να βρεθεί ο πρώτος διαθέσιμος υπάλληλος ο οποίος και αποστέλλεται. Εάν εξαντληθούν όλα τα κέντρα εξυπηρέτησης χωρίς να βρεθεί ένας μη «κατειλημμένος» υπάλληλος η αίτηση για εξυπηρέτηση προστίθεται σε μία ουρά αναμονής πιθανώς και άλλων αιτήσεων.

Στην περίπτωση αυτή το πρότυπο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξετάσει τις επιπτώσεις που θα προκληθούν στο σύστημα από την επάνδρωση διαφορετικού αριθμού υπαλλήλων σε κάθε κέντρο εξυπηρέτησης. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να δοθούν απαντήσεις στα ζητήματα της αρχικής τοποθέτησης ή της επανατοποθέτησης των κέντρων εξυπηρέτησης εντός του αστικού ιστού και ακόμα στο ερώτημα της συνένωσης κάποιων εξ' αυτών.

Υπογραμμίζεται ότι στην εφαρμογή αυτή, είναι δυνατό περισσότεροι του ενός παροχείς εξυπηρέτησης-ειδικευμένοι υπάλληλοι να επιχειρούν από την ίδια τοποθεσία- κέντρο εξυπηρέτησης. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο υπεύθυνος οργανωτής των αποστολών θα μεταχειρίζεται κάθε υπάλληλο ισότιμα αφού όλοι όσοι επιχειρούν έχοντας ως βάση το ίδιο κέντρο εξυπηρέτησης έχουν παρόμοιους χρόνους μετακίνησης. Εντούτοις αν κάποιος από τους διαθέσιμους υπαλλήλους είναι περισσότερο γνώριμος με μία συγκεκριμένη οικογενειακή κατάσταση ίσως προτιμηθεί από τον υπεύθυνο οργανωτή των αποστολών. Στατιστικά, οι προτιμήσεις που είναι βασισμένες σε τέτοια μικροσκοπικής φύσεως θέματα ισοκατανέμονται μεταξύ των υπαλλήλων.

Συστήματα Διανομής: Τα συστήματα αυτά μπορούν να είναι διαμορφωμένα με ποικίλους τρόπους. Εδώ θα εξεταστούν οι εξής περιπτώσεις:

1. **Συγκεντρωτικά ή Συνεργαζόμενα Συστήματα:** Σε ένα συγκεντρωτικό σύστημα Διανομής ένας πελάτης που απαιτεί την παράδοση ή την αποστολή ενός συγκεκριμένου τεμαχίου (ανταλλακτικό, έγγραφο, δέμα, πίτσα κ.ο.κ.) θα καλέσει το τηλεφωνικό κέντρο στο οποίο καταφθάνουν οι αιτήσεις για εξυπηρέτηση από ολόκληρη την περιοχή εξυπηρέτησης. Ο υπάλληλος (ή οι υπάλληλοι) που είναι υπεύθυνος για την εκχώρηση των αποστολών στους οδηγούς των οχημάτων (μονάδες εξυπηρέτησης) πρέπει να αποστείλει ένα διαθέσιμο οδηγό από την πλησιέστερη επιχειρησιακή βάση του συστήματος προς ικανοποίηση του αιτήματος. Η αναζήτηση ξεκινάει από την πλησιέστερη προς το σημείο γέννησης της αίτησης επιχειρησιακή βάση του συστήματος κατά παρόμοιο τρόπο όπως και στις μη προγραμματισμένες κατ' οίκον επισκέψεις κοινωνικών λειτουργών. Εάν όλες οι μονάδες εξυπηρέτησης είναι απασχολημένες το αίτημα εισέρχεται σε μία ουρά αναμονής.

2. **Αποκεντρωτικά συστήματα:** Σε ένα αποκεντρωτικό σύστημα Διανομής ο πελάτης που απαιτεί την αποστολή ή

την παράδοση ενός τεμαχίου έχει τη δυνατότητα να καλέσει απευθείας την πιο προτιμητέα ή ισοδύναμα την πλησιέστερη επιχειρησιακή βάση του συστήματος από όπου επιθυμεί να αποσταλεί η μονάδα εξυπηρέτησης. Αν υπάρχει διαθέσιμη μονάδα στην βάση πρώτης προτίμησης τότε αποστέλλεται προς εκπλήρωση της αίτησης. Αν όλες οι μονάδες εξυπηρέτησης που επιχειρούν από τη συγκεκριμένη βάση του συστήματος είναι απασχολημένες τότε ο πελάτης ενημερώνεται από τον υπάλληλο του τηλεφωνικού κέντρου για τον αναμενόμενο χρόνο άφιξης της πρώτης πιθανολογικά καθιστάμενης διαθέσιμης μονάδας. Εφόσον ο πελάτης κρίνει ότι ο αναμενόμενος χρόνος άφιξης είναι μεγαλύτερος από ότι ο ίδιος επιθυμεί επικοινωνεί με την αμέσως πιο προτιμητέα βάση του συστήματος. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται και στην δεύτερη βάση προτίμησης και συνεχίζεται έως ότου βρεθεί εκείνη η επιχειρησιακή βάση που είτε μπορεί να αποστείλει αμέσως μια μη διαθέσιμη μονάδα είτε ο αναμενόμενος χρόνος άφιξης είναι ικανοποιητικός για τον πελάτη. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρηθεί ότι ένας αποφασιστικός πελάτης – δηλαδή ένας πελάτης με αποδεκτό χρόνο ανταπόκρισης οσοδήποτε μικρό-εν δυνάμει θα προκαλέσει τον εκφυλισμό της λειτουργίας του συστήματος από αποκεντρωτικό σε συγκεντρωτικό.

Κάθε ένα από τα παραπάνω παραδείγματα προβλημάτων δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο, αντίθετα μπορεί να ενταχθεί σε ένα ευρύ φάσμα διοικητικών και σχεδιαστικών επιλογών. Ενδεικτικά επιλέγονται μερικά παραδείγματα από το φάσμα αυτό.

Αποστολή Δίγλωσσου Προσωπικού: Έστω ότι το προσωπικό μίας μονάδας ανταπόκρισης γνωρίζει δύο γλώσσες, τη μητρική π.χ. ελληνικά και μία άλλη που επικρατεί σε έναν ή σε περισσότερους τομείς μίας πόλης. Τότε ο σχεδιαστής του συστήματος θα ήθελε να διαμορφώσει τις περιοχές αποκλειστικής ευθύνης κάθε μονάδας ανταπόκρισης με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε για κάθε τομέα της πόλης η πρώτη προτιμώμενη μονάδα να αποτελείται από υπαλλήλους που εκτός της ελληνικής γνωρίζουν ως δεύτερη γλώσσα αυτή που ομιλείται περισσότερο στον αντίστοιχο τομέα. Η θεώρηση αυτή, της αντιστοίχισης της ικανότητας επικοινωνίας του προσωπικού που επανδρώνει κάθε μονάδα με τις ανάγκες ή τις ιδιαιτερότητες κάθε περιοχής ευθύνης θα υποσκελίσει πιθανώς στενότερης αποτελεσματικότητας θεωρήσεις όπως την ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου μετακίνησης.

Ο σχεδιαστής χρησιμοποιώντας το πρότυπο μπορεί να προδιαγράψει τη διαδικασία αποστολής των μονάδων έτσι ώστε κάθε φορά που γεννάται μία αίτηση για εξυπηρέτηση από ένα τομέα της πόλης με συγκεκριμένες ανάγκες να επιλέγεται από όλες τις μονάδες ανταπόκρισης εκείνη ακριβώς η μονάδα που τις ικανοποιεί εφόσον είναι διαθέσιμη. Εάν δεν είναι διαθέσιμη αποστέλλεται μια λιγότερο προτιμώμενη μονάδα.

Ο σχεδιαστής του συστήματος ίσως επιθυμεί να εξερευνήσει εναλλακτικές τοποθεσίες προεπιλογής ή περιοχές περιτολίας για τη μονάδα εξυπηρέτησης με το δίγλωσσο προσωπικό όπως επίσης και για τις υπόλοιπες μονάδες που θα επιχειρούν στην περιοχή μελέτης.

Μονάδες εξυπηρέτησης έσχατης ανάγκης: Λαμβάνοντας υπόψη ένα από τα παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου είναι δυνατό να φανταστεί κανείς την κατάσταση κορεσμού του αντίστοιχου συστήματος κατά την οποία όλες οι μονάδες εξυπηρέτησης συνήθους λειτουργίας είναι ταυτόχρονα κατειλημμένες. Όσο το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση κορεσμού κάθε αίτηση για εξυπηρέτηση μπορεί να διακεραιωθεί μόνο από μία εκ των μονάδων έσχατης ανάγκης. Οι μονάδες αυτές δεν θα χρησιμοποιούνται από τον διοικητή του συστήματος παρά μόνο σε περιπτώσεις υψηλού φόρτου προς αποφυγή ή καθυστέρηση ή μείωση της πιθανότητας σχηματισμού ουράς αναμονής.

Σε πρακτικές εφαρμογές οι μονάδες έσχατης ανάγκης μπορούν να είναι οχήματα υψηλόβαθμων στελεχών της υπηρεσίας π.χ. στην αστυνομία και στις μη προγραμματισμένες κατ' οίκον επισκέψεις κοινωνικών λειτουργών, κινητές μονάδες πρόγνωσης καρδιακών παθήσεων ή κινητές μονάδες αιμοδοσίας π.χ. στο ΕΚΑΒ και στις αντίστοιχες υπηρεσίες ιδιωτικών ιατρικών κέντρων, ή βοηθητικό προσωπικό με ιδιωτικά οχήματα π.χ. στα συστήματα Διανομής και στα συστήματα παροχής άμεσης τεχνικής βοήθειας.

Ο χρήστης του πρότυπου μπορεί εύκολα να προσομοιώσει την κατάσταση αυτή προκαθορίζοντας την πολιτική αποστολής των μονάδων έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση η λιγότερη προτιμητέα μονάδα να αντιστοιχεί σε μία εκ των μονάδων έσχατης ανάγκης. Με τον τρόπο αυτό το πρότυπο εκχωρεί στις μονάδες ανταπόκρισης συνήθους λειτουργίας όλες τις αιτήσεις για εξυπηρέτηση όσο στο σύστημα υπάρχει μία τέτοια μονάδα μη κατειλημμένη όσο δηλαδή το σύστημα βρίσκεται εκτός της κατάστασης κορεσμού. Εντούτοις όταν όλες οι μονάδες συνήθους λειτουργίας είναι ταυτόχρονα κατειλημμένες το πρότυπο αναπαριστώντας τον υπεύθυνο υπάλληλο εκχώρησης των αποστολών θα επιλέξει μία εκ των μονάδων έσχατης ανάγκης προς ικανοποίηση της αίτησης για εξυπηρέτηση. Έχοντας ως δεδομένη την περιπλοκή αυτή ο χρήστης μπορεί παρόλα αυτά να χειριστεί ζητήματα

ανισορροπίας φόρτου μεταξύ των μονάδων, μείωσης χρόνου ανταπόκρισης, επιλογής σημείων προ τοποθέτησης κ.α. Αυτό καθίσταται δυνατό αφού υπολογιστεί αρχικά ο φόρτος των αιτήσεων για εξυπηρέτηση των μονάδων έσχατης ανάγκης καθώς και της συχνότητας με την οποία επιχειρούν σε κάθε μία από τις υποπεριοχές της περιοχής μελέτης.

Αστυνομικά τμήματα με περιοχές ευθύνης οι οποίες εν μέρει συμπίπτουν: Στις περισσότερες περιπτώσεις επανασχεδιασμού των περιοχών ευθύνης αστυνομικών τμημάτων κυριαρχεί η αντίληψη ότι οι περιοχές αυτές αποτελούν ξεχωριστά υποσύνολα του αστικού χώρου της περιοχής μελέτης με μη κοινά τμήματα. Η πρωτοβάθμια ευθύνη εξυπηρέτησης ανατίθεται σε μία μονήρη μονάδα. Παρόλα αυτά μία διαφορετική στρατηγική αντιμετώπισης, αυτή των αλληλοκαλυπτομένων αστυνομικών περιοχών ευθύνης φαίνεται να κερδίζει ολοένα και περισσότερο έδαφος. Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατό στην ίδια γειτονιά να περιπολούν δύο ή περισσότερα οχήματα. Το πρότυπο επιτρέπει την εξερεύνηση μίας ευρείας γκάμας στρατηγικών αλληλουποστήριξης μεταξύ αστυνομικών τμημάτων.

• 1^ο παράδειγμα.

Σε μία πόλη επιχειρούν αστυνομικά οχήματα δευτεροβάθμιου επιπέδου εξυπηρέτησης καθένα εκ των οποίων αποστέλλεται για περιπολία εντός της περιοχής ευθύνης δύο γειτονικών τμημάτων ανεξάρτητης λειτουργίας. Με τον τρόπο αυτό, εάν τα τμήματα Α και Β έχουν συνορεύουσες περιοχές ευθύνης θα περιπολούνται από τα αντίστοιχα Α, Β οχήματα πρωτοβάθμιου επιπέδου εξυπηρέτησης και από ένα κοινό όχημα δευτεροβάθμιου επιπέδου εξυπηρέτησης το οποίο θα περιπολεί και τις δύο περιοχές. Η στρατηγική αποστολής οχημάτων προς κάλυψη των κλήσεων που γεννώνται στην περιοχή Α είναι:

1^η προτίμηση-αποστολή οχήματος Α εάν αυτό είναι διαθέσιμο

2^η προτίμηση-διαφορετικά, εξακρίβωση της κατάστασης λειτουργίας της μονάδας Β και αποστολή στην περιοχή Α εάν είναι διαθέσιμη

3^η προτίμηση-διαφορετικά, αποστολή του οχήματος δευτεροβάθμιας εξυπηρέτησης εάν αυτό είναι διαθέσιμο

4^η προτίμηση-διαφορετικά, αποστολή ενός άλλου οχήματος από την υπόλοιπη περιοχή μελέτης

- 2^ο παράδειγμα

Σε μία άλλη πόλη κάθε μία από τις υπο περιοχές ανταπόκρισης της αστυνομικής υπηρεσίας διαιρείται σε δύο ή περισσότερες ζώνες κάθε μία εκ των οποίων αποτελεί το πεδίο επιχειρησιακής δράσης ενός συγκεκριμένου αξιωματικού υπηρεσίας και της περί αυτόν ομάδας περιπολικών οχημάτων. Εντός κάθε ζώνης η ευθύνη περιπολικών διαμοιράζεται αποκλειστικά μεταξύ των οχημάτων που απαρτίζουν την αντίστοιχη ομάδα. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να μην υπάρχει αστυνομικό τμήμα εντός της ζώνης.

- 3^ο παράδειγμα

Στα πλαίσια συνένωσής ενός αριθμού μικρών κοινοτήτων προς τη δημιουργία μίας ευρύτερης ημιαστικής περιφέρειας π.χ. Σχέδιο Καποδίστριας, η νέα περιοχή που ορίζεται διαιρείται από έναν αριθμό αστυνομικών τμημάτων αλλά εκχωρούνται δύο οχήματα περιπολίας σε κάθε τμήμα. Αυτή είναι ίσως και η πιο απλή δομή Αστυνομικών τμημάτων με περιοχές ευθύνης οι οποίες εν μέρει συμπίπτουν.

Στις περιπτώσεις των αστυνομικών τμημάτων με περιοχές ευθύνης οι οποίες εν μέρει συμπίπτουν είναι ιδιαίτερα δύσκολη η πρόβλεψη της διαίρεσης του συνολικού ρυθμού άφιξης αιτήσεων στη μονάδα του χρόνου (λ) μεταξύ των μονάδων ανταπόκρισης, όπως επίσης και ο βαθμός συμμετοχής κάθε μονάδας στο συνολικό έργο πρόληψης του όλου συστήματος. Το πρότυπο δίνει στον σχεδιαστή του συστήματος τη δυνατότητα αυτή αποτελώντας με τον τρόπο αυτό ένα χρήσιμο εργαλείο για την κατανόηση των πολλών διαφορετικών παραγόντων που ανακύπτουν.

Παρόμοιες στρατηγικές μπορούν βέβαια να εφαρμοστούν από οποιαδήποτε υπηρεσία (μη αστυνομικού χαρακτήρα) που χρησιμοποιεί κινούμενες μονάδες ανταπόκρισης παρά μονάδες προεπιλεγμένων σημείων βάσης.

Προτεραιότητες: Ενώ πολλές υπηρεσίες server-to-customer θέτουν προτεραιότητες στον τύπο των κλήσεων που δέχονται –είτε ρητά είτε όχι– είναι συχνά μη αναγκαία η θεώρηση τους απευθείας στο πρότυπο. Αυτό ισχύει όταν ασχολούμαστε με τη μελέτη των περιοχών ευθύνης ή το σχεδιασμό των κέντρων επιχειρησιακής βάσης, τα σημεία χωροθέτησης των μονάδων κ.τ.λ. Για τις περιπτώσεις εκείνες στις οποίες οι προτεραιότητες πρέπει να συμπεριληφθούν στο πρότυπο, ο χρήστης μπορεί να το προσαρμόσει έτσι ώστε να ανακλάται σε αυτό μια συγκεκριμένη - περιορισμένου όμως εύρους - γκάμα διαδικασιών

ιεράρχησης των κλήσεων που λαμβάνονται αλλά και των εντολών αποστολής των οχημάτων. Εντούτοις, περίπλοκες μεθοδολογίες ιεράρχησης δεν είναι δυνατό να απεικονιστούν στο πρότυπο πράγμα που αποτελεί το μεγαλύτερό του περιορισμό στην τωρινή φάση εξέλιξής του.

Σαν ένα παράδειγμα μίας κατάστασης η οποία μπορεί να χειριστεί από το πρότυπο, ας θεωρηθεί μία πόλη που διαθέτει μία κινητή μονάδα παροχής έκτακτης ιατρικής περίθαλψης και μάλιστα είναι ειδικευμένη σε περιστατικά καρδιακής προσβολής. Αν λάβει χώρα ένα περιστατικό καρδιακής προσβολής μέσα στην πόλη και εφόσον η μονάδα είναι διαθέσιμη αποστέλλεται στο περιστατικό. Διαφορετικά επιχειρεί μία όχι τόσο ειδικευμένη μονάδα. Για να προσομοιαστεί η περίπτωση αυτή πρέπει να διαιρεθεί αρχικά η συνολική περιοχή ευθύνης σε μικρότερες γεωγραφικές οντότητες. Κατόπιν χωρίζεται κάθε μία από τις γεωγραφικές οντότητες i , σε δύο υπο περιοχές τις i_c , i_n . Η πρώτη λειτουργεί ως γεννήτορας αιτήσεων για εξειδικευμένη περίθαλψη έναντι καρδιακής προσβολής και έχει ρυθμό άφιξης κλήσεων στη μονάδα του χρόνου λ_{i_c} , ενώ η δεύτερη προκαλεί τη γέννηση των υπολοίπων περιστατικών και χαρακτηρίζεται από το ρυθμό άφιξης κλήσεων λ_{i_n} . Πρέπει ο πληθυσμός κάθε υπο περιοχής P_{i_c}, P_{i_n} να είναι:

$$P_{i_c} / P_{i_n} = \lambda_c / \lambda_n$$

Με τη θεώρηση αυτή η ειδικευμένη μονάδα γίνεται η πρώτη μονάδα προτίμησης για όλα τα i_c . Έτσι είναι δυνατό να προσαρμοστεί το γενικό πρότυπο στην περίπτωση ειδικών κλήσεων που απαιτούν την αποστολή μονάδας εξυπηρέτησης με εξειδικευμένα χαρακτηριστικά και να υπολογιστεί ξεχωριστά για κάθε τύπο κλήσης ο συνολικός χρόνος μετακίνησης και ο φόρτος λειτουργίας κάθε μονάδας εξυπηρέτησης όπως επίσης και το ποσοστό των κλήσεων καρδιακής προσβολής που εξυπηρετούνται από την ειδικευμένη για το σκοπό αυτό μονάδα ανταπόκρισης.

Η διαδικασία επιμερισμού των κλήσεων σε n -το πλήθος κατηγορίες, συνεχίζεται έως ότου αντιστοιχηθεί κάθε τύπος μονάδας εξυπηρέτησης (n -το πλήθος τύποι) σε μία υπο περιοχή, μία διαδικασία που ολοκληρώνεται σε όλες τις γεωγραφικές οντότητες i . Η μεθοδολογία αυτή ονομάζεται layering. Εντούτοις η εμπειρία έχει δείξει ότι η ένταση της παραγόμενης πληροφόρησης μπορεί γρήγορα να καταβάλλει το χρήστη του πρότυπου και να καταλύσει τη σαφήνεια απλών συσχετισμών που θα ήταν εύκολα κατανοητοί εάν υπήρχαν λιγότερα επίπεδα προτεραιότητας. Με τον τρόπο αυτό παρατηρείται μια σημαντική συναλλαγή μεταξύ της επιδιωκόμενης κάθε φορά σχολαστικότητας της αποτύπωσης του συστήματος και της ικανότητας κατανόησης, ερμηνείας

και ευφυσός δράσης ανίλογα με τα αποτελέσματα από τη πλευρά του χρήστη .

Το πρότυπο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη των ακόλουθων θεμάτων:

1. Επιλεκτική αναμονή κλήσεων οι οποίες παρότι χαρακτηρίζονται ως χαμηλού επιπέδου προτεραιότητας ,παρόλα αυτά γεννώνται εντός την πρωταρχικής περιοχής ευθύνης μίας μονάδας ανταπόκρισης.
2. Διακοπή της αποστολής μίας μονάδας καθώς αυτή εξυπηρετεί μία αίτηση χαμηλού επιπέδου προτεραιότητας , και συνακόλουθη εκχώρησή της σε μία υψηλού επιπέδου προτεραιότητας αίτηση.
3. Εξυπηρέτηση αιτήσεων που σχηματίζουν ουρά αναμονής με κριτήρια βασισμένα στον αρχικό διαχωρισμό τους σε διαφορετικού επιπέδου προτεραιότητας.

Εάν ο χρήστης του πρότυπου προτίθεται να μελετήσει αυτού του είδους την επιχειρησιακή λειτουργία του συστήματος (η οποία μπορεί να είναι μεγάλης σημαντικότητας για μία συγκεκριμένη περίπτωση) θα πρέπει να καταστρώσει ένα πρότυπο προσομοίωσης της λειτουργίας του.

Στα προηγούμενα παραδείγματα περιγράφηκε το εύρος των πρακτικών προβλημάτων που μπορούν να απαντηθούν με το πρότυπο. Υπάρχουν αδιαφιλονίκητα και πολλά άλλα τα οποία γίνονται ολοένα και πιο φανερά κλιμακώνοντας την χρήση του πρότυπου από απλές εφαρμογές σε πιο περίπλοκες.

5.2 Θεωρητικές Παραδοχές του Προτύπου

1.Γεωγραφικές Οντότητες: Η συνολική περιοχή εξυπηρέτησης μπορεί να διαιρεθεί σε ένα αριθμό N_A , «Γεωγραφικών Οντοτήτων» (γ.ο.) ή «Στατιστικών Περιοχών Αναφοράς». Κάθε γεωγραφική οντότητα μπορεί να αντιστοιχεί σε ένα οικοδομικό τετράγωνο, σε ένα πλήθος οικοδομικών τετραγώνων, σε μία ήδη καθορισμένη από κάποια άλλη υπηρεσία υποπεριοχή (π.χ. υπο περιοχές ανταπόκρισης αστυνομίας) ή σε ένα τμήμα οδικού άξονα σταθερού ή όχι φόρτου κυκλοφορίας κατά μήκος. Στο πρότυπο που θα εξεταστεί κάθε γεωγραφική οντότητα διαχειρίζεται σαν ένα απλό σημείο τοποθετημένο κοντά στο «κέντρο βάρους» της πραγματικής γεωγραφικής οντότητας την οποία αναπαριστά.

2.Ανεξάρτητες Αφίξεις POISSON: Οι αιτήσεις για εξυπηρέτηση δημιουργούνται σαν αποτελέσματα μίας διαδικασίας γεννήσεων POISSON ως προς το χρόνο. Η διαδικασία αυτή μπορεί να είναι διαφορετικής έντασης σε κάθε μία από τις γεωγραφικές οντότητες. Ο ρυθμός άφιξης αιτήσεων για εξυπηρέτηση από τη γεωγραφική οντότητα j , λ_j ($j = 1, 2, 3, \dots, N_A$) είναι γνωστός ή μπορεί να υπολογιστεί. Στην περίπτωση μελέτης ενός οδικού τμήματος μη σταθερού φόρτου κατά μήκος η ένταση της προκαλούμενης ζήτησης για εξυπηρέτηση είναι ίση με το άθροισμα της ζήτησης των επιμέρους οδικών τμημάτων σταθερού φόρτου.

3.Χρόνοι Μετακίνησης: Υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία για τον υπολογισμό του χρόνου μετακίνησης τ_{ij} από κάθε άτομο i σε κάθε άτομο j ($i, j = 1, 2, 3, \dots, N_A$). Σε περίπτωση απουσίας τέτοιων στοιχείων μπορούν να εφαρμοστούν προσεγγιστικές υποθέσεις βασισμένες σε θεωρήσεις γεωμετρικής πιθανότητας (ίσως χρησιμοποιηθεί η ευκλείδεια απόσταση ή κάποιος εμπειρικός τύπος).

4.Μονάδες Εξυπηρέτησης: Στο σύστημα επιχειρούν N το πλήθος μονάδες εξυπηρέτησης χωροταξικά κατανεμημένες που μπορούν να μετακινηθούν σε κάθε μία από τις N_A γεωγραφικές οντότητες.

5.Τοποθεσίες Μονάδων Εξυπηρέτησης: Η τοποθεσία κάθε μονάδας εξυπηρέτησης όσο αυτή είναι διαθέσιμη είναι γνωστή (τουλάχιστο στατιστικά). Για παράδειγμα ένα αστυνομικό όχημα περιπολίας ίσως σπαταλά 50% του χρόνου περιπολίας στη γ.ο. 12 και 25% στις γ.ο. 8 και 11. Μία προ τοποθετημένη μονάδα εξυπηρέτησης π.χ. ένα ασθενοφόρο ή ένα μηχανάκι μίας εταιρίας Διανομής, θα βρίσκεται πάντοτε τοποθετημένη σε μία συγκεκριμένη γ.ο. (όταν δεν είναι κατελήμμενη). Το σύνολο των γ.ο. στα οποία μία μη προ

τοποθετημένη μονάδα ίσως τοποθετηθεί καθώς αναμένει να αποσταλεί σε μία κλήση απαρτίζει την **Περιοχή Περιπολίας**. Γενικά οι περιοχές περιπολίας είναι δυνατό να συμπίπτουν εν μέρει.

6.Αποστολή των Μονάδων Εξυπηρέτησης: Σε ανταπόκριση κάθε αίτησης για εξυπηρέτηση, ακριβώς μία μονάδα αποστέλλεται στο σημείο γέννησης του περιστατικού, εφόσον μία τουλάχιστον μονάδα εντός της συνολικής περιοχής είναι διαθέσιμη. Εάν όλες οι μονάδες είναι κατειλημμένες, η αίτηση είτε εισέρχεται σε μία ουρά αναμονής μαζί με άλλες καθυστερημένες αιτήσεις, είτε χάνεται, είτε εξυπηρετείται από κάποιο βοηθητικό υποσύστημα (π.χ. όταν όλες οι μονάδες άμεσης επέμβασης του ΕΚΑΒ είναι κατειλημμένες μία κλήση είναι δυνατό να εξυπηρετηθεί από ένα διαθέσιμο περιπολικό όχημα της αστυνομίας). Όλες οι αιτήσεις στην ουρά αναμονής εξυπηρετούνται αργότερα σύμφωνα με την ιεραρχία της ουράς. Η ιεραρχία αυτή είναι ανεξάρτητη του αντιληπτού από τον πελάτη χρόνου εξυπηρέτησης και του σημείου γέννησης της αίτησης. Επιτρεπτές ιεραρχίες είναι: FCFS, LCFS, στην τύχη. Μετά την ολοκλήρωση μίας εξυπηρέτησης η μονάδα ανταπόκρισης είτε αποστέλλεται σε μία αίτηση που αναμένει εντός της ουράς, είτε επιστρέφει αμέσως στη βάση της.

7.Αποσταλές Προκαθορισμένης Σειράς Προτίμησης: Η αποστολή των μονάδων ανταπόκρισης διεξάγεται με μία διαδικασία προκαθορισμένης σειράς προτίμησης. Αυτό θα γίνει περισσότερο κατανοητό μέσα από ένα παράδειγμα: έστω ότι μια αίτηση για εξυπηρέτηση γεννάται από τη γ.ο. 12. Για τη γ.ο. αυτή, όπως και για όλες τις υπόλοιπες, υπάρχει μία διατεταγμένη σειρά μονάδων ανταπόκρισης {4,5,2,1,6,7,3}, αν θεωρηθεί ένα πρόβλημα αναμονής 7 μονάδων εξυπηρέτησης, το οποίο καθορίζει την σειρά προτίμησης του αποστολέα (διευθυντής του τηλεφωνικού κέντρου της υπηρεσίας). Η δυνατότητα δημιουργίας προτιμήσεων από μικροσκοπικής φύσεως ζητήματα (όπως είδαμε είναι δυνατό να συμβεί στις μη προγραμματισμένες κατ' οίκον επισκέψεις κοινωνικών λειτουργών) δεν εξετάζεται. Ο υπεύθυνος ανάθεσης των αποστολών ξεκινά από την πρώτη καταχώρηση της λίστας, τη μονάδα 4 στην περίπτωση αυτή, και της αναθέτει την αποστολή αν είναι διαθέσιμη. Εδώ η γ.ο. 12 ανήκει στην **Περιοχή Πρωταρχικής Ευθύνης** της μονάδας 4. Αν η πρώτη τη προτίμηση μονάδα είναι κατειλημμένη, τότε ο υπεύθυνος ανάθεσης των αποστολών εκχωρεί στην δεύτερη πιο προτιμητέα μονάδα την αποστολή, εάν αυτή είναι διαθέσιμη, τη μονάδα 5 στο παράδειγμά μας. Ο υπεύθυνος ανάθεσης των αποστολών αναζητεί στη διατεταγμένη λίστα την πρώτη διαθέσιμη μονάδα ανταπόκρισης και αν αυτή είναι μη κατειλημμένη τότε

αποστέλλεται στη γ.α. γέννησης του περιστατικού. Η διαδικασία αυτή καλείται «προκαθορισμένης σειράς προτίμησης» αφού η **διάταξη των μονάδων στη σειρά προτίμησης δεν αλλάζει σύμφωνα με την κατάσταση του συστήματος**. Εντούτοις είναι δυνατό να διαφέρει από γεωγραφική οντότητα σε γεωγραφική οντότητα. Το πρότυπο μπορεί να επιχειρεί με οποιαδήποτε Στρατηγική Αποστολής Προκαθορισμένης Σειράς Προτίμησης. Με N_A το πλήθος γεωγραφικές οντότητες και N μονάδες ανταπόκρισης υπάρχουν $(N!)^{N_A}$ πιθανές διαφορετικές στρατηγικές αποστολής.

7.Χρόνοι Εξυπηρέτησης: Ο απαιτούμενος χρόνος εξυπηρέτησης (συνολικός χρόνος μετακίνησης προς και από το σημείο + χρόνος που δαπανάται στο σημείο γέννησης της αίτησης + πιθανός χρόνος που δαπανάται για παροχή επιπρόσθετου επιπέδου εξυπηρέτησης) έχει μία γνωστή μέση τιμή (Ομογενή Συστήματα Εξυπηρέτησης). Στη γενική περίπτωση κάθε μονάδα εξυπηρέτησης έχει το δικό της μέσο χρόνο εξυπηρέτησης(Ετερογενή Συστήματα Εξυπηρέτησης). Πέραν τούτου, αντανακλώντας τη δυσκολία προβλεψιμότητας των χρόνων εξυπηρέτησης των πραγματικών συνθηκών υπάρχει σημαντική απόκλιση της μέσης τιμής. Η μαθηματική ανάλυση υποθέτει αρνητική εκθετική κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης. Ακόμα και σημαντικές αποκλίσεις από την υπόθεση αυτή έχει βρεθεί ότι δεν αλλοιώνουν σε πρακτική εφαρμογή την ακρίβεια πρόβλεψης του πρότυπου.

8.Εξάρτηση Χρόνου Εξυπηρέτησης και Χρόνου Μετακίνησης: Οι αποκλίσεις του χρόνου εξυπηρέτησης που οφείλονται αποκλειστικά στις αποκλίσεις του χρόνου μετακίνησης υποτίθεται ότι είναι ήσσονος σημασίας αν συγκριθούν με τις αποκλίσεις του χρόνου που δαπανάται στο σημείο γέννησης της αίτησης και του χρόνου που δαπανάται για παροχή επιπρόσθετου επιπέδου εξυπηρέτησης. Η υπόθεση σαφώς περιορίζει το πεδίο εφαρμογής του πρότυπου. Παρόλα αυτά, η υπόθεση αυτή σχεδόν ικανοποιείται από τα αστικά αστυνομικά τμήματα, τις υπηρεσίες παροχής έκτακτης τεχνικής βοήθειας (καθοδόν ή κατ'οίκον), και τις κατ'οίκον επισκέψεις κοινωνικών λειτουργών. Η περίπτωση των υπηρεσιών άμεσης βοήθειας που επιχειρούν σε αγροτικές περιοχές είναι αυτή που ικανοποιεί την παραπάνω υπόθεση το λιγότερο.

Στην πράξη, κανένα πραγματικό σύστημα παροχής εξυπηρέτησης δε θα προσαρμόζεται ακριβώς σε όλες τις υποθέσεις που αναφέρθηκαν. Εφαρμόζοντας το πρότυπο ο χρήστης πρέπει να εκτιμά την έκταση κατά την οποία το πραγματικό σύστημα δεν συμβαδίζει με την ακαμψία του πρότυπου και κυρίως το συνακόλουθο έλλειμμα σε ακρίβεια πρόβλεψης. Εκτιμώντας τις αντίστοιχες απώλειες από την εφαρμογή διαφορετικών

μεθόδων πρέπει να επιλέξει εκείνη που ταιριάζει ,εκ των προτέρων, καλύτερα με τον καθορισμένο σκοπό της ανάλυσης.

Λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες υποθέσεις το πρότυπο μπορεί να υπολογίσει τις τιμές των ακόλουθων κριτηρίων λειτουργίας του συστήματος:

1.Για ολόκληρη την περιοχή μελέτης: Μέσος χρόνος μετακίνησης, φόρτος κάθε μονάδας και ανισορροπία φόρτου μεταξύ των μονάδων, ποσοστό αποστολών εκτός της πρωταρχικής περιοχής ευθύνης μίας μονάδας.

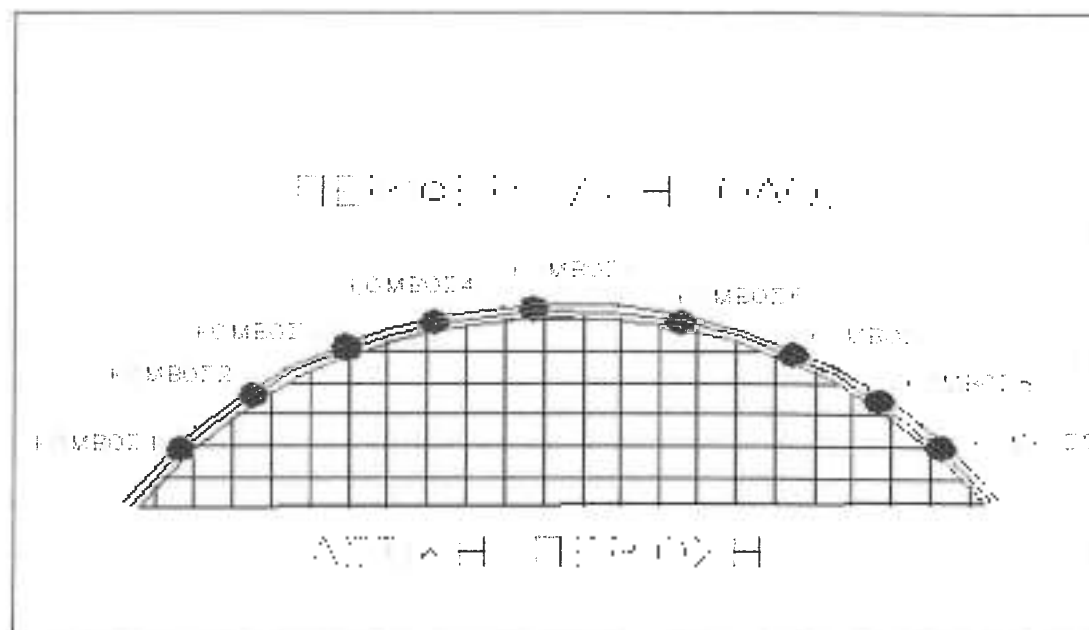
2.Για κάθε μία από τις μονάδες ανταπόκρισης: Φόρτος (μετρούμενος ως ποσοστό του χρόνου κατά τον οποίο η μονάδα είναι κατειλημμένη), μέσος χρόνος μετακίνησης, ποσοστό ανταποκρίσεων εκτός της πρωταρχικής περιοχής ευθύνης της μονάδας.

3.Για κάθε μία από τις πρωταρχικές περιοχές ευθύνης: Εσωτερικά προκαλούμενος φόρτος (input-επαλήθευση), μέσος χρόνος μετακίνησης, ποσοστό αιτήσεων εξυπηρετούμενων από τις υπόλοιπες μονάδες εκτός της μονάδας πρώτης προτίμησης.

4.Για κάθε μία γεωγραφική οντότητα: Εσωτερικά προκαλούμενος φόρτος (input-επαλήθευση), μέσος χρόνος μετακίνησης, ποσοστό των αιτήσεων εξυπηρετούμενων από την κάθε μονάδα n ($n = 1, 2, \dots, N$)

Επιπλέον, αν το σύστημα που μελετάται είναι ένα σύνολο οχημάτων, μπορεί να υπολογιστεί η συχνότητα των διαβάσεων κάθε οχήματος σε κάθε μία από τις γεωγραφικές οντότητες της περιοχής μελέτης.

5.3. Παράδειγμα τριών μονάδων εξυπηρέτησης (Άπειρη Ικανότητα Εξυπηρέτησης Ουράς Αναμονής)



Σχήμα 5.2. Σκαρίψιμο περιφερειακής οδού τριών μονάδων εξυπηρέτησης με καθορισμένες περιοχές ευθύνης

Πρωτογενική Περιοχή Ευθύνης Μονάδας 1: -----
Πρωτογενική Περιοχή Ευθύνης Μονάδας 2: -----
Πρωτογενική Περιοχή Ευθύνης Μονάδας 3: -----

Θεωρώντας το παράδειγμα των τριών σταθμών εξυπηρέτησης θα αναλυθεί ο τρόπος λειτουργίας του υπερκυβικού προτύπου αλλά ταυτόχρονα θα γίνει απόπειρα εξαγωγής της γενικής μαθηματικής δομής ενός συστήματος με N σταθμούς εξυπηρέτησης.

Έστω ότι υπάρχει ένα οδικό τμήμα με τρεις σταθμούς εξυπηρέτησης όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2. Ο φόρτος κυκλοφορίας δεν διατηρείται σταθερός κατά μήκος στο χρονικό διάστημα μίας μονάδας χρόνου. Λόγω ύπαρξης κόμβων κυκλοφορίας είναι δυνατό σε κάθε τμήμα που ορίζουν δύο διαδοχικοί κόμβοι ο φόρτος να είναι διαφορετικός. Αν υπάρχουν 9 κόμβοι κατά μήκος τότε ολόκληρη η περιοχή εξυπηρέτησης διαιρείται σε 10 γεωγραφικά άτομα καθένα από τα οποία λειτουργεί σαν ένας ανεξάρτητος κατά Poisson γεννήτορας αιτήσεων για εξυπηρέτηση. Ο ρυθμός άφιξης αιτήσεων λ_j σε κάθε τμήμα j είναι ανάλογος με το ποσοστό των οχηματοχιλιομέτρων ολόκληρης της περιοχής εξυπηρέτησης που πραγματοποιούνται στη μονάδα του χρόνου στο τμήμα j . Προς ευκολία της παρουσίασής θεωρείται ότι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης για κάθε μονάδα n είναι

σταθερός, ίσος με μ^{-1} . Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι δεν προστίθεται επιπλέον βαθμός πολυπλοκότητας αν θεωρηθούν μέσοι χρόνοι εξυπηρέτησης διαφορετικοί για κάθε μονάδα εξυπηρέτησης.

Κατά τη διάρκεια του κεφαλαίου τούτου γίνεται η υπόθεση ότι το υπερκυβικό πρότυπο έχει ικανότητα σχηματισμού ουράς αναμονής απείρου μήκους.

Ο ρυθμός άφιξης λ_j των αιτήσεων από κάθε άτομο φαίνεται στον πίνακα 5.3. και είναι εκφρασμένος ως ποσοστό του μέσου χρόνου εξυπηρέτησης της αντίστοιχης προς το άτομο αυτό μονάδας. Για παράδειγμα το λ_5 ισούται με 0,15 αιτήσεις ανά μέσο χρόνο εξυπηρέτησης της μονάδας 2. Κάθε μονάδα εξυπηρέτησης αντιστοιχεί σε μία πρωταρχική περιοχή ανταπόκρισης δηλαδή σε ένα σύνολο ατόμων για τα οποία αποτελεί την πρώτη επιλογή αποστολής. Για παράδειγμα η πρωταρχική περιοχή ανταπόκρισης της μονάδας 2 περιλαμβάνει τα άτομα 3,5, και 6. Η δεύτερη επιλογή αποστολής για κάθε άτομο επιλέγεται στη βάση της γεωγραφικής εγγύτητας. Η συνολική πολιτική επιλογής αποστολών για κάθε άτομο δίνεται στον πίνακα 5.4. Στον πίνακα αυτό φαίνεται, για παράδειγμα, ότι η μονάδα 1 αποτελεί την πρώτη αναπληρωματική μονάδα για όλες τις αιτήσεις που προέρχονται εκ των πρωταρχικών περιοχών ευθύνης των μονάδων 2 και 3. Με τον τρόπο αυτό η μονάδα 1 δεν αντιμετωπίζει μόνο τον βαρύ φόρτο εκ της πρωταρχικής περιοχής ευθύνης της (50% του συνολικού φόρτου της πόλης) αλλά αποτελεί ταυτόχρονα την πρώτη αναπληρωματική μονάδα για όλα τα περιστατικά που θα προκύψουν στο υπόλοιπο τμήμα της πόλης. Αντίστροφα και η πρωταρχική περιοχή ευθύνης της μονάδας 1 είναι χωρισμένη σε δύο τμήματα καθένα από τα οποία έχει διαφορετική αναπληρωματική μονάδα αποστολής. Έτσι η μονάδα 2 είναι η πρώτη αναπληρωματική μονάδα για τα άτομα 1 και 2 ενώ η μονάδα 3 είναι η πρώτη αναπληρωματική μονάδα για το άτομο 4. Κατά την διάρκεια της επίλυσης των εξισώσεων για το υπερκυβικό πρότυπο δεν προστίθεται καμία επιπλέον δυσκολία αν κάποιος επιλέξει ακόμα πιο πολύπλοκη πολιτική αποστολής των μονάδων εξυπηρέτησης.

Αριθμός Γ.Ο	Ρυθμός άφιξης Αιτήσεων λ_i
1	0,25
2	0,25
3	0,10
4	0,25
5	0,15
6	0,10
7	0,10
8	0,10
9	0,10
10	0,10

Πιν 5.3.

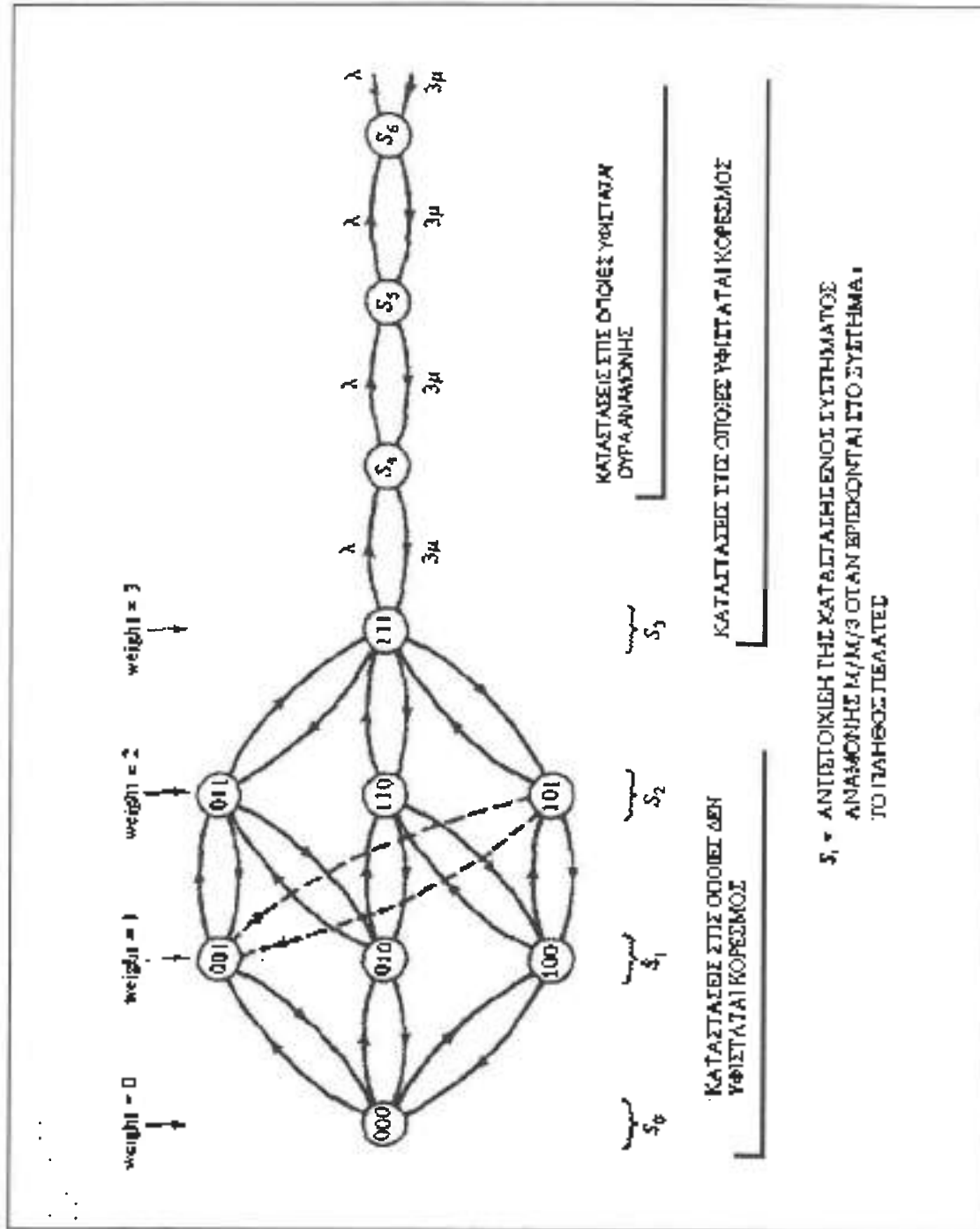
Αριθμός Ατόμου	1 ^η προτιμώμενη μονάδα	2 ^η προτιμώμενη μονάδα	3 ^η προτιμώμενη μονάδα
1	1	2	3
2	1	2	3
3	2	1	3
4	1	3	2
5	2	1	3
6	2	1	3
7	3	1	2
8	3	1	2
9	3	1	2
10	3	1	2

Πιν 5.4. Επιλογές προτίμησης για μία περιφερειακή οδό τριών μονάδων εξυπηρέτησης

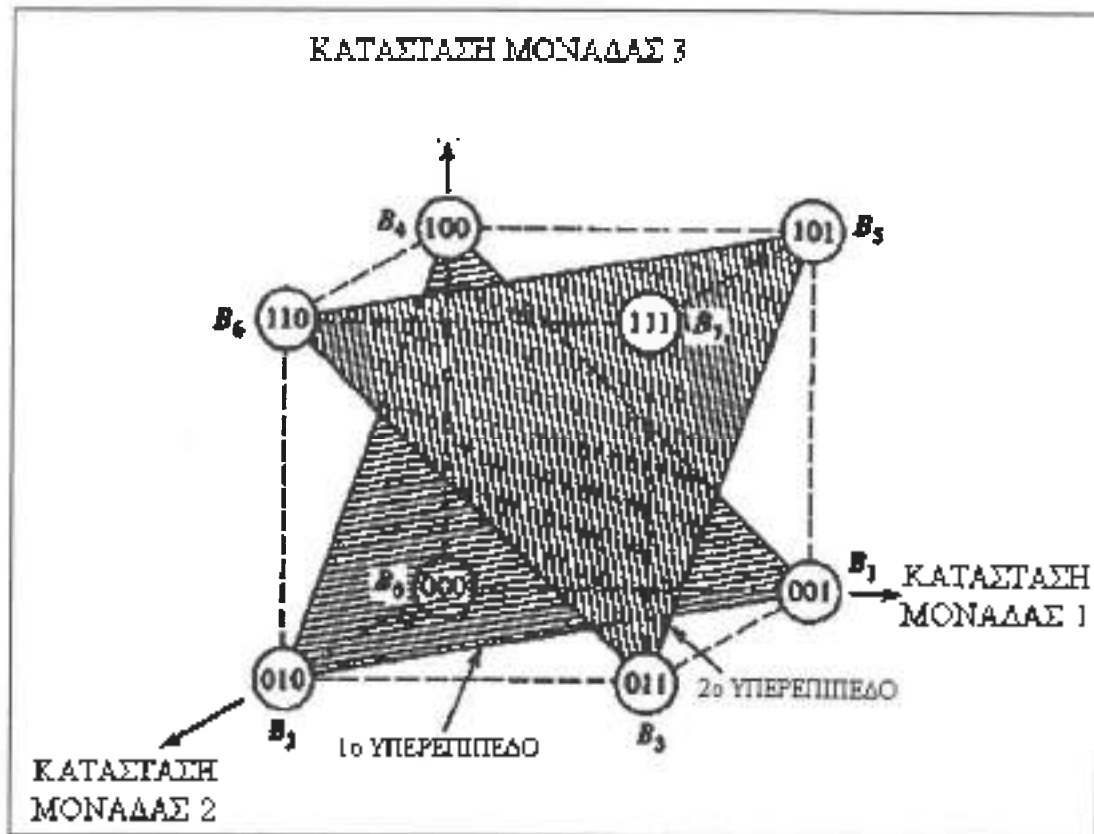
Εάν το πρόβλημα απαιτεί τον υπολογισμό των κριτηρίων λειτουργίας που έχουν να κάνουν μόνο με το φόρτο του συστήματος, δεν είναι αναγκαίο να προσδιοριστεί το μητρώο του χρόνου μετακίνησης μεταξύ των ατόμων (τ_{ij}) ούτε και οι θέσεις των μονάδων όταν αυτές είναι ανενεργές. Τα απαραίτητα στοιχεία για να διαμορφωθεί το πρόβλημα είναι η πολιτική αποστολής των μονάδων, ο ρυθμός άφιξης των αιτήσεων ανά γεωγραφικό άτομο, ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης και η συμπεριφορά της ουράς αναμονής.

Στο άνω παράδειγμα όλοι οι μέσοι χρόνοι εξυπηρέτησης ετέθησαν ίσοι. Με τον περιορισμό αυτό, το σύστημά αντιστοιχεί στο σύνολό του με ένα σύστημα αναμονής $M/M/N$ (εφόσον δεν ενδιαφέρει η ταυτότητα των κατειλημμένων μονάδων). Υπάρχει όμως μία σημαντική διαφορά: η κατάσταση κάθε μονάδας εξυπηρέτησης του πρότυπου που εξετάζεται μπορεί να πάρει δύο πιθανές τιμές, 1 όταν είναι κατειλημμένη και 0 όταν είναι ανενεργή ενώ στο $M/M/N$ σύστημα αρκεί ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός για την περιγραφή της κατάστασης του συστήματος. Αν συμβολιστεί με b_n η κατάσταση της μονάδας n , ($b_n=0$ όταν είναι διαθέσιμη, $b_n=1$ όταν είναι κατειλημμένη) η κατάσταση του συστήματος δίνεται από το διάνυσμα $B=\{b_N, b_{N-1}, \dots, b_1\}$. Η συλλογή όλων των πιθανών διανυσμάτων B , παριστάνεται με C_N , και αντιστοιχεί στα διανύσματα ενός γραμμικού χώρου N διαστάσεων. Η τιμή του B , παριστάνεται με $w(B)$, και ισούται με το άθροισμα των κατειλημμένων μονάδων στη κατάσταση B δηλαδή είναι $w(B)=\sum b_n$. Για παράδειγμα η τιμή του $\{0,1,1\}$ ισούται με 2 ενώ του $\{0,0,0\}$ ισούται με 0.

Στην περίπτωση ίσων μέσων χρόνων εξυπηρέτησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί η έννοια της τιμής μίας κατάστασης B , για να απεικονιστεί ο τρισδιάστατος χώρος στον πιο απλό $M/M/N$ χώρο. Η αντιστοιχία αυτή προκύπτει με τη συλλογή όλων των καταστάσεων που έχουν για παράδειγμα τιμή ίση με w_0 : η αθροισμένη πιθανότητα εμφάνισής τους είναι ίση με την πιθανότητα της κατάστασης S_{w_0} που εξάγεται από το $M/M/N$ πρότυπο. Για παράδειγμα οι καταστάσεις 001, 010, 100, έχουν και οι τρεις τιμή ίση με 1 και η αθροισμένη πιθανότητά τους πρέπει να ισούται με την πιθανότητα της κατάστασης S_1 κατά το πρότυπο $M/M/N$. Ένας τρόπος για να φανεί αυτή η αντιστοιχία φαίνεται στο σχήμα 5.5 στο οποίο όλες οι καταστάσεις που έχουν ίση τιμή είναι κατηγοριοποιημένες κατακόρυφα. Το σχεδιάγραμμα 5.5 δείχνει επίσης ρητά την μη πεπερασμένη σειρά η οποία αυξάνει τον αριθμό των δυνατών καταστάσεων του συστήματος λόγω εμφάνισης ουράς αναμονής. Στο επόμενο σχεδιάγραμμα 5.6 η συλλογή των καταστάσεων 001, 010, 100 φαίνεται ότι ορίζει ένα επίπεδο που σχηματίζει γωνία 45° με το αρχικό σημείο προέλευσης, το σημείο 000. Με τον τρόπο αυτό κάθε πλευρά του κύβου τέμνεται από το επίπεδο αυτό με γωνία 45° , και η απόσταση του αρχικού σημείου με το επίπεδο είναι ίση με 1.



Σχήμα 5.5.



Σχήμα 5.6 Χώρος ενός Συστήματος Αναμνητής τριών μονάδων εξουπρέτισης και τα αντίστοιχα υπερεπίπεδα από την αρχική κατάσταση 000

Είναι δυνατό να γενικευτεί η ιδέα αυτή σε ένα χώρο N διαστάσεων ορίζοντας $H_n =$ το σύνολο των καταστάσεων που έχει τιμή ίση με n ,

$$\text{ή } H_n = \{ B \in C_n : w(B) = n \} , n = 0, 1, 2, \dots, N$$

Σε αυτή την περίπτωση, H_0 είναι το σύνολο των καταστάσεων που ορίζουν ένα επίπεδο σε απόσταση n από το αρχικό σημείο προέλευσης (η απόσταση αυτή μετρείται δεξιόστροφα κατά μήκος των ακμών του κύβου), τοποθετημένο σε μία γενικευμένη γωνία 45° σε σχέση με αυτό. Μερικές φορές το σύμβολο H_n θα αναφέρεται ως το n -στό υπερεπίπεδο από το αρχικό σημείο, έχοντας υπόψη ότι αυτό ορίζεται από ένα πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων.

Γενικεύοντας το πρότυπο σε N διαστάσεις γίνεται αρκετά φορτικό να δηλώνεται κάθε κατάσταση ως έναν N -ψήφιο δυαδικό αριθμό. Έτσι κάθε κατάσταση θα αναπαριστάται με το δεκαδικό ακέραιο αριθμό που αντιστοιχεί στον αρχικό δυαδικό αριθμό. Για παράδειγμα στο πρόβλημα των $N=3$ μονάδων εξυπηρέτησης :

ΔΥΑΔΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗ ΔΕΚΑΔΙΚΗ ΑΚΕΡΑΙΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ
000	B_0
001	B_1
010	B_2
011	B_3
100	B_4
101	B_5
110	B_6
111	B_7

Στη γενική περίπτωση ενός προβλήματος N μονάδων, οι αντίστοιχες αυτές δεκαδικές ακέραιες καταστάσεις κυμαίνονται από την τιμή B_0 στην τιμή B_{2^N-1} . Για την γενική περίπτωση μίας κατάστασης $B = \{ b_N, b_{N-1}, \dots, b_1 \}$, η αντίστοιχη της τιμή δίνεται από την σχέση:

$$u(B) = b_N \cdot 2^{N-1} + b_{N-1} \cdot 2^{N-2} + \dots + b_1$$

Κατ' αντίστροφο τρόπο, σε κάθε θετικό ακέραιο αριθμό k αντιστοιχεί ένα μοναδικό B_k τέτοιο ώστε $u(B_k) = k$. Για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα με $N=9$, το $k=492$ αντιστοιχεί στο $B_{492} = \{1,1,1,1,0,1,1,0,0\}$ αφού $u(B_{492})=492$.

Μεταβάσεις μεταξύ γειτονικών καταστάσεων του συστήματος:
 Στο υπερκυβικό πρότυπο η μετάβαση από μία κατάσταση σε μία άλλη διαφορετική κατάσταση συμβαίνει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που συμβαίνει και στα υπόλοιπα μοντέλα αναμονής. Το υπερκυβικό πρότυπο υποθέτει ότι σε κάθε αίτηση για εξυπηρέτηση αποστέλλεται μία και μόνο μονάδα παροχής εξυπηρέτησης. Με τον τρόπο αυτό, υποθέτοντας ότι είναι εικονικά αδύνατο να αφιχθούν ταυτόχρονα δύο αιτήσεις, η μετάβαση από τη κατάσταση $(0,0,0)$ στην κατάσταση $(0,1,0)$ είναι επιτρεπτή, ενώ η διπλού βήματος μετάβαση από την κατάσταση $(0,0,0)$ στην κατάσταση $(0,1,1)$ όχι (αφού υποθέτει ότι δύο διαθέσιμες μονάδες εξυπηρέτησης γίνονται κατειλημμένες την ίδια χρονική στιγμή). Κατά παρόμοιο τρόπο, εάν υποθεθεί ότι κάθε κατειλημμένη μονάδα απασχολείται στην περιοχή ευθύνης της ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες για την εκπλήρωση της τρέχουσας αποστολής της, είναι εικονικά αδύνατο για δύο κατειλημμένες μονάδες εξυπηρέτησης να γίνουν διαθέσιμες ταυτόχρονα. Δηλαδή η μετάβαση από την κατάσταση $(1,0,1)$ στην κατάσταση $(0,0,1)$ είναι επιτρεπτή, ενώ η μετάβαση από την κατάσταση $(1,0,1)$ στην κατάσταση $(0,0,0)$ δεν είναι.

Συνοψίζοντας, προκύπτει το εξής συμπέρασμα: κάθε μετάβαση μοναδιαίου βήματος είναι επιτρεπτή, ενώ όλες οι μεταβάσεις πολλαπλών βημάτων δεν είναι επιτρεπτές. Οι μεταβάσεις αυτές συμβαίνουν μόνο μεταξύ καταστάσεων σε γειτονικά υπερεπίπεδα από το σημείο προέλευσης-αρχική κατάσταση. Αφού κάθε μετάβαση μοναδιαίου βήματος προκαλεί την αλλαγή ενός μονάχα από τα ψηφία του διαδικού αριθμού που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος –πράγμα που σημαίνει ότι αλλάζει η κατάσταση μίας και μόνο μονάδας εξυπηρέτησης– μπορεί να απεικονιστεί η μετάβαση αυτή κατά μήκος μίας ακμής του υπερκύβου. Για παράδειγμα, η μετάπτωση από την κατάσταση $(0,0,1)$ στην κατάσταση $(1,0,1)$ υφίσταται κατά μήκος της δεξιότερης εκ των ακμών του κύβου.

Σαν παράδειγμα που συνδυάζει τις ιδέες τόσο της κατάστασης ενός συστήματος όσο και της μετάβασής του από την μία κατάσταση σε μία άλλη, θεωρείται το οδικό τμήμα με τις τρεις μονάδες εξυπηρέτησης. Στην αρχική κατάσταση του συστήματος και οι τρεις μονάδες εξυπηρέτησης είναι διαθέσιμες. Έστω ότι τα ακόλουθα περιστατικά συμβαίνουν:

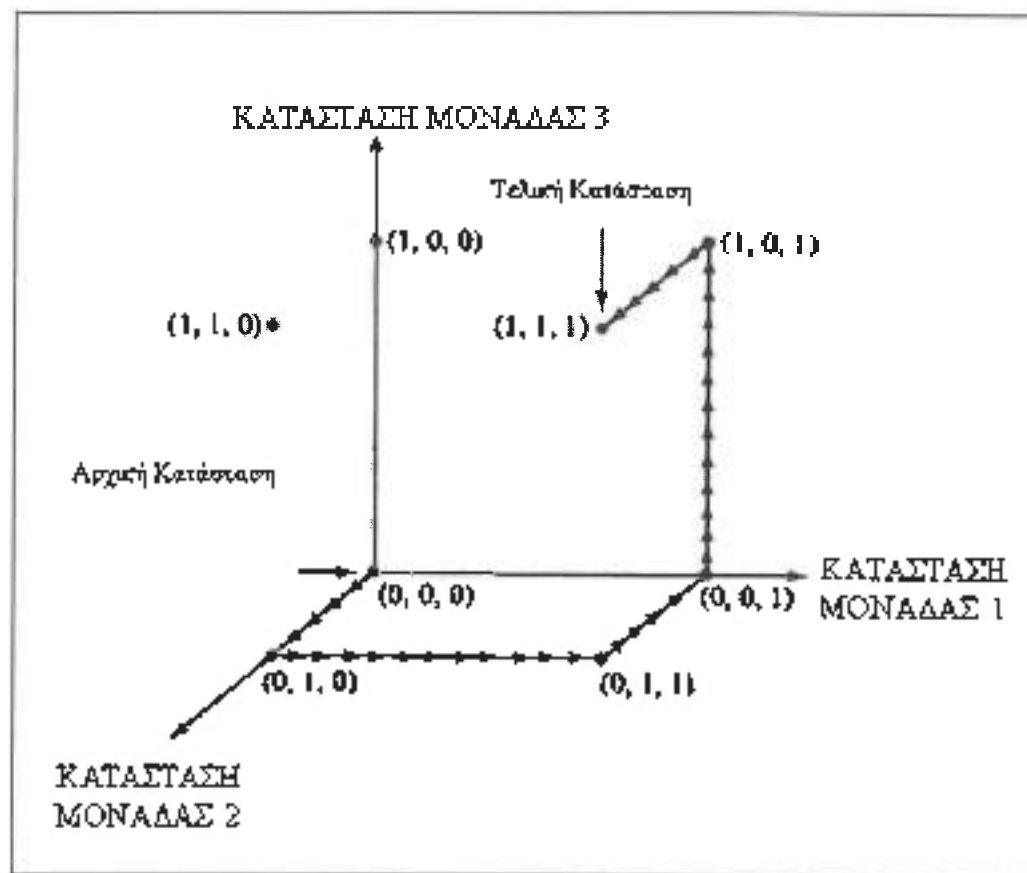
- 1) Μία αίτηση για εξυπηρέτηση γεννάται στη γεωγραφική οντότητα 6.
- 2) Μία αίτηση για εξυπηρέτηση γεννάται στη γεωγραφική οντότητα 1.
- 3) Η μονάδα εξυπηρέτησης 2 ολοκληρώνει την αποστολή της.
- 4) Μία αίτηση για εξυπηρέτηση γεννάται στη γεωγραφική οντότητα 4.

- 5) Μία αίτηση για εξυπηρέτηση γεννάται στη γεωγραφική οντότητα 3

Το άτομο 6 ανήκει στην πρωταρχική περιοχή ευθύνης της μονάδας 2. Δηλαδή η αίτηση για εξυπηρέτηση που γεννήθηκε στο γεωγραφικό άτομο 6 προκαλεί την κατάληψη της μονάδας 2 και την μετάβαση του συστήματος από την κατάσταση $(0,0,0)$ στην κατάσταση $(0,1,0)$. Κατά παρόμοιο τρόπο, επειδή το άτομο 1 ανήκει στην περιοχή ευθύνης της μονάδας 1, η γέννηση ανάγκης για εξυπηρέτηση από το άτομο αυτό, προκαλεί την μετάβαση από την κατάσταση $(0,1,0)$ στην κατάσταση $(0,1,1)$. Κατόπιν, η μονάδα 2 ολοκληρώνει την αποστολή της και γίνεται πάλι διαθέσιμη, οπότε το σύστημα μεταβαίνει στην κατάσταση $(0,0,1)$. Ύστερα νέα αίτηση για εξυπηρέτηση προκύπτει από το άτομο 4 το οποίο ανήκει στην περιοχή ευθύνης της μονάδας 1, αλλά επειδή η μονάδα 1 είναι ακόμα κατειλημμένη δεν μπορεί να αποσταλεί. Η πρώτη απωπληρωματική μονάδα, η μονάδα 3 είναι διαθέσιμη και αποστέλλεται στο συμβάν προκαλώντας μία αποστολή of interresponse area. Το σύστημα μεταπίπτει με τον τρόπο αυτό από την κατάσταση $(0,0,1)$ στην κατάσταση $(1,0,1)$. Στο τέλος μία αίτηση γεννάται στο άτομο 3, και επειδή η μονάδα 2 είναι πλέον διαθέσιμη αποστέλλεται προς εξυπηρέτηση οπότε το σύστημα μεταπίπτει από την κατάσταση $(1,0,1)$ στην κατάσταση κορεσμού $(1,1,1)$. Κάθε νέα αίτηση για εξυπηρέτηση που θα αφιχθεί ενώ και οι τρεις μονάδες είναι κατειλημμένες θα εισαχθεί σε ουρά αναμονής.

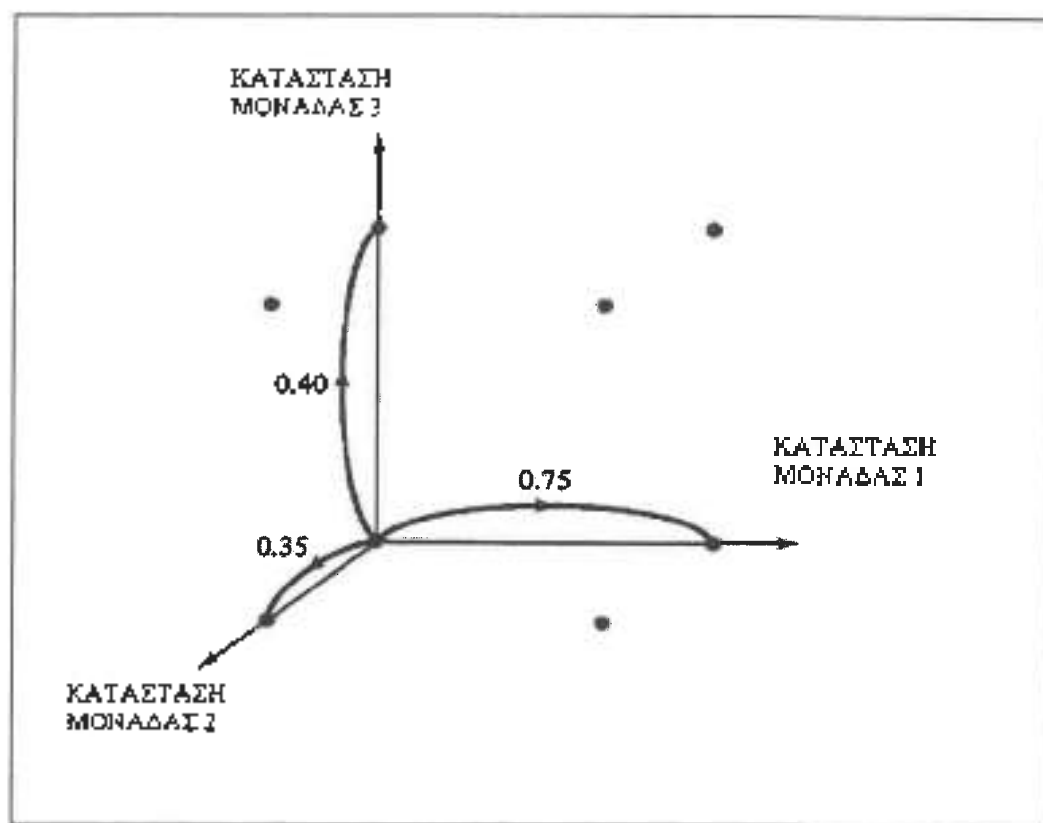
Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω το σύστημά θα μεταβεί από την κατάσταση $(0,0,0)$ στην κατάσταση $(1,1,1)$ με τα ακόλουθα μοναδιαία βήματα:

$(0,0,0)$
 $(0,1,0)$
 $(0,1,1)$
 $(0,0,1)$
 $(1,0,1)$
 $(1,1,1)$

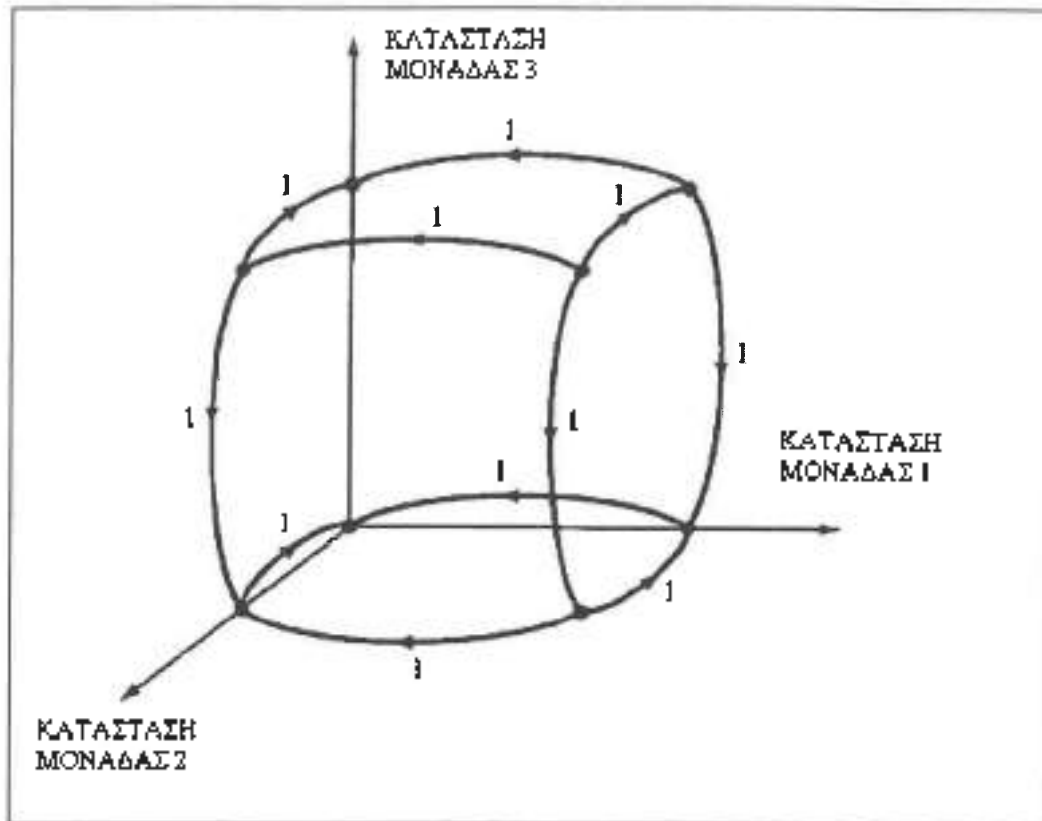


Σχήμα 5.7 Απεικόνιση των διαδοχικών μεταβάσεων του συστήματος για τα γεγονότα 1-5

Ρυθμοί Μετάβασης στο Υπερκυβικό Πρότυπο: Στο σημείο αυτό θα συνδεθούν οι ρυθμοί αφίξεων και οι ρυθμοί εξυπηρέτησεων με τις πιθανές καταστάσεις και θα προσδιοριστεί η αλληλουχία τους στο υπερκυβικό πρότυπο λαμβάνοντας υπόψη το σχήμα 5.6 και υποθέτοντας ότι το σύστημα βρίσκεται στην αρχική κατάσταση $(0,0,0)$. Ο ρυθμός άφιξης αιτήσεων ανά μέσο χρόνο εξυπηρέτησης μονάδας είναι 0,75 για την περιοχή ευθύνης της μονάδας 1, 0,35 για την περιοχή της μονάδας 2 και 0,40 για αυτήν της μονάδας 3. Τότε για την μετάβαση από την κατάσταση $(0,0,0)$ στην κατάσταση $(0,0,1)$ ο ρυθμός μετάβασης ισούται με 0,75 αιτήσεις ανά μέσο χρόνο εξυπηρέτησης μονάδας. Κατά παρόμοιο τρόπο ο ρυθμός μετάβασης από την κατάσταση $(0,0,0)$ στην κατάσταση $(0,1,0)$ είναι ίσος με 0,35 αιτήσεις ανά μέσο χρόνο εξυπηρέτησης μονάδας, ενώ από την αρχική κατάσταση στην κατάσταση $(1,0,0)$ είναι ίσος με 0,40 ανά μέσο χρόνο εξυπηρέτησης μονάδας. Οι παραπάνω μοναδιαίου βήματος μεταβάσεις του συστήματος μπορούν να σχεδιαστούν στον κύβο όπως φαίνεται στο σχήμα 5.8. Με τον ίδιο τρόπο ο ρυθμός μετάπτωσης από οποιαδήποτε κατάσταση του συστήματος σε κάποια γειτονική της έχουσα κατεωλημένη μία μονάδα λιγότερη είναι ίσος με 1 ανά μέσο χρόνο εξυπηρέτησης μονάδας. Οι μεταπτώσεις αυτές παριστάνονται στο σχήμα 5.9.



Σχήμα 5.8 Κυβικοί Μετάβασες με αφετηρία την Αρχική Κατάσταση 000



Σχήμα 5.9 Ρυθμοί Μετάπτωσης αντιστοιχούν στην ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης

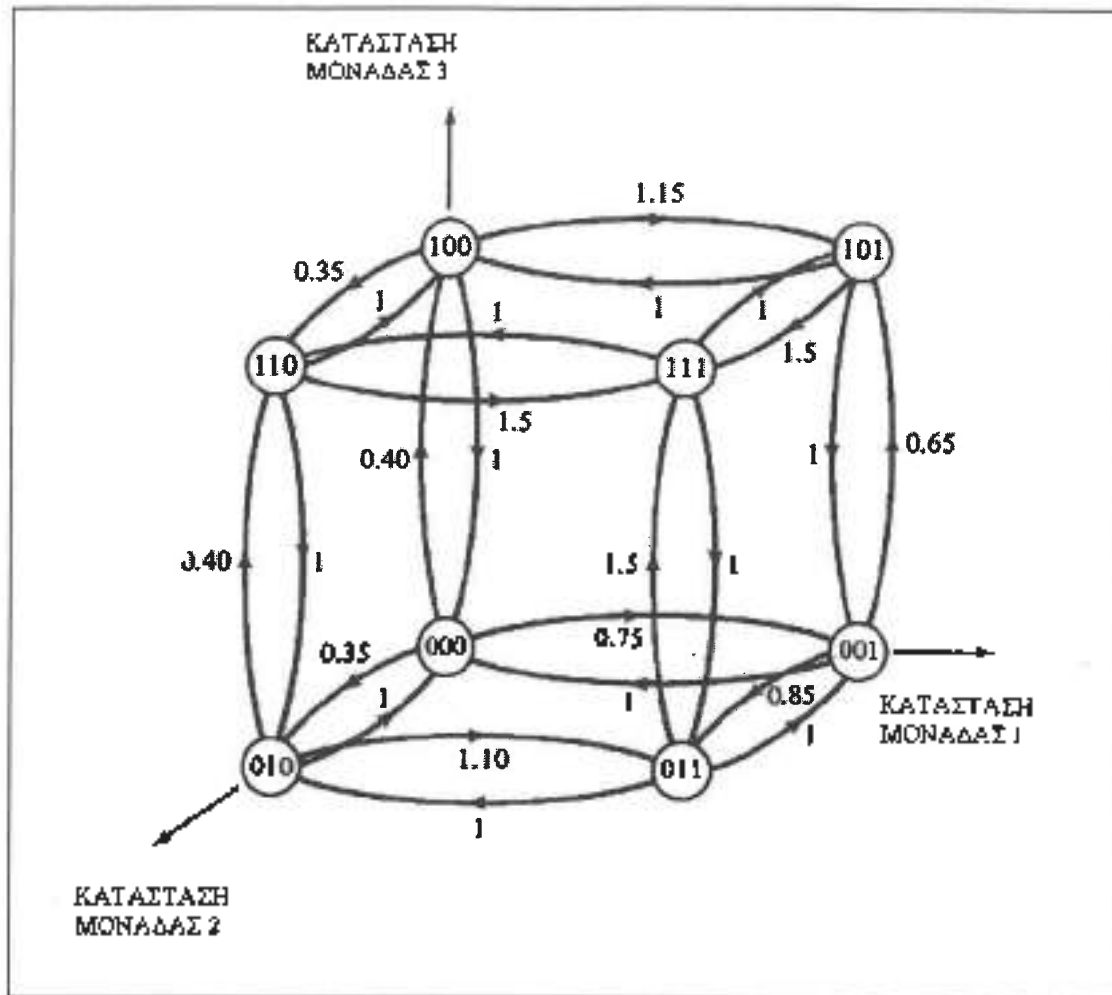
Δείχθηκε ως τώρα πώς αλλάζουν οι ρυθμοί μετάβασης από την αρχική κατάσταση $(0,0,0)$ καθώς επίσης και οι ρυθμοί μετάπτωσης που αντιστοιχούν στην ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης. Για ευκολία οι μεταβάσεις του συστήματος που αντιστοιχούν σε ολοκλήρωση εξυπηρέτησης καλούνται καθοδικές μεταβάσεις ή μεταπτώσεις, υποδεικνύοντας ότι ο συνολικός αριθμός των κατεύλημμένων μονάδων εξυπηρέτησης μειώνεται κατά ένα. Αντίθετα οι μεταβάσεις που έχουν ως αποτέλεσμα την αποστολή μίας μονάδας εξυπηρέτησης στο σημείο γέννησης της αίτησης, καλούνται ανοδικές μεταβάσεις επειδή ακριβώς ο συνολικός αριθμός των απασχολημένων μονάδων αυξάνεται κατά ένα. Μέχρι τώρα δεν έχουν καθοριστεί οι πιο πολλές ανοδικές μεταβάσεις. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι ρυθμοί των ανοδικών μεταβάσεων εξαρτώνται εν πολλοίς από την ακολουθούμενη πολιτική αποστολής των μονάδων, και αυτό περιπλέκει τον καθορισμό των τιμών τους.

Ένα ευρύτερο σύνολο ανοδικών μεταβάσεων είναι ιδιαίτερα εύκολο να προσδιοριστεί. Αφού όλες οι αιτήσεις για εξυπηρέτηση

καταφθάνουν άμεσα , χωρίς καθυστερήσεις λόγω σιράς αναμονής, εφόσον μία τουλάχιστον μονάδα ανταπόκρισης είναι διαθέσιμη ,όλες οι καταστάσεις του συστήματος που διαφοροποιούνται από την κατάσταση κορεσμού κατά ένα μοναδιαίο βήμα, δηλαδή οι καταστάσεις (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), πρέπει να έχουν ρυθμό ανοδικής μετάβασης ίσο με το συνολικό ρυθμό άφιξης του συστήματος $\lambda (= 1,5$ στο παράδειγμά). Με τον τρόπο αυτό όλες οι ανοδικές μεταβάσεις που καταλήγουν στην κατάσταση (1,1,1) πρέπει να έχουν ρυθμό ίσο με 1,5.

Για να υπολογιστούν οι τιμές των ρυθμών των υπολοίπων ανοδικών μεταβάσεων θεωρείται για παράδειγμα ο ρυθμός μετάβασης από την κατάσταση 001 στην κατάσταση 101. Ο ρυθμός αυτός ισούται με το άθροισμα δύο επιμέρους ρυθμών: το ρυθμό των αιτήσεων που καταφθάνουν άμεσα από την πρωταρχική περιοχή ευθύνης της μονάδας 3, συν τον επιπρόσθετο ρυθμό αιτήσεων που γεννούνται σε άτομο που ανήκει στην περιοχής ευθύνης της μονάδας 1 αλλά παρόλα αυτά διεκπεραιώνονται από τη μονάδα 3 αφού αυτή αποτελεί την πρώτη αναπληρωματική μονάδα ανταπόκρισης για τη συγκεκριμένη γεωγραφική οντότητα. Ο πρώτος ρυθμός άφιξης αιτήσεων είναι ίσος με 0,40 ανά μέσο χρόνο εξυπηρέτησης μονάδας. Ο δεύτερος ρυθμός άφιξης ισούται με τον ρυθμό άφιξης αιτήσεων που προέρχονται από τη γεωγραφική οντότητα 4 (0,25 ανά μέσο χρόνο εξυπηρέτησης μονάδας), αφού η πρώτη αναπληρωματική μονάδα ανταπόκρισης για το άτομο 4, το οποίο ανήκει στην κύρια περιοχή ευθύνης της μονάδας 1, είναι η μονάδα 3. Κατ' αυτό τον τρόπο ο ρυθμός μετάβασης από την κατάσταση 001 στην κατάσταση 100 είναι ίσος με $0,40+0,25=0,65$ αιτήσεις ανά μέσο χρόνο εξυπηρέτησης μονάδας. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται και οι υπόλοιποι ρυθμοί μεταβάσεων.

Το διάγραμμα 5.10 δείχνει το σύνολο των ρυθμών μετάβασης του συστήματος μεταξύ όλων των δυνατών καταστάσεων εκτός κορεσμού.



Σχήμα 5.10 Διάγραμμα όλων των δυνατών μεταβάσεων μεταξύ γειτονικών καταστάσεων εκτός κεντρικού για μία αλυσίδα με τρεις μονάδες εξυπηρέτησης

Εξισώσεις Ισορροπίας Μονίμου Καταστάσεως (Steady-state balance equations) :

Η αθροισμένη πιθανότητα των καταστάσεων B_i που ανήκουν στο ίδιο υπερεπίπεδο πρέπει να ισούται με την πιθανότητα της κατάστασης $S_{w(B)}$ κατά το πρότυπο M/M/N.

Έστω:

P_{ijk} = πιθανότητα μονίμου κατάστασης ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση (i, j, k) , $i, j, k = 0, 1$

$P\{S_i\}$ = πιθανότητα μονίμου κατάστασης ότι το ισοδύναμο M/M/3 σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση S_i .

P_0 = πιθανότητα μονίμου κατάστασης ότι υφίσταται μία ουρά αναμονής θετικού μήκους

Από το πρότυπο M/M/3 θέτουμε $\lambda=1,5$ και $\mu=1$:

$$\begin{aligned} P\{S_0\} &= [1 + 1,5 + (1,5)^2/2 + (1,5)^3/6 + (1,5)^3/6 * 1/2 * 1/(1 - 1/2)]^{-1} = \\ &= (16/16 + 24/16 + 18/16 + 9/16 + 9/16)^{-1} = 16/76 \\ &= 4/19 \\ &\approx 0,2105 \end{aligned}$$

$$P\{S_1\} = 1,5^1/(1!) * P\{S_0\} = 6/19 \approx 0,31579$$

$$\begin{aligned} P\{S_2\} &= 1,5^2/(2!) * P\{S_0\} = 1,125 * P\{S_0\} = 9/38 \\ &= 0,23684 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{S_3\} &= 1,5^3/(3!) * P\{S_0\} = 0,5625 * P\{S_0\} = 9/76 = \\ &= 0,11842 \end{aligned}$$

$$P_0 = \sum_{i=0}^{\infty} P\{S_i\} = 9/16 * P\{S_0\} \approx 0,11842$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα είναι δυνατό να εξαχθούν οι ιδιότητες ισορροπίας του κυβικού προτύπου για τις καταστάσεις εκείνες που δεν υφίσταται κορεσμός στο σύστημα.

- Κατάσταση πλήρους διαθεσιμότητας μονάδων – Empty state:

$$P_{000} = P\{S_0\} = 4/19 \approx 0,2105$$

- Κατάσταση πλήρους κατάληψης μονάδων – Full state (no queue):

$$P_{111} = P\{S_3\} = 9/76 = 0,11842$$

- **Πρώτο υπερεπίπεδο από την αρχική κατάσταση:**

$$P_{001} + P_{010} + P_{100} = P \{ S_1 \} = 6/19 \approx 0,31579$$

- **Δεύτερο υπερεπίπεδο από την αρχική κατάσταση:**

$$P_{110} + P_{101} + P_{011} = P \{ S_2 \} = 9/38 = 0,23684$$

- **Εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση 001**

$$P_{001} \{ 0,65 + 0,85 + 1 \} = P_{101} * 1 + P_{011} * 1 + P_{000} * 0,75$$

- **Εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση 100**

$$P_{100} \{ 0,35 + 1,15 + 1 \} = P_{110} * 1 + P_{101} * 1 + P_{000} * 0,40$$

- **Εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση 011**

$$P_{011} \{ 1 + 1 + 1,5 \} = P_{010} * 1,10 + P_{001} * 0,85 + P_{111} * 1$$

- **Εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση 101**

$$P_{101} \{ 1 + 1 + 1,5 \} = P_{001} * 0,65 + P_{100} * 1,15 + P_{111} * 1$$

Σχηματίστηκαν δηλαδή 8 εξισώσεις για να υπολογιστούν 8 άγνωστοι : οι καταστάσεις 000,111,001,100,010,110,011,101 του συστήματος.

P_{000}	0,21053
P_{001}	0,13669
P_{010}	0,08863
P_{100}	0,09047
P_{110}	0,05301
P_{101}	0,08894
P_{011}	0,09489
P_{111}	0,11842

5.3 Κριτήρια Λειτουργίας Συστήματος (Απειρη Ικανότητα Ουράς Αναμονής)

Τώρα που είναι γνωστός ο τρόπος ανάκτησης των εξισώσεων μονίμου καταστάσεως του κυβικού πρότυπου είναι ουσικό να εξεταστεί με ποιο τρόπο είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν αυτές οι πιθανότητες για να εξαχθούν τιμές χρήσιμων λειτουργικών χαρακτηριστικών του συστήματος.

Φόρτοι: Ο φόρτος ρ_n , της μονάδας n , που ισούται με το ποσοστό του χρόνου στον οποίο η μονάδα αυτή είναι κατειλημμένη, είναι ίσος με το άθροισμα των πιθανοτήτων μονίμου καταστάσεως που έχουν το αντίστοιχο προς τη μονάδα n ψηφίο ίσο με 1 συν το κλάσμα του χρόνου που υπάρχει ουρά αναμονής. Με τον τρόπο αυτό για το παράδειγμά μας των τριών μονάδων εξυπηρέτησης :

$$\rho_1 = P_{001} + P_{101} + P_{011} + P_{111} + P_Q = 0,5574$$

$$\rho_2 = P_{010} + P_{110} + P_{011} + P_{111} + P_Q = 0,4734$$

$$\rho_3 = P_{100} + P_{110} + P_{101} + P_{111} + P_Q = 0,4693$$

Τα αποτελέσματα αυτά συμβαδίζουν με την απαίτηση ο μέσος φόρτος του συστήματος ρ , να είναι $\rho = \lambda/3\mu = 0,5$. Παρατηρείται ότι η διανομή του φόρτου ανάμεσα στις μονάδες εξυπηρέτησης είχε ως συνέπεια την πιο ομοιόμορφη κατανομή του μεταξύ των μονάδων σε σχέση με τους φόρτους των πρωταρχικών περιοχών ευθύνης. Έτσι εάν κάθε μονάδα εξυπηρετούσε μόνο τους πελάτες εντός της πρωταρχικής περιοχής ευθύνης της οι φόρτοι για κάθε μονάδα θα ήταν: $\rho_1 = 0,75$, $\rho_2 = 0,35$, $\rho_3 = 0,40$. Στην πραγματικότητα είναι πιθανό για κάποια πρωταρχική περιοχή ευθύνης να προκαλεί τη γέννηση περισσότερων αιτήσεων από αυτές που μπορεί να εξυπηρετήσει η αντίστοιχη μονάδα ανταπόκρισης. Η διανομή του φόρτου έρχεται για να αντιμετωπίσει αυτή τη πιθανότητα. (υποθέτοντας βέβαια ότι ολόκληρο το σύστημα δεν είναι κορεσμένο ή διαφορετικά απαιτώντας το άθροισμα των λ να είναι μικρότερο από 3) .

Συχνότητες Αποστολής Μεταξύ Ατόμων: Είναι απαραίτητο να υπολογιστεί το:

$$f_{nj} = \text{ποσοστό όλων των αποστολών που οδηγούν τη μονάδα } n \text{ στο γεωγραφικό άτομο } j.$$

Έστω:

$E_{n,j}$ = σύνολο όλων των καταστάσεων στις οποίες η μονάδα n αποστέλλεται προς εξυπηρέτηση οποιασδήποτε αίτησης προερχόμενης από το άτομο j .

Για παράδειγμα είναι $E_{21}=\{001,101\}$, $E_{11}=\{000,010,100,110\}$. Εάν το σύστημα βρίσκεται σε οποιαδήποτε κατάσταση του συνόλου $E_{n,j}$, τότε το ποσοστό των αιτήσεων που οδηγούν στην αποστολή της μονάδας n στο γεωγραφικό άτομο j είναι λ_j/λ . Έτσι αποκλείοντας τις καθυστερήσεις λόγω ουράς αναμονής, το ποσοστό όλων των αποστολών που οδηγούν τη μονάδα n στο άτομο j είναι λ_j/λ πολλαπλασιασμένο με το άθροισμα των πιθανοτήτων των καταστάσεων στο σύνολο $E_{n,j}$. Εντούτοις, η μονάδα n μπορεί να αποσταλεί στο άτομο j εγκαταλείποντας μια ουρά αναμονής την οποία εξυπηρετεί. Για αυτό το λόγο:

$$f_{nj} = f_{nj}^{(1)} + f_{nj}^{(2)}$$

όπου $f_{nj}^{(1)}$ =ποσοστό όλων των αποστολών που οδηγούν τη μονάδα n στο άτομο j και υποθέτουν καμία καθυστέρηση λόγω ουράς αναμονής.

$f_{nj}^{(2)}$ = ποσοστό όλων των αποστολών που οδηγούν τη μονάδα n στο άτομο j και υποθέτουν καθυστέρηση λόγω ουράς αναμονής.

Όπως δείξαμε πιο πάνω σε μη κορεσμένες καταστάσεις:

$$f_{nj}^{(1)} = \lambda_j/\lambda * \sum_{B_i \in E_{nj}} P_{B_i}$$

Ο όρος $f_{nj}^{(2)}$ είναι ίσος με το γινόμενο τριών όρων: 1.της πιθανότητας μία τυχαίως αφικνούμενη αίτηση να συναντά καθυστέρηση λόγω ουράς, 2. της δεσμευμένης πιθανότητας η αίτηση να γεννάται στο άτομο j , υπό τον όρο ότι θα προκύψει καθυστέρηση λόγω ουράς αναμονής, 3.της δεσμευμένης πιθανότητας η αίτηση να οδηγεί στην αποστολή της μονάδας n , υπό τον όρο ότι θα προέλθει από το άτομο j και ότι θα προκύψει καθυστέρηση λόγω ουράς αναμονής. Ξεκάθαρα, καθυστέρηση λόγω ουράς αναμονής θα προκύψει όταν γεννηθεί μία αίτηση για εξυπηρέτηση και ταυτόχρονα όλες οι μονάδες ανταπόκρισης, N το πλήθος, θα είναι κατειλημμένες. Έτσι ο πρώτος όρος είναι:

$$P'Q = P_Q + P_{B2}^N$$

Ο δεύτερος όρος είναι ίσος με το ποσοστό των κλήσεων (λ_j/λ) που προέρχονται από το άτομο j . Δεν εξαρτάται από το γεγονός ότι υφίσταται

ουρά αναμονής. Για να αποκτηθεί ο τρίτος όρος χρησιμοποιείται το γεγονός ότι οι κλήσεις που σχηματίζουν την ουρά αναμονής διακπεραιώνονται από τον νόμο προτεραιότητας εξυπηρέτησης FCFS – ο αφικνούμενος πρώτος εξυπηρετείται πρώτος- ή από κάποιον άλλο νόμο που αγνοεί την τοποθεσία γέννησης της κλήσης και την θέση της μονάδας ανταπόκρισης. Με τον τρόπο αυτό όλες οι N κατειλημμένες μονάδες ανταπόκρισης έχουν την ίδια πιθανότητα αποστολής σε κάποια κλήση ουράς αναμονής, πράγμα που οδηγεί στη δεσμευμένη πιθανότητα με τιμή $1/N$. Συνοψίζοντας τα παραπάνω:

$$f_{nj}^{(2)} = \lambda_j * P'_Q / \lambda * N$$

και έτσι :

$$f_{nj} = \lambda_j / \lambda * \sum_{B_i \in E_{nj}} P_{Bi} + \lambda_j * P'_Q / \lambda * N$$

Δεδομένου ότι είναι γνωστό πώς να υπολογιστούν οι όροι f_{nj} από τις πιθανότητες μονίμου καταστάσεως, είναι δυνατό να αποκτηθούν άμεσα αρκετά από τα κριτήρια λειτουργίας του συστήματος που ενδιαφέρουν περισσότερο:

1. ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΕΚΧΩΡΟΥΜΕΝΩΝ ΑΙΤΗΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΔΙΑ ΣΥΝΕΡΓΑΖΟΜΕΝΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ

(Fraction of dispatches that are interresponse area):

$$f_I = \sum_{n=1}^N \sum_{j \notin \text{response area } n} f_{nj}$$

2. ΠΟΣΟΣΤΟ ΑΙΤΗΣΕΩΝ ΕΚΧΩΡΟΥΜΕΝΩΝ ΣΤΗ ΜΟΝΑΔΑ Ν ΟΦΕΛΑΟΜΕΝΕΣ ΣΤΗ ΔΙΑ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ

(Fraction of dispatches of unit n that are interresponse area):

$$f_{In} = \frac{\sum_{j \notin \text{response area } n} f_{nj}}{N_A \sum_{j=1} f_{nj}}$$

3. ΠΟΣΟΣΤΟ ΤΩΝ ΑΙΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΗ ΟΝΤΟΤΗΤΑ i ΚΑΙ ΔΕΣΜΕΥΟΥΝ ΜΟΝΑΔΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΤΗΣ i

Fraction of area i requests that require other than unit i :

$$f'_{in} = \frac{\sum_{n \neq i} \sum_{j \in \text{response area } i} f_{nj}}{\sum_{n=1}^N \sum_{j \in \text{response area } i} f_{nj}}$$

Χρόνοι Μετακίνησης: Ο χρόνος μετακίνησης είναι ένα από πιο σημαντικά κριτήρια λειτουργίας του συστήματος που μπορεί να υπολογιστεί από το κυβικό πρότυπο. Όλοι οι χρόνοι μετακίνησης υπολογίζονται από το μητρώο προέλευσης - προορισμού, κάθε στοιχείο του οποίου t_{ij} συμβολίζει το μέσο χρόνο μετακίνησης από το άτομο i στο άτομο j . Οι αριθμητικές τιμές των στοιχείων του μητρώου ίσως αντανakλούν επιπλοκές στην διαμετακόμιση που προέρχονται από μονοδρομήσεις, απαγορεύσεις στροφών, κυκλοφοριακό κορεσμό που εκτείνεται εκτός των ορών αιχμής, κ.α. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο απαιτούμενος μέσος χρόνος μετακίνησης από το άτομο i στο άτομο j ίσως διαφέρει από τον μέσο χρόνο μετακίνησης από το άτομο j στο άτομο i . Δηλαδή επιτρέπεται $t_{ij} \neq t_{ji}$. Αν δεν είναι δυνατό να αποκτηθεί το μητρώο προέλευσης-προορισμού για την περίοδο που εξετάζεται, τότε προσδιορίζοντας το κέντρο βάρους κάθε ατόμου (x_i, y_i) , υπολογίζεται η ποσότητα $(|x_i - x_j| + |y_i - y_j|)/u$, όπου u είναι η αποτελεσματική ταχύτητα ανταπόκρισης των μονάδων. Στο παράδειγμά των τριών μονάδων εξυπηρέτησης, προς χάριν απλότητας $u=1$ μονάδα απόστασης ανά λεπτό, και χρησιμοποιώντας δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων σχηματίζεται το παρακάτω μητρώο προέλευσης-προορισμού.

Άτομα Προέλευσης	Γεωγραφικά Άτομα Προορισμού									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	3	5	2	5	7	5	5	7	7
2	3	0	2	5	2	4	8	6	10	8
3	5	2	0	7	4	2	10	8	12	10
4	2	5	7	0	3	5	3	3	5	5
5	5	2	4	3	0	2	6	4	8	6
6	7	4	2	5	2	0	8	6	10	8
7	5	8	10	3	6	8	0	2	2	4
8	5	6	8	3	4	6	2	0	4	2
9	7	10	12	5	8	10	2	4	0	2
10	7	8	10	5	6	8	4	2	2	0

Για να υπολογιστούν οι μέσοι χρόνοι μετακίνησης του συστήματος, είναι απαραίτητο να είναι γνωστή η θέση κάθε μονάδας ανταπόκρισης όταν αυτή αποστέλλεται σε μία κλήση. Στο πλαίσιο λειτουργίας του κυβικού πρότυπου, η γεωγραφική απεικόνιση της θέσης μίας μονάδας ανταπόκρισης είναι αρκετά γενική για να διαμορφώσει τις προκαθορισμένες τοποθεσίες των σχημάτων άμεσης βοήθειας (ιατρικής ή τεχνικής φύσεως) καθώς επίσης τις κινούμενες θέσεις των περιπολικών σχημάτων της αστυνομίας. Αυτό εκπληρώνεται προσδιορίζοντας ένα μητρώο θέσεων $L = (l_{nj})$, όπου l_{nj} είναι η πιθανότητα η μονάδα ανταπόκρισης n να βρίσκεται τοποθετημένη στο γεωγραφικό άτομο j κατά το χρονικό διάστημα που είναι διαθέσιμη για αποστολή (ή ισοδύναμα το ποσοστό του χρόνου κατάληψης ή του χρόνου διαθεσιμότητας που η μονάδα ανταπόκρισης n "ξοδεύει" στο γεωγραφικό άτομο j). Γίνεται η απαίτηση το μητρώο L να είναι ένα **στοχαστικά συμπληρωμένο** μητρώο.

$$(\text{για κάθε } n, \sum_{j=1}^{N_A} l_{nj} = 1)$$

Μία μονάδα ανταπόκρισης προκαθορισμένης θέσης θα έχει $l_{nj} = 1$ για μερικά μικρά γεωγραφικά άτομα, και $l_{nk} = 0$ για $k \neq j$. Στην πραγματικότητα εάν κάποιος επιθυμεί να είναι ακριβής με την προκαθορισμένη θέση μίας μονάδας, το άτομο j με $l_{nj} = 1$ μπορεί να προσδιοριστεί ως ένα σημείο της πόλης που έχει μηδενική έκταση και μηδέν φόρτο. Μια κινούμενη μονάδα ανταπόκρισης είναι πιο πιθανό να έχει αρκετά μη μηδενικά ψηφία στο μητρώο $L = (l_{nj})$. Εξαιτίας της δομής αυτής του πρότυπου είναι πολύ φυσικό να επιτρέπεται στις κινούμενες μονάδες ανταπόκρισης να έχουν εν μέρει καλυπτόμενες περιοχές περιπολίας. Για παράδειγμα το άτομο k θα ανήκει στις εν μέρει

καλυπτόμενες περιοχές περιτολίας εάν $I_{n1k} \neq 0$ και $I_{n2k} \neq 0$ για κάποιο n_1 και $n_2 \neq n_1$. Η περιοχή περιτολίας μίας μονάδας n περιλαμβάνει όλα τα άτομα j για τα οποία $I_{nj} > 0$ ενώ η πρωταρχική περιοχή ευθύνης της μονάδας n περιλαμβάνει όλα τα άτομα για τα οποία η μονάδα n είναι η πρώτη επιλογή προς αποστολή μονάδα. Σε συγκεκριμένες εφαρμογές η περιοχή περιτολίας μίας μονάδας ταυτίζεται με την πρωταρχική περιοχή ευθύνης της, σε πολλές όμως περιπτώσεις κάτι τέτοιο δεν ισχύει.

Για να αποκτηθούν τα κριτήρια λειτουργίας σχετικά με τους χρόνους μετακίνησης, είναι απαραίτητο να υπολογιστούν :

t_{nj} = μέσος χρόνος που απαιτείται από τη μονάδα n , όταν είναι διαθέσιμη, για να μετακινηθεί στο γεωγραφικό άτομο j . $n=1,2,\dots,N$, $j=1,2,\dots,N_A$

Εφόσον η μονάδα n θα τοποθετηθεί στο άτομο k με πιθανότητα I_{nk} :

$$t_{nj} = \sum_{k=1}^{N_A} I_{nk} \tau_{kj}$$

Για να συμπεριληφθεί η πιθανότητα αποστολής από ουρά αναμονής ορίζεται το μέσο *queued request travel time*:

$$T_Q = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_A} \lambda_i \lambda_j \tau_{ij} / \lambda^2$$

Για να μεταφραστεί η μαθηματική αυτή έκφραση, ας θεωρηθεί μία τυχαία αίτηση προς εξυπηρέτηση που συναντά καθυστέρηση λόγω ουράς. Η αίτηση αυτή γεννιέται στο γεωγραφικό άτομο j με πιθανότητα λ_j / λ . Κάθε μία από τις κατειλημμένες μονάδες ανταπόκρισης (λόγω ίσου ρυθμού εξυπηρέτησης) έχει τις ίδιες πιθανότητες να αποσταλεί στην κλήση αυτή. Η πιθανότητα η αποσπασμένη μονάδα να προέρχεται από το άτομο i είναι λ_i / λ . Επίσης το ποσοστό του συνολικού φόρτου που προκαλείται από το άτομο i και η εκχώρηση της αποστολής είναι ανεξάρτητα από τις συγκεκριμένες τιμές των i, j . Κατ' αυτόν τον τρόπο με δεσμευμένη πιθανότητα $\lambda_i \lambda_j / \lambda^2$, ο χρόνος μετακίνησης προς μία αίτηση που βρίσκεται σε ουρά αναμονής θα είναι ίσος με το χρόνο μετακίνησης από το άτομο i στο άτομο j . Δηλαδή η προηγούμενη σχέση δίνει το μέσο χρόνο μετακίνησης προς το σημείο γέννησης μίας αίτησης η οποία συναντά καθυστέρηση λόγω ουράς αναμονής.

Η έκφραση για το μη δεσμευμένο μέσο χρόνο μετακίνησης όλης της περιοχής μελέτης μπορεί τώρα να γραφεί:

$$T = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{N_n} f_{nj}^{(1)} t_{nj} + P'_Q T_Q$$

Αν οριστεί :

T_j = μέσος χρόνος μετακίνησης προς το άτομο j
ακολουθώντας ανάλογο σκεπτικό όπως πριν προκύπτει η σχέση:

$$T_j = \frac{\sum_{n=1}^N f_{nj}^{(1)} t_{nj}}{\sum_{n=1}^N f_{nj}^{(1)}} (1 - P'_Q) + \sum_{i=1}^{N_n} (\lambda_i / \lambda_j) \tau_{ij} P'_Q$$

Εάν πρέπει να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος μετακίνησης προς αιτήσεις μίας συγκεκριμένης πρωταρχικής περιοχής ευθύνης ορίζεται:

TRA_n = μέσος χρόνος μετακίνησης για εξυπηρέτηση κλήσεων εντός της πρωταρχικής περιοχής ευθύνης n .

Υποθέτοντας ότι η περιοχή ευθύνης n περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα άτομο j με $\lambda_j \neq 0$:

$$TRA_n = \frac{\sum_{\substack{j \text{ response} \\ \text{area } n}} \sum_{n=1}^N f_{mj}^{(1)} t_{mj}}{\sum_{\substack{j \text{ response} \\ \text{area } n}} \sum_{n=1}^N f_{mj}^{(1)}} (1 - P'_Q) + \frac{\sum_{\substack{k \text{ response} \\ \text{area } n}} \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_k \lambda_j \tau_{jk} / \lambda^2}{\sum_{\substack{k \text{ response} \\ \text{area } n}} \lambda_k / \lambda}$$

Δυστυχώς, δεν είναι γνωστή κάποια ακριβής έκφραση για τον μέσο χρόνο μετακίνησης της μονάδας ανταπόκρισης n , (υποθέτοντας άπειρη ικανότητα ουράς αναμονής). Το πρόβλημα για την διατύπωση μίας τέτοιας έκφρασης πηγάζει από το γεγονός ότι η θέση της μονάδας όταν αυτή αποσταλεί για πρώτη φορά σε μία ακολουθία κλήσεων χωρίς τη δυνατότητα «διαλείμματος», πράγμα που συμβαίνει σε μία περίοδο αιχμής, δεν επιλέγεται από την κατανομή πιθανότητας των τοποθεσιών των κλήσεων λ_j / λ . Μία τέτοια μονάδα αποστέλλεται πιθανότερα στην τρέχουσα κλήση της για εξυπηρέτηση εφόσον είναι διαθέσιμες αρκετές μονάδες και με τον τρόπο αυτό η τοποθεσία της τείνει να προσεγγίζει την

αρχική της θέση ή περιοχή περιπολίας. Σαν μία προσέγγιση υπολογίζεται ο μέσος χρόνος μετακίνησης της μονάδας n με τον παρακάτω τύπο:

$$TU_n = \frac{\sum_{j=1}^{N_A} f_{nj}^{(1)} t_{nj} + (P'_Q T_Q / N)}{\sum_{j=1}^{N_A} f_{nj}^{(1)} t_{nj} + (P'_Q / N)}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναγνωριστεί ότι ο όρος που αντανακλά το χρόνο μετακίνησης προς καθυστερημένες κλήσεις λόγω ουράς αναμονής, είναι υπερεκτιμημένος και μάλιστα γίνεται ασυμπτωτικά πιο ακριβής καθώς ο δείκτης χρησιμοποίησης του συστήματος $\rho = \lambda / N \wedge 1$.

5.5 Προεκτάσεις του βασικού κυβικού πρότυπου.

Ολοκληρώθηκε η περιγραφή της βασικής μορφής του κυβικού πρότυπου αναμονής, χρησιμοποιώντας το παράδειγμα των τριών μονάδων ανταπόκρισης σαν ένα μέσο εξέλιξης της δομής του γενικού πρότυπου. Οι περιορισμοί αυτής της μορφής του πρότυπου που διερευνήθηκαν είναι:

1. Οι μέσοι χρόνοι εξυπηρέτησης, περιλαμβάνουν τον χρόνο μετακίνησης, τον χρόνο στο σημείο γέννησης της αίτησης, τον συσχετισμένο χρόνο εκτός του σημείου αυτού, είναι πανομοιότυποι για όλες τις μονάδες εξυπηρέτησης.
2. Μία ουρά αναμονής των μη εξυπηρετούμενων αιτήσεων επιτρέπεται να σχηματιστεί. Η ουρά αυτή, δυνητικά άπειρου μήκους, εξυπηρετείται με κάποιο νόμο προτεραιότητας των πελατών, για παράδειγμα τον FCFS, ή κάποιον άλλον ο οποίος αγνοεί την θέση προέλευσης της κλήσης, την ταυτότητα της απεσταλμένης μονάδας, και τον προσδοκώμενο χρόνο εξυπηρέτησης.
3. Η διαδικασία της υποστολής μονάδων εξυπηρέτησης βασίζεται σε συγκεκριμένη και προκαθορισμένη αλληλουχία προτιμήσεων χωρίς εμπλοκές.
4. Οι περιοχές ευθύνης δεν καθορίστηκαν μετά από διαδικασία βελτιστοποίησης.

Η αφαίρεση της υπόθεσης των ίσων χρόνων εξυπηρέτησης θέτει μερικά προβλήματα. Αντί όλες οι καθοδικές μεταβάσεις να έχουν ίσο ρυθμό ίσο με μ^1 , στην περίπτωση αυτή κάθε μονάδα ανταπόκρισης θα είχε διαφορετικό ρυθμό καθοδικής μετάβασης ίσο με μ_n . (όπου μ_n θα είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης για τη μονάδα n). Μικρές εμπλοκές προκύπτουν από την διαφοροποίηση αυτή στον υπολογισμό των κριτηρίων λειτουργίας του συστήματος.

Η ικανότητα της ουράς αναμονής του κυβικού πρότυπου, γενικά, μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ 0 και $+\infty$. Ο περιορισμός των διαθέσιμων επιλογών για την εξυπηρέτηση των κλήσεων της ουράς παραμένει ένα εμπόδιο στην απόκτηση ενός πιο ρεαλιστικού νόμου προτεραιότητας βασισμένου σε γεωγραφικά χαρακτηριστικά.

Ο ρυθμός ανυδικής μετάβασης μεταξύ δύο γειτονικών καταστάσεων στο κυβικό πρότυπο πρέπει να αναπαριστά απλές προκαθορισμένες επιλογές αποστολής χωρίς εμπλοκές. Επιτρέποντας τις εμπλοκές αυτές, καθιστούμε το πρότυπο συγκριτικά εύλικρες. Μεγαλύτερου ενδιαφέροντος είναι η γενίκευση σε μη προκαθορισμένης προτίμησης αποστολές. Το μέγιστο πρόβλημα που σχετίζεται με τις

πολιτικές που εξαρτώνται από την κατάσταση του συστήματος, προκύπτει από τη μεγάλη τιμή του αριθμού N στον υπολογισμό των κριτηρίων λειτουργίας του συστήματος και ακόμα την δυσκολία που συναντά κανείς στον υπολογισμό των ρυθμών των ανοδικών μεταβάσεων. Εδώ και μερικά χρόνια οι μαθηματική κοινότητα έχει ασχοληθεί με το θέμα της επίλυσης μίας πολιτικής η οποία πάντοτε να αποστέλλει εκείνη τη μονάδα εξυπηρέτησης που βρίσκεται χρονικά πιο κοντά στο σημείο προέλευσης της κλήσης, ακόμα κι αν υπάρχουν διαθέσιμες μονάδες μη προκαθορισμένης τοποθεσίας. Η πολιτική αυτή απαιτεί την εφαρμογή κάποιων νέων εργαλείων όπως είναι τα συστήματα GPS.

Η διαδικασία βελτιστοποίησης των περιοχών ευθύνης, όπως διατυπώθηκε από τους Chaiken-Carter- Ignall έδωσε το έναυσμα για την διατύπωση μιας γενικευμένης επίλυσης για N το πλήθος μονάδες εξυπηρέτησης, πράγμα που έγινε από τον Jarvis. Η προσέγγιση στηρίζεται στην εξής ιδέα: το τελικό αποτέλεσμα αποτελείται από ένα σύνολο βέλτιστων περιοχών ανταπόκρισης που με τη σειρά τους αντιστοιχούν σε ένα συγκεκριμένο σύνολο παραμέτρων. Ο Jarvis ανακαλύπτει ότι υπάρχει η ίδια έλλειψη επηρεασμού στο μέσο χρόνο μετακίνησης μεταξύ συνόρων ίσου χρόνου μετακίνησης και βέλτιστα οριοθετημένων συνόρων (εξαρτώμενων από την κατάσταση του συστήματος). Εντούτοις η χρησιμότητα της μεθόδου για την εξισορρόπηση των φόρτων ανάμεσα στις μονάδες ανταπόκρισης παραμένει ακόμα υψηλή.

Κατά την εφαρμογή του βασικού πρότυπου του κεφαλαίου τούτου σε ηλεκτρονικό υπολογιστή θα αντιμετωπιστεί αμέσως το ουσιώδες πρόβλημα της αποθηκευτικής ικανότητας αλλά και του χρόνου επίλυσης. Σε ένα πρόβλημα $N=10$ μονάδων εξυπηρέτησης, υπάρχουν $2^{10} = 1.024$ διαφορετικές καταστάσεις, που αντιστοιχούν με τη σειρά τους σε 1.024 ταυτόχρονες γραμμικές εξισώσεις οι οποίες πρέπει να επιλυθούν για να αποκτήσει κάποιος τις πιθανότητες μονίμου καταστάσεως. Η προσθήκη μίας και μόνο μονάδας εξυπηρέτησης διπλασιάζει το μέγεθος των αγνώστων αφού προκαλεί $2^{11} = 2.048$ γραμμικές εξισώσεις. Για $N=15$, $2^{15} = 32.768$ και το πρόβλημα παύει να γίνεται άμεσα επιλύσιμο ακόμα και για τους σύγχρονους Η/Υ. Για παράδειγμα μόνο και μόνο για την αποθήκευση του μητρώου μεταβάσεων απαιτούνται $2^{15} \times 2^{15} = 2^{30} = 1.073.741.824$ στοιχεία αποθήκευσης. Κατ' αυτόν τον τρόπο πολύς χρόνος επενδύθηκε στο πώς χρησιμοποιώντας της ειδική μορφή του πρότυπου θα αντληθούν μέθοδοι συμβατοί με τους Η/Υ για την επίλυση των εξισώσεών του.

6. ΥΠΕΡΚΥΒΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ, (ΑΠΕΙΡΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΟΥΡΑΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ)

Όπως αναφέρθηκε πιο πριν, ο αποθηκευτικός χώρος μαζί με τον απαιτούμενο χρόνο επίλυσης των καταστατικών εξισώσεων σχεδόν διπλασιάζεται με την προσθήκη κάθε επιπλέον μονάδας εξυπηρέτησης. Για τον λόγο αυτό, θα παρουσιάσουμε μία αποτελεσματική προσεγγιστική μέθοδο η οποία υπολογίζει με αποδεκτή ακρίβεια όλα τα κριτήρια λειτουργίας του κυβικού μοντέλου. Μία τέτοια διαδικασία επίλυσης έχει αναπτυχθεί από τον A.Odoni και απαιτεί την ταυτόχρονη επίλυση N καταστατικών εξισώσεων αντί για 2^N όπως στο ακριβές μοντέλο.

Η προσεγγιστική αυτή διαδικασία έχει δειχθεί ότι δίνει αποτελέσματα που παρουσιάζουν απόκλιση 1- 2% από αυτά του ακριβούς μοντέλου. Στις περισσότερες καταστάσεις λειτουργίας μία τέτοιου μεγέθους προσέγγιση είναι επαρκής. Για παράδειγμα οι ανακρίβειες που σχετίζονται με τη συλλογή των απαραίτητων πληροφοριών ίσως δεν δικαιολογούν ένα πιο ακριβές προσεγγιστικό μοντέλο. Υπάρχει ακόμα το ενδεχόμενο ο διοικητής του συστήματος να μην έχει πρόσβαση σε ένα H / Y με τις απαραίτητες τεχνικές προδιαγραφές για την επίλυση του ακριβούς κυβικού μοντέλου. Πολλές φορές άλλοι μη ποσοτικοποιημένοι παράγοντες, που μπορεί να περιλαμβάνουν πολιτικούς, νομικούς, χωροταξικούς ή διοικητικούς περιορισμούς είναι δυνατό να παίξουν ένα σημαντικό ρόλο στο σχεδιασμό του συστήματος και με τον τρόπο αυτό καθιστούν εντελώς μάταια την απόπειρα ακριβούς προσέγγισης των ποσοτικοποιημένων κριτηρίων λειτουργίας του. Τελικά, η διαδικασία προσέγγισης που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια μπορεί να διακπεραιωθεί από έναν οποιονδήποτε σύγχρονο H/Y ανεξάρτητα από το πλήθος N των μονάδων ανταπόκρισης και αυτό το γεγονός είναι που την καθιστά πραγματικά αναντικατάστατη.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δοθεί βάρος στις κεντρικές ιδέες της προσεγγιστικής διαδικασίας. Στις περιπτώσεις πολύπλοκων αστικών συστημάτων εξυπηρέτησης παρόμοιες προσεγγιστικές μέθοδοι αναμένεται να παίξουν ένα ολοένα αυξανόμενο ρόλο στον τομέα της εφαρμογής πρακτικών μοντέλων επιλυμένων με τη βοήθεια H/Y , στη διαδικασία ανάλυσης αποφάσεων αστικών χωροταξικών ζητημάτων.

Παρατίθενται τα βασικά γνωρίσματα της διαδικασίας προσέγγισης:

1. Όπως και στο ακριβές μοντέλο, θεωρείται ότι υπάρχει ήδη μία αριθμημένη λίστα επιλέξιμων μονάδων ανταπόκρισης για κάθε γεωγραφικό άτομο. Ο αύξων αριθμός της κάθε μονάδας αντιστοιχεί στην θέση προτίμησής της από τον συντονιστή

- του συστήματος, ενώ μετά από κάθε κλήση αποστέλλεται πάντα η πιο προτιμώμενη και συνάμα διαθέσιμη μονάδα.
2. Αν με ρ_n συμβολιστεί το ποσοστό του χρόνου στον οποίο η μονάδα n είναι κατειλημμένη, τότε η ποσότητα $(1 - \rho_n)$ αντιστοιχεί στο ποσοστό του χρόνου στον οποίο η μονάδα n είναι διαθέσιμη εφόσον όλες οι πιο προτιμώμενες από αυτήν μονάδες είναι κατειλημμένες. Χρησιμοποιείται επίσης ένας διορθωτικός συντελεστής για να προσομοιαστούν όσο γίνεται καλύτερα οι ακριβείς συνθήκες. Για παράδειγμα, εάν η μονάδα 5 είναι η τρίτη κατά σειρά προτιμώμενη μονάδα για μία συγκεκριμένη κλήση και οι μονάδες 7, 2 είναι η πρώτη και η δεύτερη, η πιθανότητα να αποσταλεί η μονάδα 5 είναι ίση με: $\rho_7 * \rho_2 * (1 - \rho_5) * (\text{συντελ.διόρθ.})$
 3. Ο συντελεστής διόρθωσης, που μπορεί να ιπέχει σημαντικά από την μονάδα, εκφράζει το γεγονός ότι η κατάσταση των μονάδων ανταπόκρισης δεν είναι ανεξάρτητες. Αν αυτό δεν ισχύει, δηλαδή αν η κατάσταση κάθε μονάδας είναι ανεξάρτητη των υπολοίπων, τότε ο συντελεστής διόρθωσης ισούται με 1.
 4. Από τα χαρακτηριστικά των προτάσεων 2, 3 είναι δυνατό να καταστρωθούν N το πλήθος καταστατικές εξισώσεις σχετίζοντας με τον τρόπο αυτό τους N άγνωστους φόρτους με την επιλεγείσα κάθε φορά πολιτική αποστολής και τους ρυθμούς άφιξης των κλήσεων σε κάθε γεωγραφικό άτημο.
 5. Οι N καταστατικές εξισώσεις λύνονται με επαναληπτική διαδικασία, και με τον τρόπο αυτό γίνονται οι εκτιμήσεις του φόρτου κάθε μονάδας.
 6. Αν πρέπει να υπολογιστούν άλλα χαρακτηριστικά κριτήρια λειτουργίας του συστήματος, τότε ο βαθμός χρησιμοποίησης κάθε μονάδας, όπως υπολογίστηκε από το 5^ο βήμα, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ποσοστού των αποστολών που αποστέλλουν την μονάδα n στο άτομο j , για όλα τα n και j . Τα ποσοστά αυτά χρησιμοποιούνται στη συνέχεια σε πλές ισότητες και με τον τρόπο αυτό γίνεται μία εκτίμηση των τιμών των κριτηρίων λειτουργίας που πρέπει να υπολογιστούν.

Η μεθοδολογία της προσεγγιστικής διαδικασίας βασίζεται στην υπόθεση λειτουργίας μοντέλου M/M/N, άπειρης ικανότητας ουράς αναμονής και με μη διαφοροποιημένες (ομογενείς) μονάδες εξυπηρέτησης.

6.1. Συντελεστής Διόρθωσης.

Σε ένα σύστημα αναμονής $M/M/N$ με άπειρη ικανότητα ουράς αναμονής, υποθέστε ότι κάποιος ξεκινάει να επιλέγει τυχαία από το δείγμα των μονάδων εξυπηρέτησης έως ότου βρει την πρώτη διαθέσιμη μονάδα. Έστω:

B_j : το ενδεχόμενο η j -στή επιλεγείσα μονάδα είναι κατειλημμένη

$F_j = B_j^c$: το ενδεχόμενο η j -στή επιλεγείσα μονάδα είναι διαθέσιμη

$P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} \}$ = η πιθανότητα του ενδεχομένου: η πρώτη διαθέσιμη μονάδα είναι η $(j+1)$ -στή επιλεγείσα.

S_k : η κατάσταση του συστήματος στην οποία επιχειρούν k ακριβώς μονάδες.

$P \{ S_k \}$: η πιθανότητα μόνιμου καταστάσεως ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση S_k .

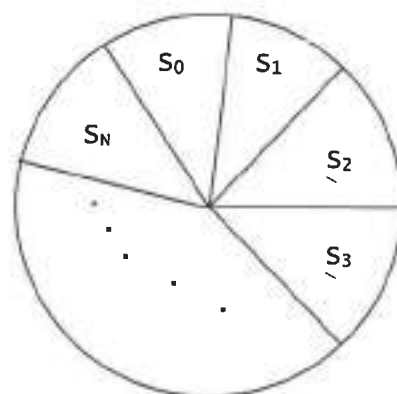
N μονάδες εξυπηρέτησης:

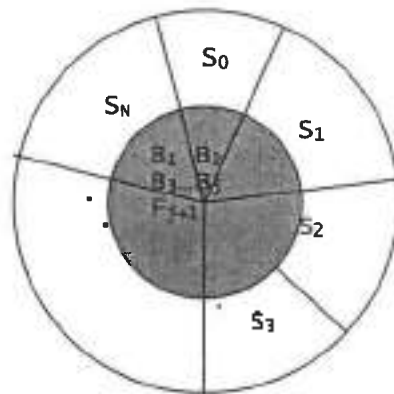
$$P \{ S_0 \} \cap P \{ S_1 \} \cap \dots \cap P \{ S_N \} = 0$$

$$P \{ S_{k-1} \} \cap P \{ S_k \} = 0 \quad k=1,2,\dots,N$$

$$P \{ S_0 \} \cup P \{ S_1 \} \cup \dots \cup P \{ S_N \} = 1$$

$$P \{ S_0 \} + P \{ S_1 \} + \dots + P \{ S_N \} = 1$$





Στην περίπτωση του συστήματος M/M/N τα γεγονότα $S_0, S_1, \dots, S_N$ είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους. Το γεγονός $B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1}$ μπορεί να συμβαίνει ταυτόχρονα με καθένα από τα $S_0, S_1, S_2, \dots, S_N$.

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$\begin{aligned}
 P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} \} &= P \{ S_0 \} P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} / S_0 \} + \\
 &\quad P \{ S_1 \} P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} / S_1 \} + \\
 &\quad P \{ S_2 \} P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} / S_2 \} + \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad P \{ S_N \} P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} / S_N \}
 \end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} \} = \sum_{k=0}^N P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} / S_k \} P \{ S_k \}$$

Εππλέον:

$$P \{ F_{j+1} / B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k \} = \frac{P \{ F_{j+1} B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k \}}{P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k \}}$$

$$P \{ B_j / B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k \} = \frac{P \{ B_j B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k \}}{P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k \}}$$

$$P \{ B_{j+1} / B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-2} S_k \} = \frac{P \{ B_{j+1} B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-2} S_k \}}{P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-2} S_k \}}$$

·
·
·

$$P \{ B_2 / B_1 S_k \} = \frac{P \{ B_2 B_1 S_k \}}{P \{ B_1 S_k \}}$$

$$P \{ B_1 / S_k \} = \frac{P \{ B_1 S_k \}}{P \{ S_k \}}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω (j+1) το πλήθος ισότητες:

$$P \{ F_{j+1} / B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k \} * P \{ B_j / B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k \} * P \{ B_{j-1} / B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-2} S_k \} * \\ \dots * P \{ B_2 / B_1 S_k \} * P \{ B_1 / S_k \} =$$

$$\frac{P \{ F_{j+1} B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k \}}{P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k \}} \frac{P \{ B_j B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k \}}{P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k \}} \frac{P \{ B_{j-1} B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-2} S_k \}}{P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-2} S_k \}} \\ \dots \frac{P \{ B_2 B_1 S_k \}}{P \{ B_1 S_k \}} \frac{P \{ B_1 S_k \}}{P \{ S_k \}}$$

$$= P \{ F_{j+1} B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k \} / P \{ S_k \} = P \{ F_{j+1} B_1 B_2 B_3 \dots B_j / S_k \}$$

Δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$P \{ F_{j+1} B_1 B_2 B_3 \dots B_j / S_k \} = P \{ F_{j+1} / B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k \} * \\ P \{ B_j / B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k \} * \\ P \{ B_{j-1} / B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-2} S_k \} * \dots * \\ P \{ B_1 S_k \} \quad (6.1)$$

Θα αναζητηθούν αναλυτικές εκφράσεις για κάθε όρο του άνω γινομένου έχοντας κατά νου ότι η διαδικασία επιλογής μονάδας ανταπόκρισης είναι μία διαδικασία αυστηρά τυχαίας επιλογής χωρίς επανατοποθέτηση. Σαν αποτέλεσμα αυτού, οι μονάδες εξυπηρέτησης επιλέγονται με «κλειστά τα μάτια».

$$P \{ B_j / B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k \}, \quad j=1,2,\dots,k+1$$

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$P \{ B_j / B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k \} = P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} B_j S_k \} / P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k \} \\ = P \{ A \} / P \{ B \}$$

$$A = B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} B_j S_k$$

A : το ενδεχόμενο να κληθούν διαδοχικά j το πλήθος μονάδες και να είναι όλες απασχολημένες καθώς στο σύστημα επιχειρούν k μονάδες από τις N συνολικά μονάδες.

		Επιλέγω:
Σύνολο Μονάδων	N	
Μη Διαθέσιμοι	k	j
Διαθέσιμοι	$N-k$	0

Γεωμετρική Κατανομή: Έστω ότι υπάρχει ένα κουτί που περιέχει $N-k$ διαθέσιμες μονάδες και k διαθέσιμες. Έτσι αν εξαχθεί μία μονάδα χωρίς να επανατοποθετηθεί και στη συνέχεια εξαχθεί μία δεύτερη μονάδα, η κατάσταση στην οποία βρίσκεται η πρώτη μονάδα επηρεάζει την πιθανότητα που έχουν οι δύο καταστάσεις να εμφανιστούν στη δεύτερη μονάδα. Για παράδειγμα αν η πρώτη μονάδα είναι διαθέσιμη (η πιθανότητα για αυτό είναι ίση με $(N-k) / N$), η πιθανότητα να είναι διαθέσιμη και η δεύτερη μονάδα είναι $(N-k-1) / (N-1)$. Βεβαίως αν η εξαγωγή γινόταν με επανατοποθέτηση, δηλαδή κάθε φορά που εξάγεται μία μονάδα γινόταν επανατοποθέτησή της πριν εξαχθεί η επόμενη, τότε θα υπήρχε η περίπτωση της διωνυμικής κατανομής.

Αν από το κουτί εξαχθεί κάποιο πλήθος μονάδων χωρίς επανατοποθέτηση, η πιθανότητα να εμφανιστούν 0 διαθέσιμες και j μη διαθέσιμες είναι:

$$P \{ A \} = \frac{\binom{N-k}{0} \binom{k}{j}}{\binom{N-k+k}{j}} = \frac{\binom{k}{j}}{\binom{N}{j}} = \frac{\frac{k!}{j! (k-j)!}}{\frac{N!}{j! (N-j)!}} = \frac{k! j! (N-j)!}{N! j! (k-j)!}$$

$$B = B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k$$

B : το ενδεχόμενο να κληθούν διαδοχικά $j-1$ το πλήθος μονάδες και να είναι όλες απασχολημένες καθώς στο σύστημα επιχειρούν k μονάδες από τις N συνολικά μονάδες.

		Επιλέγω:
Σύνολο Μονάδων	N	
Μη Διαθέσιμοι	k	$j-1$
Διαθέσιμοι	$N-k$	0

$$P\{B\} = \frac{\binom{N-k}{0} \binom{k}{j-1}}{\binom{N-k+k}{j-1}} = \frac{\binom{k}{j-1}}{\binom{N}{j-1}} = \frac{\frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!}}{\frac{N!}{(j-1)!(N-j+1)!}} = \frac{k! (j-1)! (N-j+1)!}{N! (j-1)! (k-j+1)!}$$

$$\text{Άρα : } P\{B_j / B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k\} = P\{A\} / P\{B\}$$

$$= \frac{\frac{k! j! (N-j)!}{N! j! (k-j)!}}{\frac{k! (j-1)! (N-j+1)!}{N! (j-1)! (k-j+1)!}} = \frac{k! j! (N-j)! N! (j-1)! (k-j+1)!}{N! j! (k-j)! k! (j-1)! (N-j+1)!} = \frac{k-j+1}{N-j+1}$$

$$, j=1, 2, \dots, k+1 \quad (6.2)$$

$$\bullet \quad P\{F_{j+1} / B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k\} \quad j=0, 1, \dots, k$$

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$P\{F_{j+1} / B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k\} = P\{B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} S_k\} / P\{B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k\} \\ = P\{\Gamma\} / P\{A\}$$

$$\text{Όπου } P\{A\} = P\{B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k\} = \frac{k! (N-j)!}{N! (k-j)!}, \quad j=1, 2, \dots, k+1$$

$$\Gamma = B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} S_k$$

Γ : το ενδεχόμενο να κληθούν διαδοχικά j το πλήθος μη διαθέσιμες μονάδες και 1 διαθέσιμη μονάδα καθώς στο σύστημα επιχειρούν k μονάδες από τις N συνολικά μονάδες.

		Επιλογή:
Σύνολο Μονάδων	N	
Μη Διαθέσιμοι	k	j
Διαθέσιμοι	$N-k$	1

$$P\{\Gamma\} = \frac{\binom{N-k}{1} \binom{k}{j}}{\binom{N-k+k}{1+j}} = \frac{\binom{N-k}{1} \binom{k}{j}}{\binom{N}{1+j}} = \frac{\frac{(N-k)!}{1! (N-k-1)!} \cdot \frac{k!}{j! (k-j)!}}{\frac{N!}{(1+j)! (N-j-1)!}}$$

$$= \frac{(N-k)! k! (1+j)! (N-j-1)!}{(N-k-1)! N! j! (k-j)!}$$

$$\text{Άρα : } P\{F_{j+1}/B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k\} = P\{\Gamma\} / P\{A\}$$

$$= \frac{\frac{(N-k)! k! (1+j)! (N-j-1)!}{(N-k-1)! N! j! (k-j)!}}{\frac{k! (N-j)!}{N! (k-j)!}} = \frac{(N-k)! k! (1+j)! (N-j-1)! N! (k-j)!}{(N-k-1)! N! j! (k-j)! k! (N-j)!}$$

$$= \frac{(N-k) (1+j)}{(N-j)}, \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (6.3)$$

Από τις σχέσεις (6.1),(6.2),(6.3) :

$$P\{B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1}\} = \sum_{k=0}^N P\{B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} / S_k\} P\{S_k\}$$

$$= \sum_{k=0}^N [P\{F_{j+1} / B_1 B_2 B_3 \dots B_j S_k\} * P\{B_j / B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} S_k\} *$$

$$P\{B_{j-1}/B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-2} S_k\} * \dots * P\{B_2/B_1 S_k\} * P\{B_1/S_k\} * P\{S_k\}$$

$$= \sum_{k=0}^N \left[\frac{(N-k)(1+j)}{(N-j)} \frac{(k-(j-1))}{(N-(j-1))} \dots \frac{(k)}{(N)} \right] * P\{S_k\}$$

(k+1) το πλήθος

Από Θεωρία Αναμονής :

N μονάδες εξυπηρέτησης, $k = 0, 1, 2, \dots, N$

$$P\{S_k\} = \left[\sum_{k=0}^{N+1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{(N+1)}}{(N+1)!} \frac{\rho}{N} \frac{1}{(1-\rho/N)} \right]$$

Μελετώντας τη συμπεριφορά της συνάρτησης $P\{B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1}\}$ προκύπτουν μερικά πολύ ενδιαφέροντα συμπεράσματα. *Ανεξάρτητα από τον αριθμό των συνολικά διατιθέμενων από την υπηρεσία μονάδων παροχής εξυπηρέτησης N, η πιθανότητα προσφυγής σε λιγότερο προτιμητέες μονάδες ενώ είναι γνησίως αύξουσα όσο το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση χαμηλού βαθμού χρησιμοποίησης, $\rho < \rho_{j,N} \max$ γίνεται εντούτοις φθίνουσα καθώς ο συνολικός φόρτος τείνει προς τη μονάδα καθώς δηλαδή το σύστημα αναμονής πλησιάζει στην κατάσταση κορεσμού, $\rho > \rho_{j,N} \max$. (Παράρτημα 1-Πίνακες 1-40) Ο βαθμός χρησιμοποίησης του συστήματος $\rho_{j,N} \max$ που οριοθετεί τη συμπεριφορά της συνάρτησης $P\{B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1}\}$ ως προς τη μονοτονία παρουσιάζει μία «σταθερότητα» συναρτήσει του j.*

Το σύστημα έχει αποκτήσει μία έμφυτη πλέον αντίσταση έναντι του ενδεχόμενου δημιουργίας κατάστασης κορεσμού και η αντίσταση αυτή οφείλεται στην δυνατότητα εξάντλησης όλων των διατιθέμενων πόρων σε κάθε περίπτωση λειτουργίας, ανεξάρτητα από το σημείο γέννησης της κλήσης, τη θέση της διαθέσιμης μονάδας, και το βαθμό χρησιμοποίησης ρ (εφόσον $\rho < 1$).

Η επιπλέον αντίσταση ενός παρόμοιου συστήματος είναι το χαρακτηριστικό εκείνο που του δίνει προβάδισμα για τη μελέτη ή την

αναμόρφωση συστημάτων παροχής εξυπηρέτησης εκτάκτων αναγκών με εφαρμογή τόσο στο μονοδιάστατο (π.χ. οδικό τμήμα) όσο και στο δισδιάστατο χώρο.(π.χ. αστική περιοχή)

Η πιθανότητα $P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} \}$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα του ενδεχομένου να αποσταλεί για την εξυπηρέτηση μίας κλήσης μία συγκεκριμένη μονάδα, και μάλιστα η $(j+1)$ -στή πιο προτιμητέα. Αν η n -στή επιλεγείσαι μονάδα, η οποία θα συμβολιστεί με s_n , είναι κατευλημμένη ένα ποσοστό του χρόνου ρ_{s_n} τότε μία αφελής προσέγγιση θα ήταν να υποθεθεί ότι όλες οι μονάδες επιχειρούν χωρίς καμία αλληλοεξάρτηση. Στην περίπτωση αυτή:

$$P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} \} = \rho_{s_1} \rho_{s_2} \rho_{s_3} \dots \rho_{s_j} (1 - \rho_{s_{j+1}}) \quad j < N$$

$$\text{ή } P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_N \} = \prod_{i=1}^N \rho_{s_i}$$

Διαπιστώνεται όμως ότι η υπόθεση αυτή δεν είναι σωστή αφού η $P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_N \}$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα του συστήματος M/M/N να είναι κορεσμένο δηλαδή στην πιθανότητα να είναι όλες οι μονάδες ανταπόκρισης ταυτόχρονα κατευλημμένες. Μπορεί να δείχθει ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού δεν ισούται με το γινόμενο των βαθμών χρησιμοποίησης.

Αν γραφεί:

$$P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} \} = P \{ F_{j+1} | B_1 B_2 B_3 \dots B_j \} P \{ B_j | B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} \} \dots P \{ B_1 \}$$

και πολλαπλασιαστεί ο αριθμητής και ο παρονομαστής του δευτέρου μέλους με $\rho^j (1 - \rho)$:

$$P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} \} = \frac{[P \{ F_{j+1} | B_1 B_2 B_3 \dots B_j \}]}{1 - \rho} \frac{[P \{ B_j | B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} \}]}{\rho} \dots \frac{[P \{ B_1 \}]}{\rho} \rho^j (1 - \rho)$$

Αν τεθεί:

$$Q(N, \rho, j) = \frac{[P \{ F_{j+1} | B_1 B_2 B_3 \dots B_j \}]}{1 - \rho} \frac{[P \{ B_j | B_1 B_2 B_3 \dots B_{j-1} \}]}{\rho} \dots \frac{[P \{ B_1 \}]}{\rho}$$

τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} \} = Q(N, \rho, j) \rho^j (1 - \rho) \implies$$

$$Q(N, \rho, j) = P \{ B_1 B_2 B_3 \dots B_j F_{j+1} \} / (\rho^j (1 - \rho))$$

Ο παράγοντας $Q(N, \rho, j)$ υποδεικνύει τον βαθμό στον οποίο το αποτέλεσμα της θεώρησης ανεξάρτητης λειτουργίας των μονάδων πρέπει να διορθωθεί για να προκύψει σωστό αποτέλεσμα. Κάθε ένας από τους $j+1$ το πλήθος όρους του γινομένου $Q(N, \rho, j)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας ξεχωριστός συντελεστής διόρθωσης που δείχνει πόσο υπερεκτιμάται ή υποεκτιμάται η αντιστοιχούμενη στον όρο αυτό δεσμευμένη πιθανότητα να είναι η μονάδα διαθέσιμη ή κατειλημμένη. Η ακριβής έκφραση για το $Q(N, \rho, j)$ μπορεί να προέλθει αν για κάθε πιθανό αριθμό κατειλημμένων μονάδων ανταπόκρισης σε ένα σύστημα $M/M/N$ γραφτεί η δεσμευμένη πιθανότητα και στη συνέχεια συνδυαστούν τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τους νόμους της δεσμευμένης πιθανότητας.

Ελέγχοντας το αποτέλεσμα στις οριακές περιπτώσεις προκύπτει ότι $Q(N, \rho, 0) = 1$, δηλαδή η πιθανότητα η πρώτη επιλεγείσα μονάδα να είναι διαθέσιμη είναι ακριβώς $1 - \rho$ (ένα αποτέλεσμα σύμφωνο με τη διαίσθησή του αναγνώστη, αφού $\rho = \lambda/N$ είναι το μέσο ποσοστό του χρόνου στον οποίο μία μονάδα είναι κατειλημμένη). Επιπλέον εργασία δίνει $Q(N, \rho, 1) < 1$ πράγμα που υποδεικνύει ότι το γινόμενο $\rho (1 - \rho)$ είναι μία υπερεκτίμηση για τη πιθανότητα $P\{B_1 B_2\}$. Αυτό είναι σωστό διότι η πιθανότητα $P\{F_2 | B_1\}$, δηλαδή ότι η δεύτερη επιλεγείσα μονάδα είναι διαθέσιμη δεδομένου ότι η πρώτη επιλεγείσα μονάδα είναι κατειλημμένη, είναι μικρότερη από $(1 - \rho)$, τιμή που υπολογίστηκε με βάση την αρχή της μη αλληλοεξαρτώμενης κατάστασης λειτουργίας των μονάδων. Εφόσον η πρώτη επιλεγείσα μονάδα είναι κατειλημμένη, οι πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος προσανατολίζονται σε τιμές που αντιστοιχούν σε περισσότερο μη διαθέσιμες καταστάσεις.

Εφόσον :

$$\rho > 1 - 2/N \quad (N \geq 2)$$

τότε η συνάρτηση $Q(N, \rho, j)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτησι του j , διαφορετικά είναι μία συνάρτηση του j , έχοντας ελάχιστο για μία τιμή του j , έστω την τιμή j^0 , και για κάθε άλλη τιμή του $j > j^0$ είναι αύξουσα.

Παρότι ο συντελεστής διόρθωσης $Q(N, \rho, j)$ προήλθε υποθέτοντας ομοιογένεια μεταξύ των μονάδων ανταπόκρισης, μπορεί κάποιος να εικάσει ότι ο ίδιος παράγοντας μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μια προσέγγιση ενός συστήματος $M/M/N$ με διακριτές μονάδες εξυπηρέτησης. Αυτό θα φαινόταν ιδιαίτερα κατάλληλο για συστήματα στα οποία οι φόρτοι των μονάδων δεν διαφέρουν σημαντικά και στα οποία πολλοί διαφορετικοί παράγοντες προτίμησης αποστών

(προκαλούμενοι από τη διασπορά στο χώρο των τοποθεσιών των κλήσεων) προσομοιάζονται αποτελεσματικά από την συνολική «με κλειστά τα μάτια» επιλογή μονάδας εξυπηρέτησης. Εφαρμόζοντας την υπόθεση αυτή τα αριθμητικά αποτελέσματα απέχουν 1 με 2 % από τα αποτελέσματα τις ακριβής κυβικής μεθόδου.

6.2.Εκτίμηση Φόρτου

Η τελευταία υπόθεση οδηγεί στο 4^ο χαρακτηριστικό της προσεγγιστικής διαδικασίας, βάσει του οποίου θα αποκτηθεί ένα σύνολο από N το πλήθος εξισώσεις που θα σχετίζουν τις N άγνωστες ρ_n με την επιλεγείσα πολιτική αποστολής και τους ρυθμούς άφιξης κλήσεων από κάθε γεωγραφικό άτομο. Έστω ότι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ισούται πάλι με τη μονάδα, (δηλαδή ισχύει $\mu^{-1}=1$) και έτσι η μονάδα μέτρησης του χρόνου ισούται με τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης κάθε μονάδας ανταπόκρισης. Έτσι ο ρυθμός του δικτύου R_n με τον οποίο η μονάδα n αποστέλλεται στους πελάτες, μετρημένη κατά τη διάρκεια μίας μεγάλης χρονικής περιόδου, ισούται με το φόρτο ρ_n της μονάδας ανταπόκρισης n . Δηλαδή αν μπορεί να εκτιμηθεί μία τιμή για το R_n , τότε μπορεί να υπολογιστεί μία τιμή και για το ρ_n . Η πολιτική αποστολής των προτιμητέων μονάδων περιγράφεται με μαθηματικούς όρους ορίζοντας τα εξής:

G_j^1 = το σύνολο των γεωγραφικών ατόμων εκείνων για τα οποία η μονάδα ανταπόκρισης n είναι η j -στη προτιμώμενη προς αποστολή, $n, j=1,2,3,\dots,N$

m_{nj} = αριθμός αναγνώρισης της j -στης προτιμώμενης μονάδας για το άτομο a .

Για παράδειγμα, αν $G_2^3 = \{7,8,10,12\}$, η μονάδα 2 είναι η **τρίτη** πιο προτιμώμενη μονάδα εξυπηρέτησης για τα άτομα 7,8,10,12 και $m_{23} = 2$. Μία ακριβής έκφραση για το R_n μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$R_n = \sum_{a \in G_1^1} \lambda_a (1 - \rho_n) + \sum_{a \in G_1^2} \lambda_a P \{B_{m_{n1}} | F_n\} + \sum_{a \in G_1^3} \lambda_a P \{B_{m_{n2}} | B_{m_{n1}} F_n\} + \dots$$

$$\sum_{a \in G_n^N} \lambda_a P \{B_{m_{n1}} | B_{m_{n2}} | \dots | B_{m_{n(N-1)}} F_n\} + \lambda_D$$

Ο όρος λ_D αντιστοιχεί σε αργοπορημένες κλήσεις που προέρχονται από ουρά αναμονής και οι οποίες διανέμονται ισότιμα μεταξύ όλων των N μονάδων, άρα :

$\lambda_D = \lambda P'_Q / N$ (υποθέτοντας άπειρη ικανότητα λειτουργίας ουράς αναμονής)

Η παραπάνω σχέση μπορεί να μεταφραστεί ως εξής: ο ρυθμός του δικτύου με τον οποίο η μονάδα ανταπόκρισης n αποστέλλεται σε πελάτες ισούται με:

1. το ρυθμό με τον οποίο καταφθάνουν κλήσεις από την πρωταρχική περιοχή ευθύνης της μονάδας n , πολλαπλασιασμένο με το

- ποσοστό του χρόνου στον οποίο η μονάδα n είναι διαθέσιμη να ανταποκριθεί αμέσως σε τέτοιες κλήσεις, συν
- το ρυθμό με τον οποίο καταρθάνουν κλήσεις από περιοχές στις οποίες η μονάδα n είναι η δεύτερη προτιμητέα μονάδα, πολλαπλασιασμένο με το ποσοστό του χρόνου στον οποίο και η πρώτη προτιμώμενη μονάδα είναι κατευλημμένη και η μονάδα n είναι διαθέσιμη να εξυπηρετήσει αμέσως τις κλήσεις αυτές, συν
 - παρόμοιους όρους για κάθε μία από τις υπόλοιπες περιοχές στις οποίες η μονάδα n είναι η j -στή προτιμητέα, συν
 - έναν όρο που διαμοιράζει ισότητα σε κάθε μία από τις μονάδες ένα ποσοστό $(1/N)$ των καθυστερημένων λόγω ουράς αναμονής κλήσεων.

Λαμβάνοντας υπόψη την προσεγγιστική υπόθεση, η παραπάνω σχέση μπορεί να απλοποιηθεί εκτιμώντας τις πιθανότητες αποστολής σαν γινόμενα των βαθμών χρησιμοποίησης ή των παραγόντων αβεβαιότητας με τους κατάλληλους συντελεστές διόρθωσης. Για παράδειγμα:

$P\{B_3B_6F_3\} \approx Q(N,\rho,2) \rho_3 \rho_6 (1-\rho_3)$. Έχοντας υπόψη αυτό το παράδειγμα και αντικαθιστώντας $R_n \approx \rho_n$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\begin{aligned} \rho_n = & \sum_{n \in G_n^1} \lambda_n (1 - \rho_n) + \sum_{n \in G_n^1} \lambda_n Q(N, \rho, 1) \rho_{n \alpha 1} (1 - \rho_n) \\ & + \sum_{n \in G_n^1} \lambda_n Q(N, \rho, 2) \rho_{n \alpha 1} \rho_{n \alpha 2} (1 - \rho_n) \\ & + \sum_{n \in G_n^1} \lambda_n Q(N, \rho, N-1) \rho_{n \alpha 1} \rho_{n \alpha 2} \dots \rho_{n \alpha (N-1)} (1 - \rho_n) \\ & + \lambda_Q \end{aligned}$$

Φαίνεται ότι κάθε ένας από τους όρους του δευτέρου μέλους της τελευταίας σχέσης περιέχει τον παράγοντα $(1-\rho_n)$. Διαψώνοντας κατά μέλη με $(1-\rho_n)$ η σχέση αυτή γίνεται:

$$\begin{aligned} R_n^F = & \sum_{n \in G_n^1} \lambda_n + \sum_{n \in G_n^1} \lambda_n Q(N, \rho, 1) + \sum_{n \in G_n^1} \lambda_n Q(N, \rho, 2) \rho_{n \alpha 1} \rho_{n \alpha 2} + \dots \\ & + \sum_{n \in G_n^1} \lambda_n Q(N, \rho, N-1) \rho_{n \alpha 1} \rho_{n \alpha 2} \dots \rho_{n \alpha (N-1)} \end{aligned}$$

όπου R_n^F είναι η προσεγγιστική τιμή του ρυθμού ανάθεσης αποσταλίων στη μονάδα n κατά τη διάρκεια περιόδων στις οποίες η μονάδα n είναι διαθέσιμη. Από τις δύο τελευταίες σχέσεις με αντικατάσταση :

$$\rho_n = R_n^F + \lambda_Q / (1 + R_n^F), \quad n=1,2,\dots,N$$

Εδώ θεωρείται ότι $\lambda_Q < 1$, υπονοώντας ότι $\rho_n < 1$, διαφορετικά το σύστημα θα υπερφορτωνόταν. Η τελευταία ισότητα αναπαριστά ένα

σύνολο από N το πλήθος μη γραμμικές εξισώσεις που σχετίζουν τους N αγνώστους p_n , $n=1,2,\dots,N$. Μπορούν να επιλυθούν με επαναληπτική μέθοδο. Ένας τέτοιος αλγόριθμος θα παρουσιαστεί στο 7^ο Κεφάλαιο. Όπως θα διαπιστωθεί η τελευταία σχέση οδηγεί σε μία πολύ ικανοποιητική προσέγγιση των φόρτων ακόμα και από την πρώτη επανάληψη.(στην οποία όλοι οι φόρτοι του δεξιού μέλους θέτονται ίσοι). Σπάνια απαιτούνται περισσότερες των τριών ή τεσσάρων επαναλήψεων ακόμα και για τα πιο ανιστήρα κριτήρια.

6.3. Επιστροφή στο παράδειγμα των τριών μονάδων εξυπηρέτησης

Η διαδικασία προσέγγισης θα εφαρμοστεί στο παράδειγμα των τριών μονάδων ανταπόκρισης και των δέκα γεωγραφικών ατόμων του προηγούμενου κεφαλαίου. Υπενθυμίζεται ότι $\lambda=1,5$, $\mu=1$ και ως εκ τούτου $\rho=\lambda/(3\mu)=0,5<1$. Τα σύνολα G_n^j των γεωγραφικών ατόμων για τα οποία η μονάδα n είναι η j -στή πιο προτιμώμενη δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός Προτίμησης (j)	Αριθμός Μονάδας Ανταπόκρισης (n)		
	1	2	3
1	1,2,4	3,5,6	7,8,9,10
2	3,5,6,7,8,9,10	1,2	4
3	-	4,7,8,9,10	1,2,3,5,6

Πιν. 5-1 Μπλοκ G_n^j

Υπολογίζονται οι τιμές των τριών συντελεστών διόρθωσης:

$$Q(3,1,0) = 1/2$$

$$Q(3,1,1) = 0,73684$$

$$Q(3,1,2) = 0,63158$$

Όπως διαπιστώνεται από την επίλυση η διαδικασία συγκλίνει στην τρίτη μόλις επανάληψη έχοντας θέσει μάλιστα ένα αρκετά αυστηρό κριτήριο ($\epsilon \geq 0,0010$). Οι φόρτοι που προκύπτουν από την προσεγγιστική διαδικασία είναι:

$$\rho_1 = 0,5627$$

$$\rho_2 = 0,4716$$

$$\rho_3 = 0,4657$$

Συγκρίνοντάς τα αποτελέσματα αυτά με τους φόρτους που υπολογίσαμε με την ακριβή διαδικασία επίλυσης, μπορούμε να δούμε ότι το μεγαλύτερο σφάλμα αντιστοιχεί στον υπολογισμό του φόρτου της μονάδας 1 και είναι ίσο με 0,0053 ή ίσο με 1%. Ο μέσος όρος των σφαλμάτων είναι 0,7%. Τα αποτελέσματα αυτά είναι χαρακτηριστικά της

προσεγγιστικής μεθόδου και ίσης τάξης μεγέθους με τα αναμενόμενα σφάλματα οποιασδήποτε άλλης εφαρμογής.

Έχοντας υπολογίσει τα ρ_{ij} , είναι πλέον εύκολο να υπολογιστεί το ποσοστό των αποστολών που οδηγούν την μονάδα n στο άτομο j , δηλαδή τις τιμές των f_{nj} . Με γνωστές τις τιμές των ρ_{nj} , f_{nj} είναι δυνατό πλέον να υπολογιστούν και τα υπόλοιπα κριτήρια λειτουργίας του συστήματος αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις αλγεβρικές εξισώσεις που ισχύουν στο ακριβές κυβικό μοντέλο.

Υπάρχουν προεκτάσεις της προσεγγιστικής διαδικασίας οι οποίες είναι παράλληλες με αυτές του βασικού κυβικού μοντέλου. Μπορεί κάποιος να εξάγει μία προσεγγιστική διαδικασία για την περίπτωση μηδενικής ικανότητας ουράς αναμονής και για την περίπτωση διακριτών μονάδων εξυπηρέτησης. Δεν είναι όμως μέχρι τώρα γνωστή μία παρόμοια διαδικασία η οποία να αντιστοιχεί σε πολιτικές αποστολής μονάδων εξυπηρέτησης διαφορετικών από την πολιτική προκαθορισμένης και ιεραρχημένης προτίμησης.

6.4. Ποσοστό Αποστολών Δια συνεργαζόμενων Γεωγραφικών Οντοτήτων

Συχνά ο διοικητής της υπηρεσίας επιθυμεί να γνωρίζει τον αριθμό των αποστολών που προκαλούν την μετακίνηση των μονάδων ανταπόκρισης εκτός της Πρωταρχικής Περιοχής Ευθύνης τους. Οι αποστολές αυτές αυξάνουν το συνολικό χρόνο μετακίνησης και ίσως προκαλούν τη μείωση του επιπέδου των παρεχόμενων υπηρεσιών εξαιτίας της έλλειψης οικειότητας του πληρώματος με τις επικρατούσες γεωγραφικές, κοινωνικές κ.ο.κ. συνθήκες στις υπόλοιπες γεωγραφικές οντότητες εκτός της Πρωταρχικής Περιοχής Ευθύνης του.

Για μία δεδομένη περιοχή στην οποία επιχειρούν N το πλήθος μονάδες εξυπηρέτησης ορίζεται:

$\lambda_n(t)$ = μέσος ρυθμός άφιξης αιτήσεων (αιτήσεις / ώρα) στη περιοχή ανταπόκρισης n στο χρόνο t .

$n=1,2,\dots,N$

$0 \leq t \leq T$

Οι γεννήσεις αιτήσεων είναι μία διαδικασία γεννήσεως POISSON

$\rho_n(t)$ = η πιθανότητα του ενδεχομένου : η μονάδα n είναι μη διαθέσιμη για αποστολή το χρόνο t = φόρτος λειτουργίας μονάδας n το χρόνο t

$n=1,2,\dots,N$

$0 \leq t \leq T$

$\lambda =$ μέσος ρυθμός άφιξης αιτήσεων για εξυπηρέτηση εντός της περιοχής μελέτης στο χρόνο T .

$$\lambda = (1/T) * \int_0^T \sum_{n=1}^N \lambda_n(t) dt$$

$1/\mu$ = μέσος όρος των χρόνων εξυπηρέτησης όλων των μονάδων του συστήματος.

Αν μία αίτηση για εξυπηρέτηση καταφτάσει από την περιοχή n , έστω ότι η στρατηγική αποστολής μονάδων είναι η ακόλουθη:

1. Αποστολή της μονάδας n , αν είναι διαθέσιμη
2. Διαφορετικά, αποστολή μίας μονάδας m , $m \neq n$, λαμβάνοντας υπόψη την κατάσταση του συστήματος (και πιθανώς άλλους παράγοντες)

Υποθέτοντας υψηλό αριθμό N (ή αλλιώς χαμηλό φόρτο), η πιθανότητα να είναι ταυτόχρονα κατειλημμένες όλες οι μονάδες είναι πολύ μικρή.

Έστω ότι μια αίτηση καταφτάνει από την περιοχή n τη χρονική στιγμή t . Η πιθανότητα η αίτηση αυτή να προκαλέσει μία αποστολή **Δια συνεργαζόμενων Γεωγραφικών Οντοτήτων** ισούται με την πιθανότητα ότι η μονάδα n είναι κατεύλημμένη, δηλαδή $\rho_n(t)$. Μία τυχαία αίτηση που γεννάται στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ έχει πιθανότητα γέννησης στο χρονικό διάστημα $t, t+dt$ με προέλευση την περιοχή ανταπόκρισης n ίση:

$$\lambda_n(t) dt / \lambda T$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο η πιθανότητα ότι μία τυχαία αίτηση γεννάται στο χρονικό διάστημα $t, t+dt$, έχει προέλευση την περιοχή ανταπόκρισης n και προκαλεί μία αποστολή **Δια συνεργαζόμενων Γεωγραφικών Οντοτήτων** ισούται:

$$\rho_n(t) \lambda_n(t) dt / \lambda T$$

Αθροίζοντας τις πιθανότητες όλων των περιοχών N και ολοκληρώνοντας στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ προκύπτει η πιθανότητα που έχει το γεγονός: Μία τυχαία αίτηση που συμβαίνει εντός του χρονικού διαστήματος $[0, T]$ προκαλεί μία αποστολή **Δια συνεργαζόμενων Γεωγραφικών Οντοτήτων**

$$f_i = (1/T) * \int_0^T \sum_{n=1}^N [\rho_n(t) \lambda_n(t) / \lambda] dt$$

Αν το σύστημα είναι ανεξάρτητο του χρόνου, τότε $\rho_n(t) = \rho_n$, $\lambda_n(t) = \lambda_n$ και η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$f_i = \sum_{n=1}^N \rho_n \lambda_n / \lambda$$

Διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

$$1. \rho_n = \rho \implies f_i = \sum_{n=1}^N \rho_n \lambda_n / \lambda = \rho \sum_{n=1}^N \lambda_n / \lambda = \rho$$

Δηλαδή, αν οι πιθανότητες μη διαθεσιμότητας κάθε μονάδας είναι ίσες μεταξύ τους (αν όλες οι μονάδες έχουν ίδιο φόρτο λειτουργίας), τότε το ποσοστό των αιτήσεων που προκαλούν αποστολές **Δια συνεργαζόμενων Γεωγραφικών Οντοτήτων** είναι ίσο με τη πιθανότητα μη διαθεσιμότητας κάθε μονάδας (φόρτο κάθε μονάδας)

N

N

$$\begin{aligned}
 2. \lambda_n = \text{σταθερό} &\implies f_i = \sum_{n=1}^N \rho_n \lambda_n / \lambda = \lambda_n \sum_{n=1}^N \rho_n / \lambda = \lambda_n \rho / \lambda = \lambda_n \rho / N \\
 &\implies f_i = \rho / N = (\lambda / \mu N) / N = \lambda / \mu N^2
 \end{aligned}$$

Δηλαδή, αν ο ρυθμός άφιξης των αιτήσεων είναι ίσος σε όλες τις περιοχές ανταπόκρισης, τότε το ποσοστό των αιτήσεων που προκαλούν αποστολές **Δια συνεργαζόμενων Γεωγραφικών Οντοτήτων** είναι ίσο με το κλάσμα του συνολικού φόρτου λειτουργίας του συστήματος προς τον αριθμό των μονάδων εξυπηρέτησης.

Τι συμβαίνει όμως όταν το σύστημα δεν είναι ανεξάρτητο του χρόνου; Αν δεχτούμε ότι οι αποστολές **Δια συνεργαζόμενων Γεωγραφικών Οντοτήτων** είναι ανεπιθύμητες τότε μπορούμε να πούμε ότι η κατάσταση πηγαίνει προς το χειρότερο. Ας δούμε γιατί. Αρχικά αντικαθιστούμε τις εκφράσεις των $\rho_n(t)$, $\lambda_n(t)$ με τις μέσες τιμές τους το χρονικό διάστημα $[0, T]$:

$$\lambda_n = (1/T) \int_0^T \lambda_n(t) dt$$

$$\rho_n = (1/T) \int_0^T \rho_n(t) dt$$

Πρέπει να αποδειχθεί ότι σε ένα **μη ανεξάρτητο χρονικά** σύστημα το ποσοστό των αιτήσεων που προκαλούν αποστολές **Δια συνεργαζόμενων Γεωγραφικών Οντοτήτων** είναι τουλάχιστον μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ποσοστό, **ανεξάρτητης χρονικά κατάστασης λειτουργίας**, που προκύπτει με τις μέσες τιμές των $\rho_n(t)$, $\lambda_n(t)$ που υπολογίστηκαν. Δηλαδή, σε ένα **μη ανεξάρτητο χρονικά** σύστημα ισχύει:

$$f_i \geq \sum_{n=1}^N \rho_n \lambda_n / \lambda$$

Ας αποδειχθεί πρώτα η εξής υπόθεση: Όταν $\lambda_n(t) \geq \lambda_n$ τότε $\rho_n(t) \geq \rho_n$ και όταν $\lambda_n(t) \leq \lambda_n$ τότε $\rho_n(t) \leq \rho_n$. Δηλαδή ο φόρτος λειτουργίας μιας μονάδας πρέπει να είναι μεγαλύτερος (μικρότερος) της μέσης τιμής του όταν ο ρυθμός άφιξης αιτήσεων από την πρωταρχική περιοχή ευθύνης της είναι μεγαλύτερος (μικρότερος) της μέσης τιμής του.

$$\begin{aligned}\text{Έστω: } \rho_n(t) &= \rho_n + \Delta \rho_n(t) \\ \lambda_n(t) &= \lambda_n + \Delta \lambda_n(t)\end{aligned}$$

$$\text{Τότε} \quad (1/T) \int_0^T \rho_n(t) dt = 0$$

$$\text{και} \quad (1/T) \int_0^T \lambda_n(t) dt = 0$$

$$f_i = (1/\lambda T) * \sum_{n=1}^N \int_0^T [\rho_n \lambda_n + \rho_n \Delta \lambda_n(t) + \lambda_n \Delta \rho_n(t) + \Delta \rho_n(t) \Delta \lambda_n(t)] dt$$

Το δεύτερο και το τρίτο μέλος μέσα στην αγκύλη είναι ίσο με μηδέν.
Άρα:

$$f_i = \sum_{n=1}^N \rho_n \lambda_n / \lambda + (1/\lambda T) \sum_{n=1}^N \int_0^T \Delta \rho_n(t) \Delta \lambda_n(t) dt$$

Όμως τα $\Delta \rho_n(t)$, $\Delta \lambda_n(t)$ έχουν πάντα το ίδιο πρόσημο αφού :

$$\begin{aligned}\lambda_n(t) \geq \lambda_n & \Rightarrow \rho_n(t) \geq \rho_n \quad \text{ή} \\ \lambda_n - \Delta \lambda_n(t) \geq \lambda_n & \Rightarrow \rho_n + \Delta \rho_n(t) \geq \rho_n \quad \text{ή} \\ \Delta \lambda_n(t) \geq 0 & \Rightarrow \Delta \rho_n(t) \geq 0 \\ \text{Ομοίως αν } \lambda_n(t) \leq \lambda_n & \Rightarrow \rho_n(t) \leq \rho_n\end{aligned}$$

$$\text{Άρα} \quad \int_0^T \Delta \rho_n(t) \Delta \lambda_n(t) dt \geq 0$$

Και συνεπώς

$$f_i \geq \sum_{n=1}^N \rho_n \lambda_n / \lambda$$

6.5 Χωροταξική Κατανομή Κατειλημμένων Μονάδων Εξυπηρέτησης

Σε μερικές περιπτώσεις θα ήτανε σκόπιμο να είναι γνωστή η Χωροταξική Κατανομή των Κατειλημμένων Μονάδων Εξυπηρέτησης στα σημεία γέννησης των αιτήσεων. Για παράδειγμα, ίσως ο διοικητής της εκάστοτε υπηρεσίας θα επιθυμούσε να αναλύσει τις συνέπειες μιας στρατηγικής αποστολής μονάδων σύμφωνα με την οποία μία κατειλημμένη μονάδα που εξυπηρετεί μία αίτηση χαμηλής προτεραιότητας θα διακόψει την εξυπηρέτηση αυτή για να σταλεί σε μία υψηλότερης σημαντικότητας – προτεραιότητας αίτηση. Στην περίπτωση εφαρμογής του στόλου οχημάτων ενός αστυνομικού τμήματος, αφού η αστυνομική παρουσία λέγεται ότι λειτουργεί αποτρεπτικά για τη διάπραξη αδικημάτων, ίσως ο αντίστοιχος διοικητής θα ήθελε να ξέρει τη Χωροταξική Κατανομή των Κατειλημμένων Μονάδων Εξυπηρέτησης (καθώς και των διαθέσιμων μονάδων). Ίσως θελήσει να αλλάξει την χωροταξική αυτή κατανομή, εάν είναι δυνατό, τροποποιώντας τις στρατηγικές χωροταξικής προ τοποθέτησης.

Το ζήτημα αυτό εξετάζεται χρησιμοποιώντας τη θεωρία αναμονής και συγκεκριμένα την περίπτωση M/G/∞. Η υπόθεση ενός άπειρου αριθμού μονάδων εξυπηρέτησης υπονοεί ότι ο πραγματικός αριθμός τους είναι επαρκώς μεγάλος ή ότι ο φόρτος του συστήματος είναι επαρκώς μικρός έτσι ώστε σχεδόν ποτέ δε σχηματίζονται ουρές αναμονής.

Ας θεωρηθεί λοιπόν ένα σύστημα χωροταξικών κατανεμημένων μονάδων εξυπηρέτησης στο οποίο:

1. Οι αιτήσεις για εξυπηρέτηση προκαλούνται ως μία διαδικασία γεννήσεων κατά Poisson από μία περιοχή μήκους A_0 km με ρυθμό άφιξης λ .
2. Οι ζήτηση για εξυπηρέτηση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο χώρο.
3. μ^{-1} = μέσος όρος χρόνων εξυπηρέτησης
4. Υπάρχουν θεωρητικά άπειρες μονάδες εξυπηρέτησης.

Σύμφωνα με τη θεωρία M/G/∞ στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας η πιθανότητα να είναι κατειλημμένες ακριβώς k το πλήθος μονάδες εξυπηρέτησης σε κάθε υποπεριοχή μήκους $A \leq A_0$ km είναι:

$$P_k(A) = \frac{[\lambda A / \mu]^k e^{-(\lambda A / \mu)}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Η έκφραση αυτή υποδεικνύει το εξής χαρακτηριστικό: **ανεξάρτητα από τη μέθοδο προ τοποθέτησης των μονάδων**

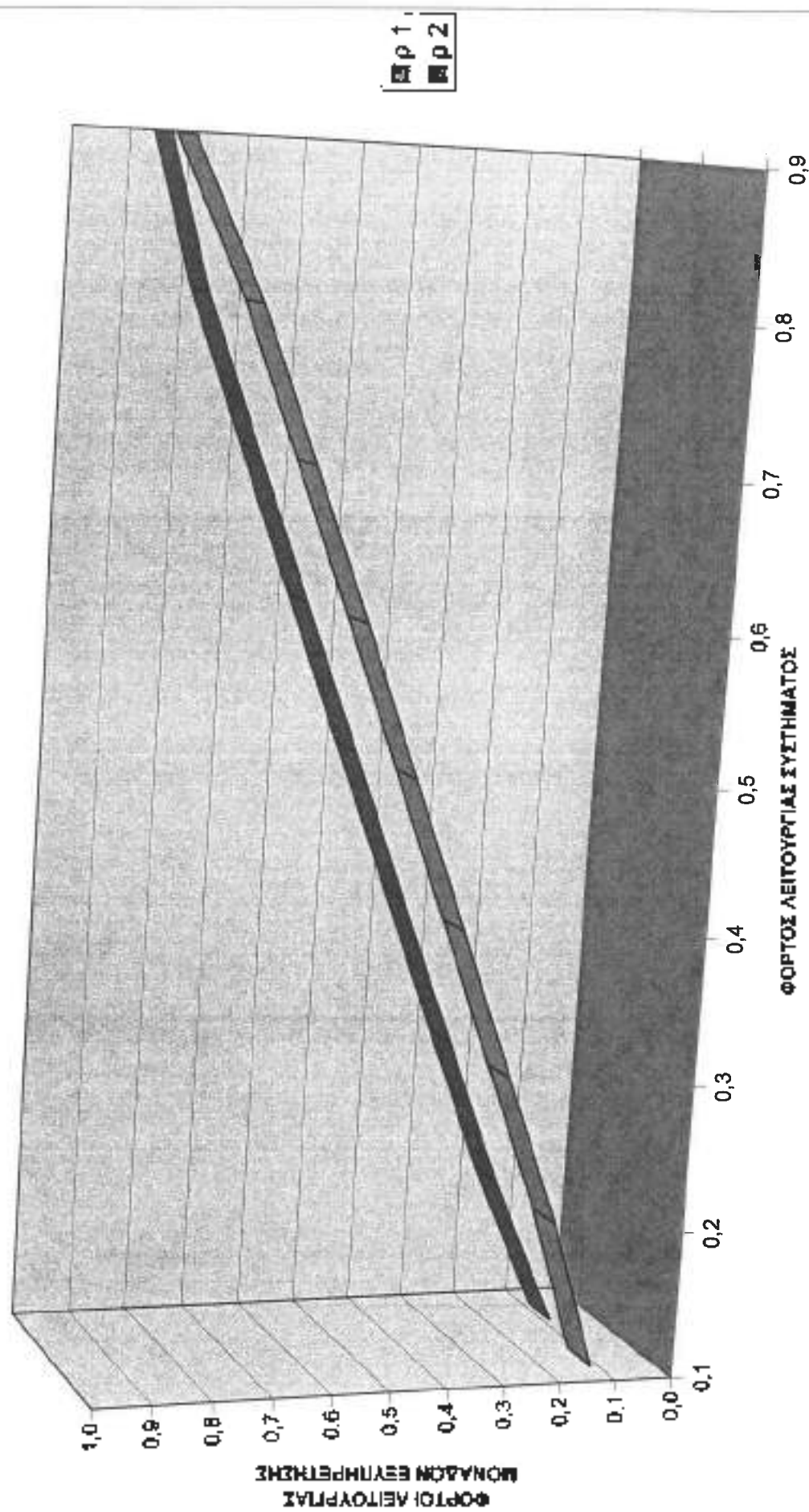
εξυπηρέτησης οι κατευλημμένες μονάδες κατανέμονται σαν μία διαδικασία POISSON ως προς το χώρο με παράμετρο (λ/μ) κατειλημμένες μονάδες ανά χιλιόμετρο μήκους.

7^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ Α.Ο.ΔΟΝΙ.

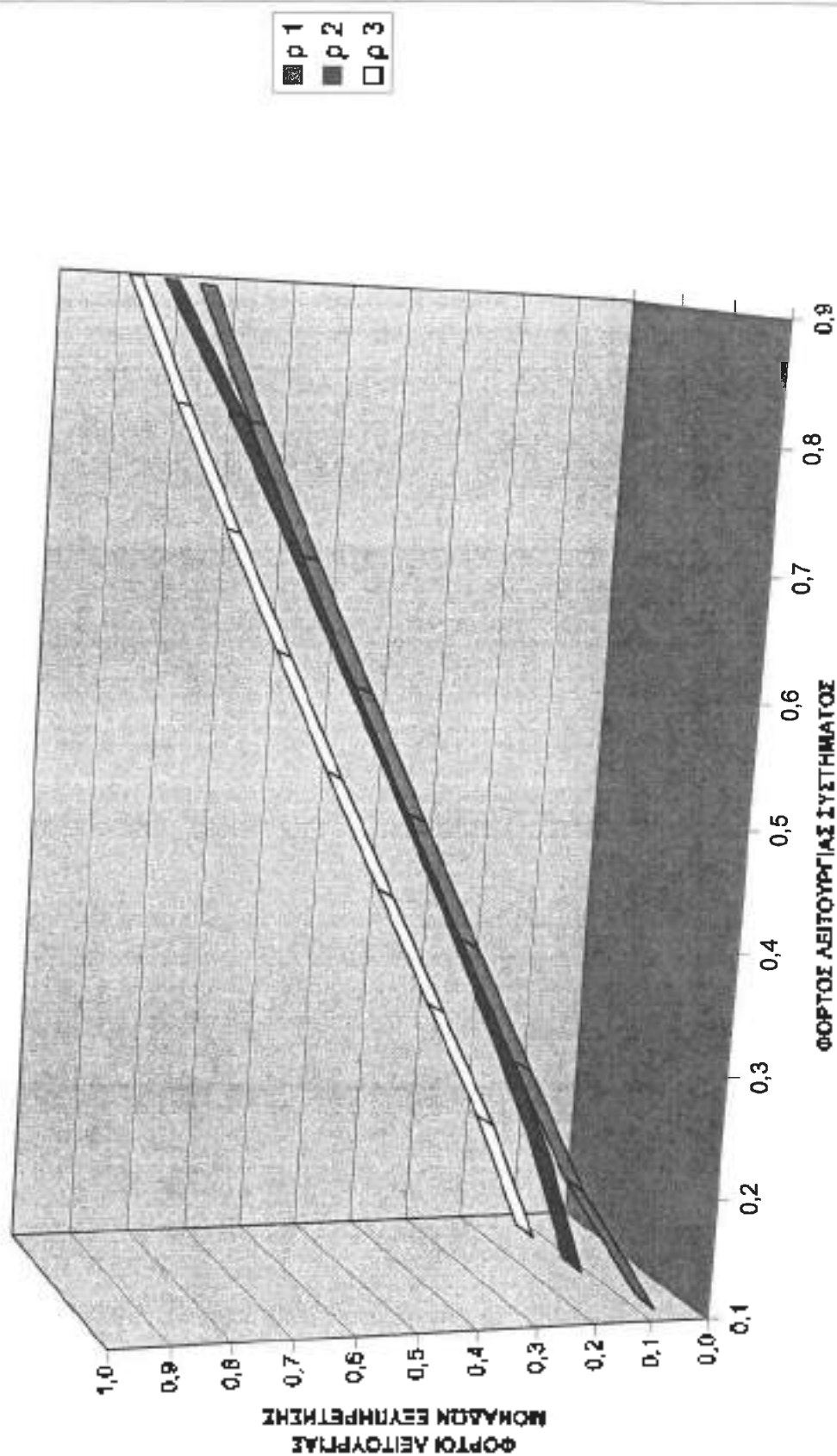
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΑΝΤΑΠΟΚΡΙΣΗΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ
ΑΥΘΑΙΡΕΤΕΣ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΙΜΗΣΗΣ ΑΠΟΣΤΟΛΩΝ ΚΑΙ
ΑΥΘΑΙΡΕΤΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ
ΕΥΘΥΝΗΣ

**ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ**



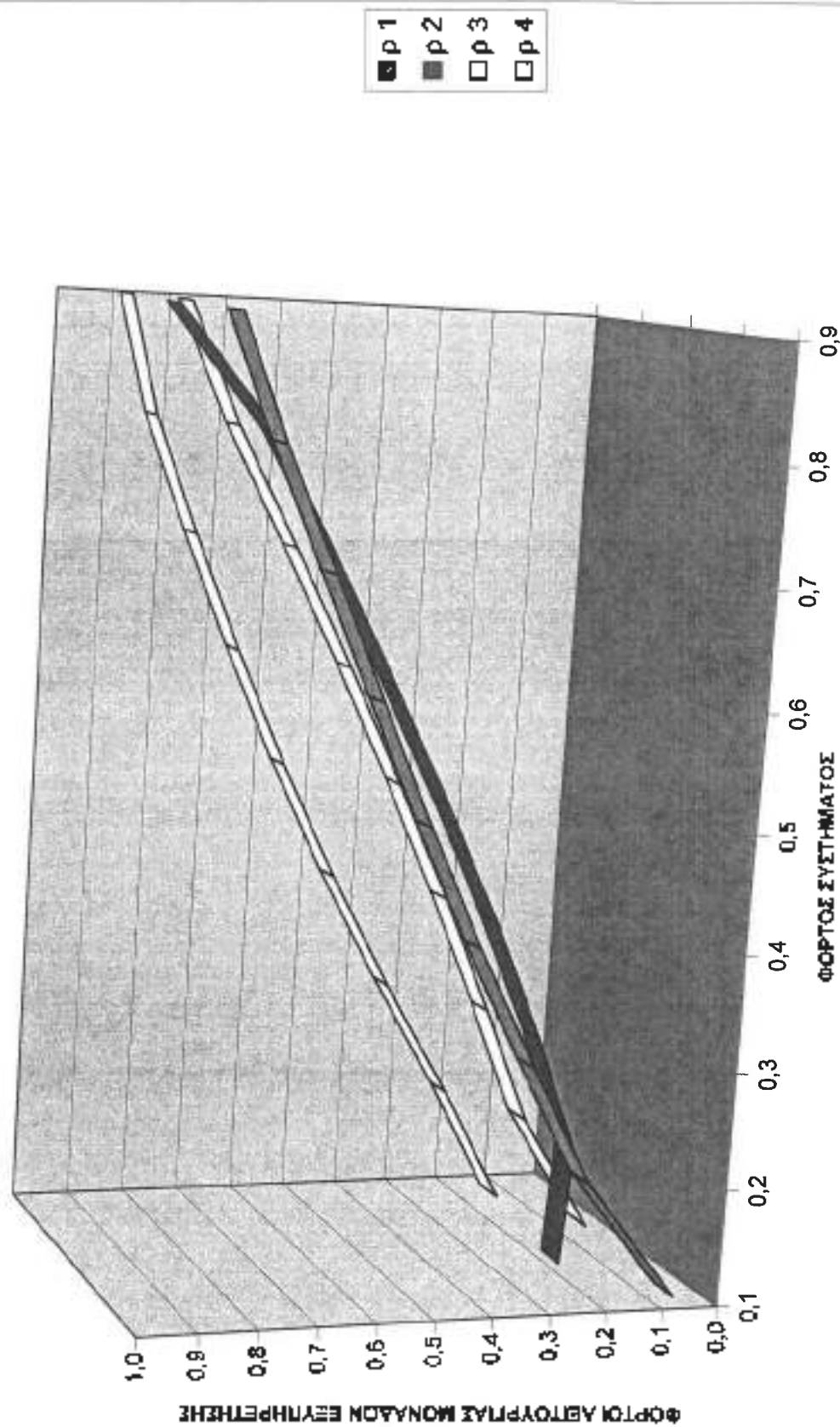
[illegible]

**ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ**



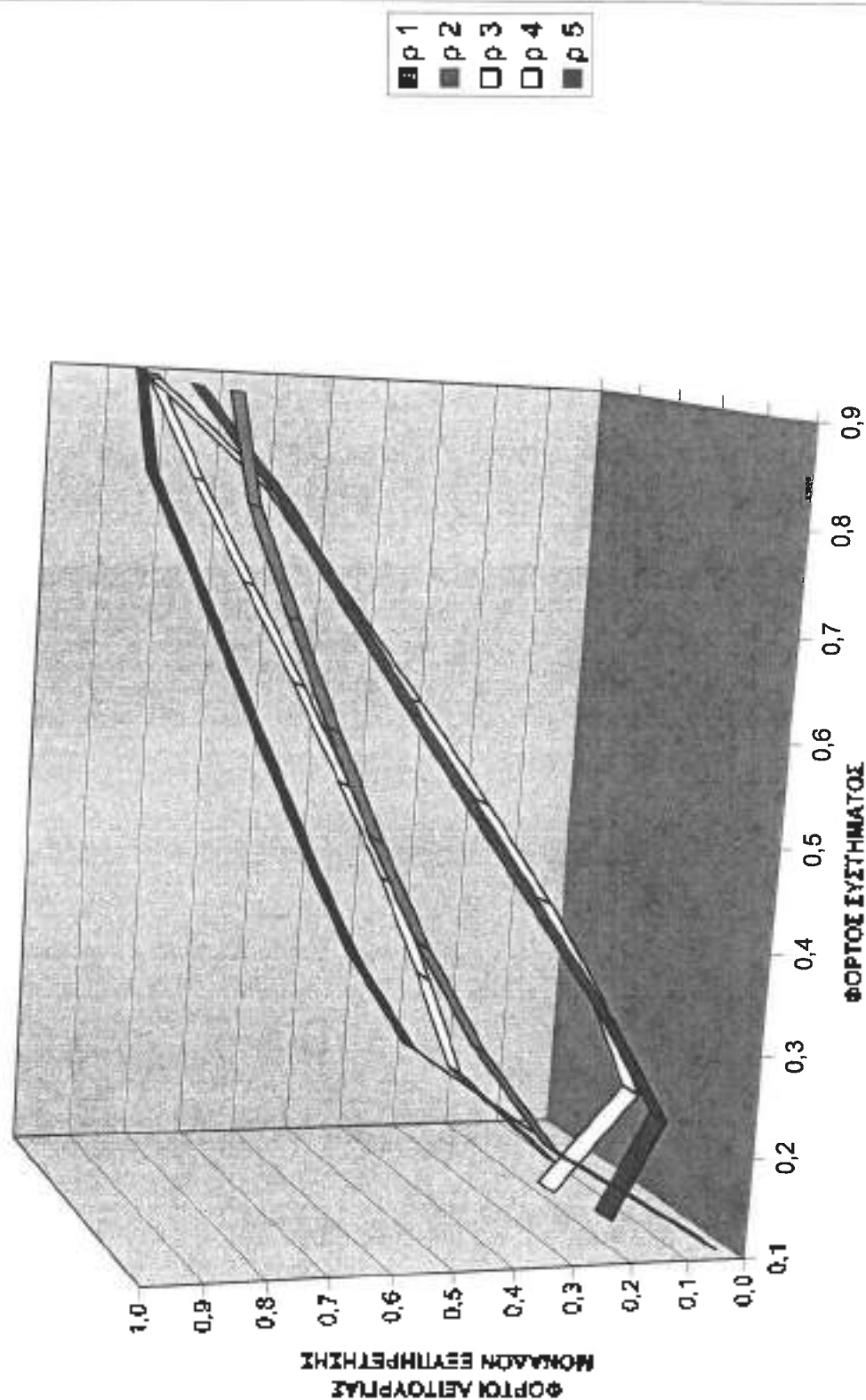
[illegible]

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



[illegible]

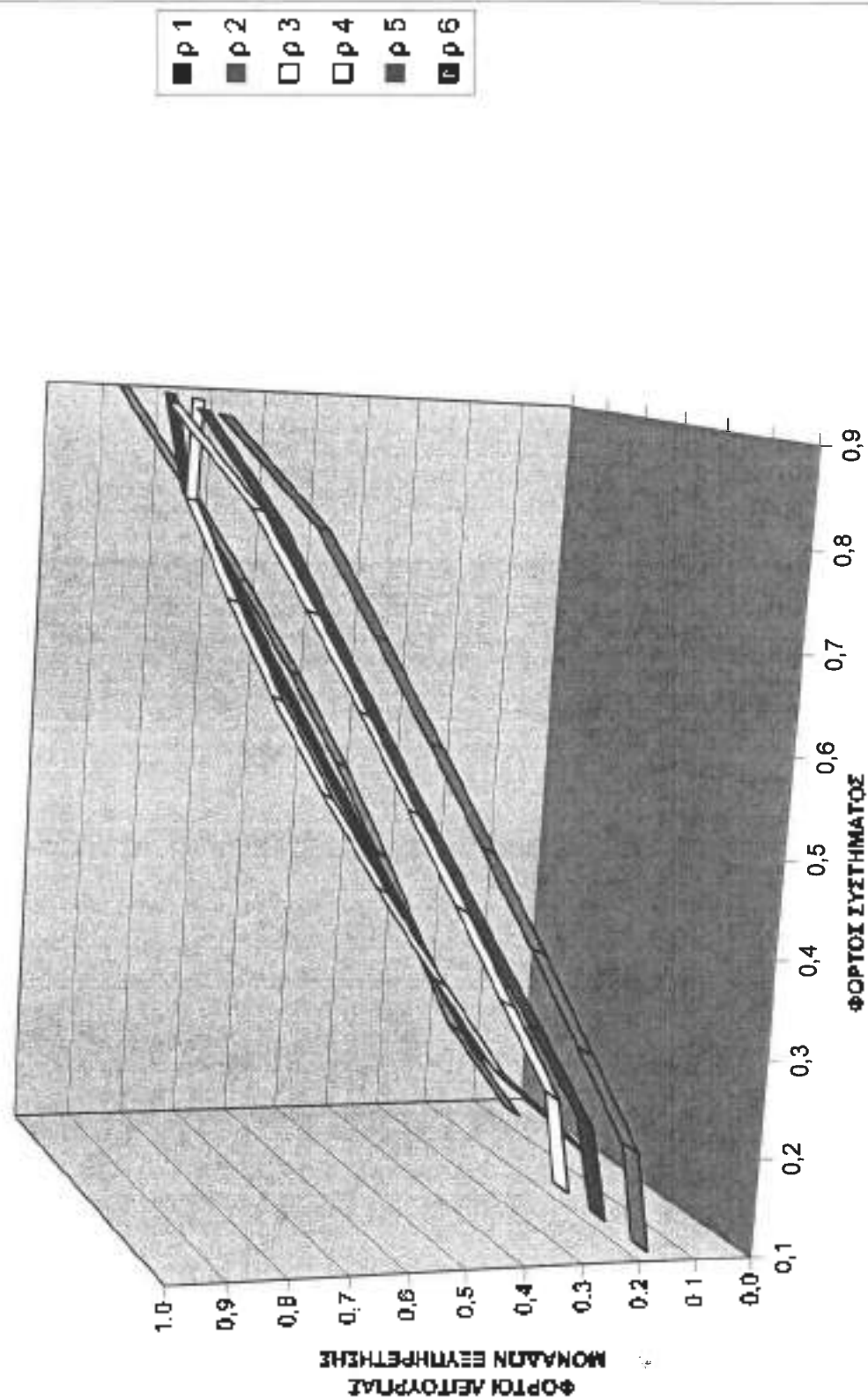
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΩ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



[illegible]

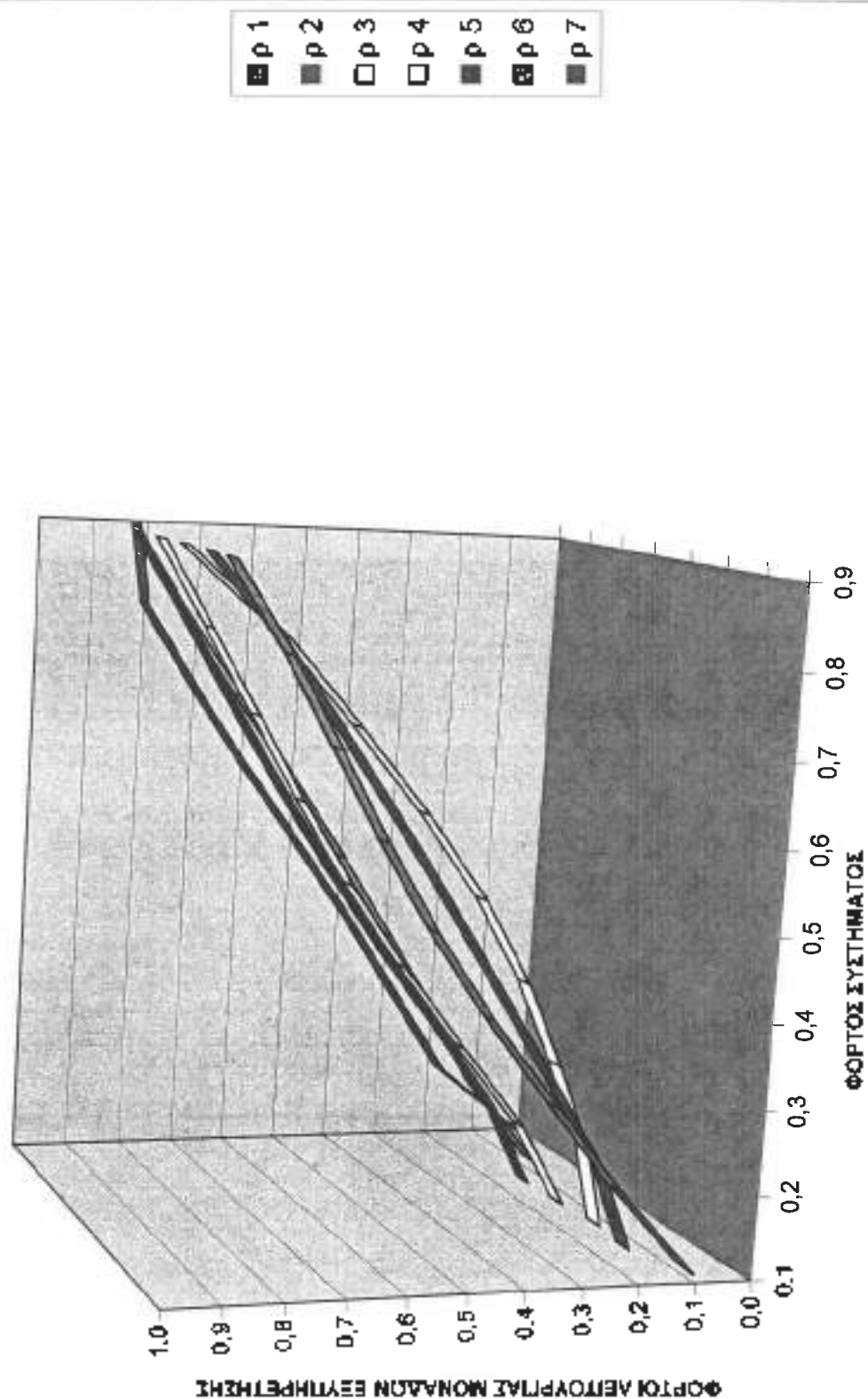
ΜΟΝΑΔΑ ΠΡΟΤΙΜΗΣΗΣ

**ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗ**

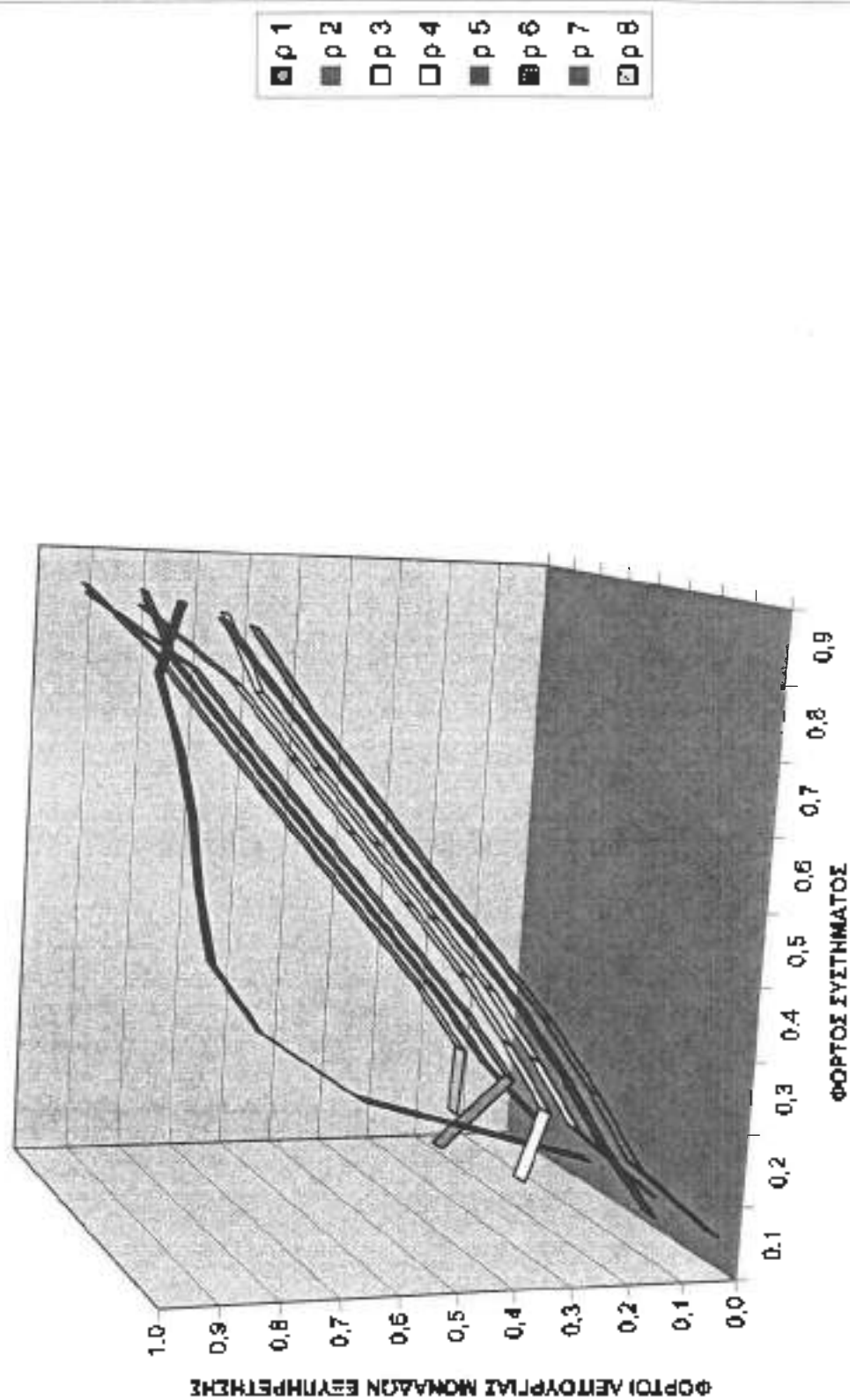


[illegible]

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ

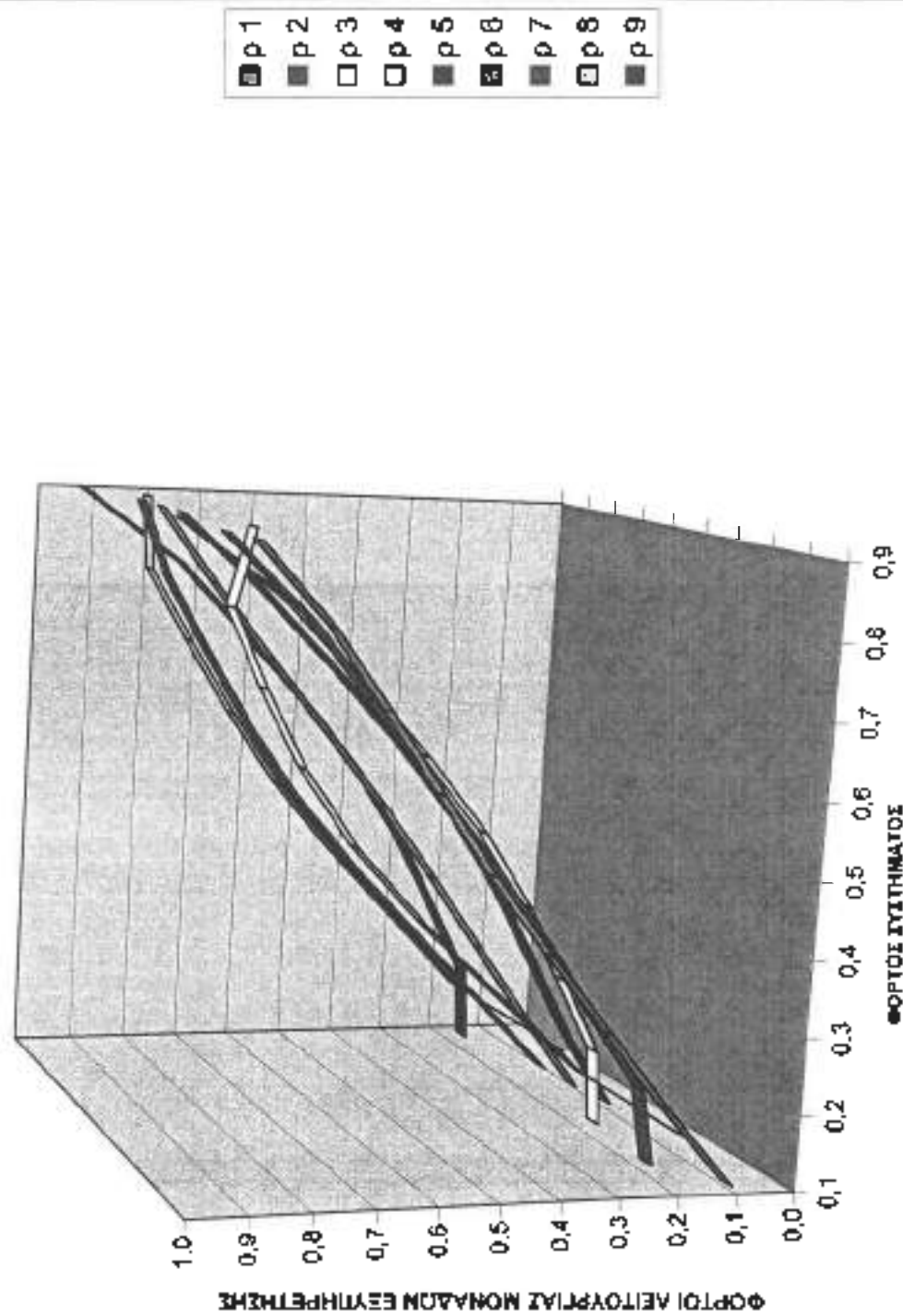


ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΥΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



[illegible]

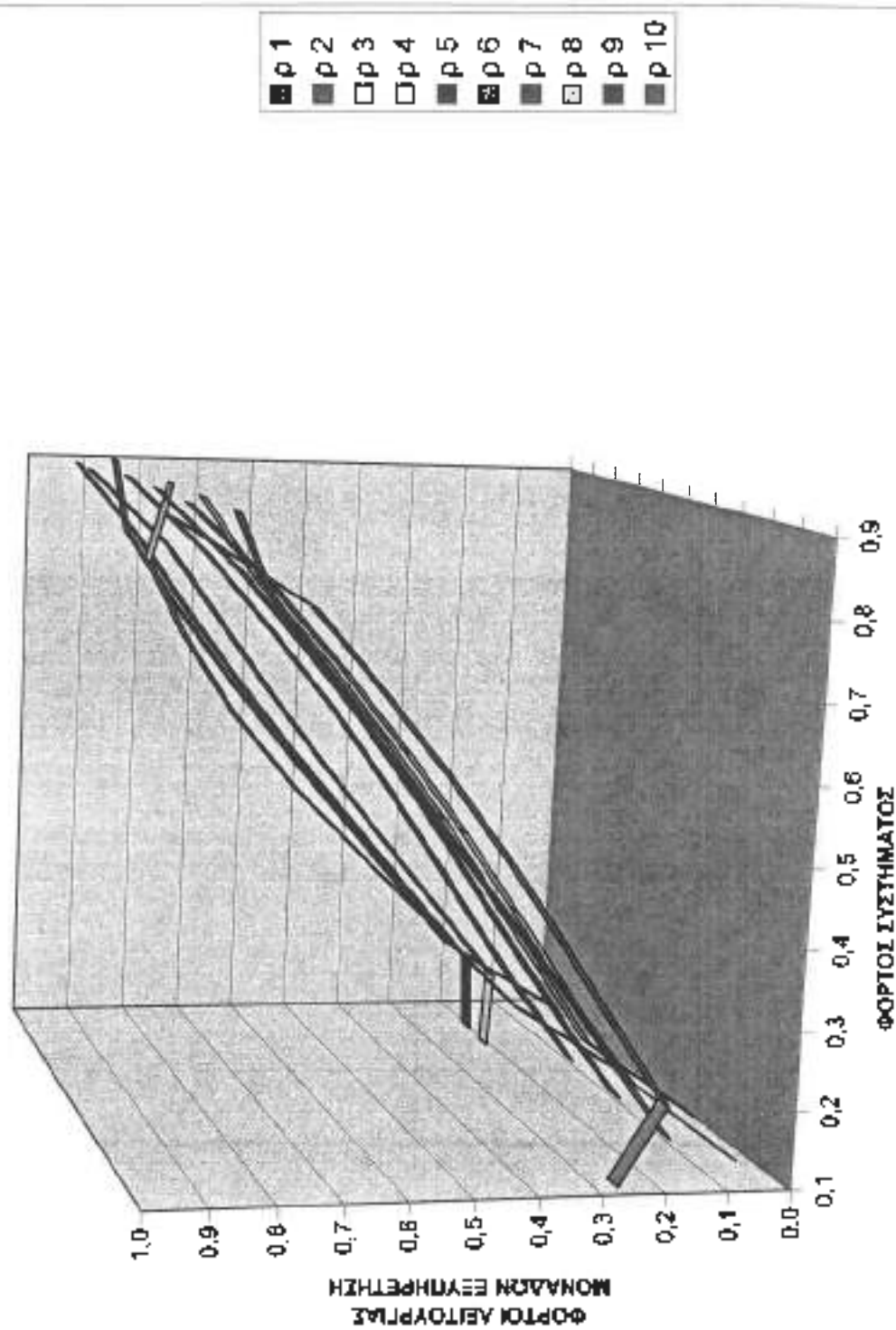
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



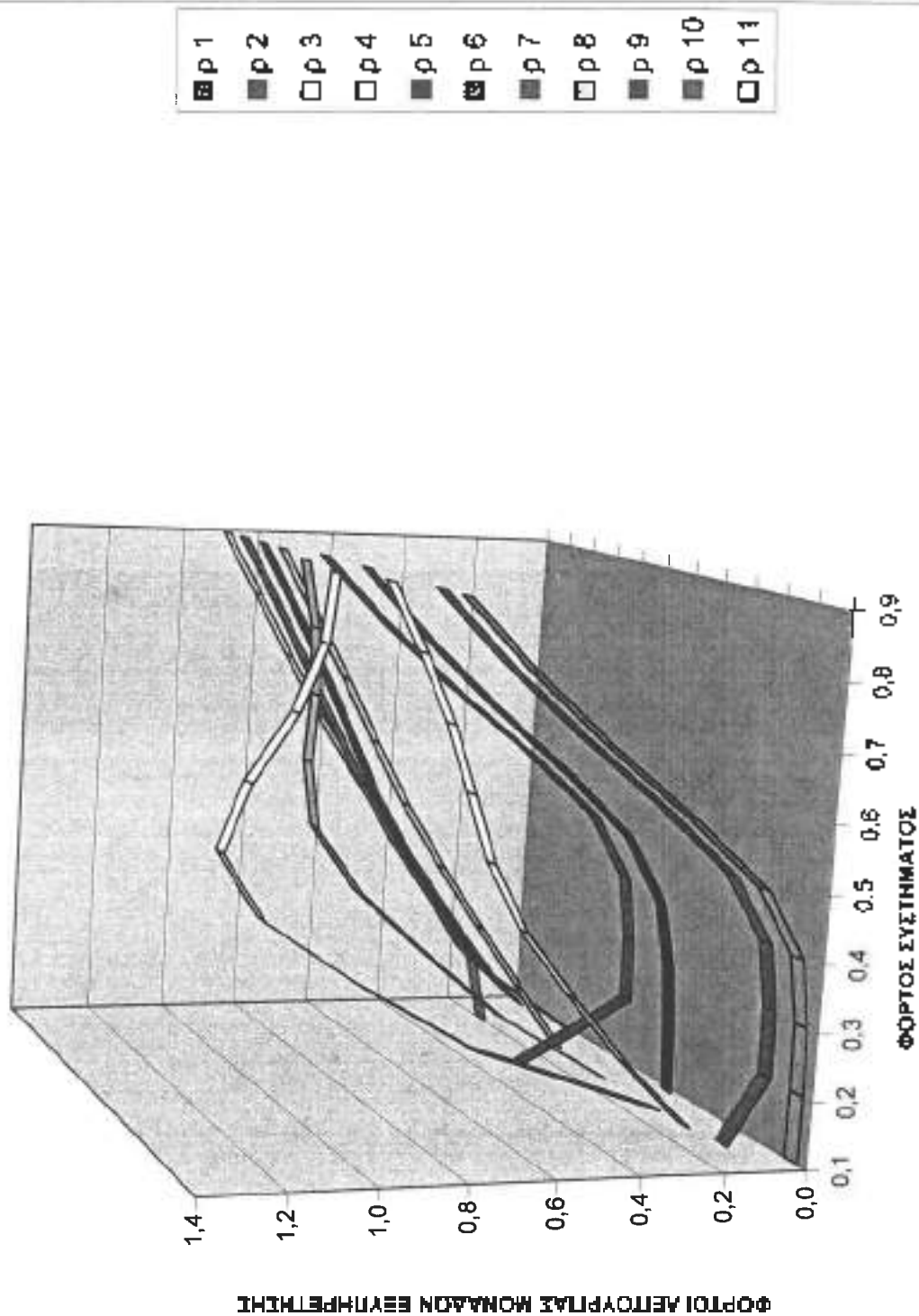
[illegible]

ΜΟΝΑΔΑ ΠΡΟΤΙΜΗΣΗΣ

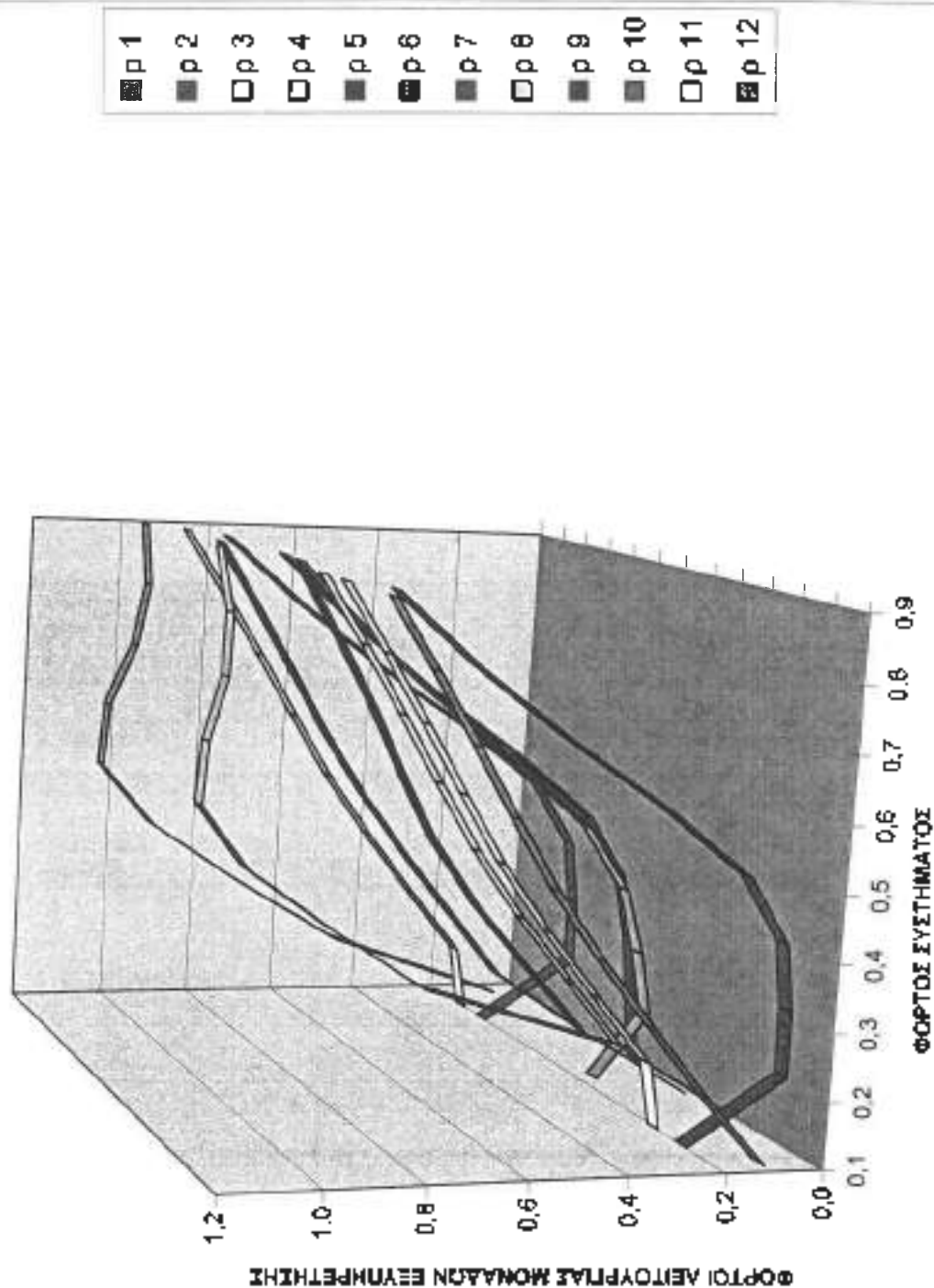
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΥΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



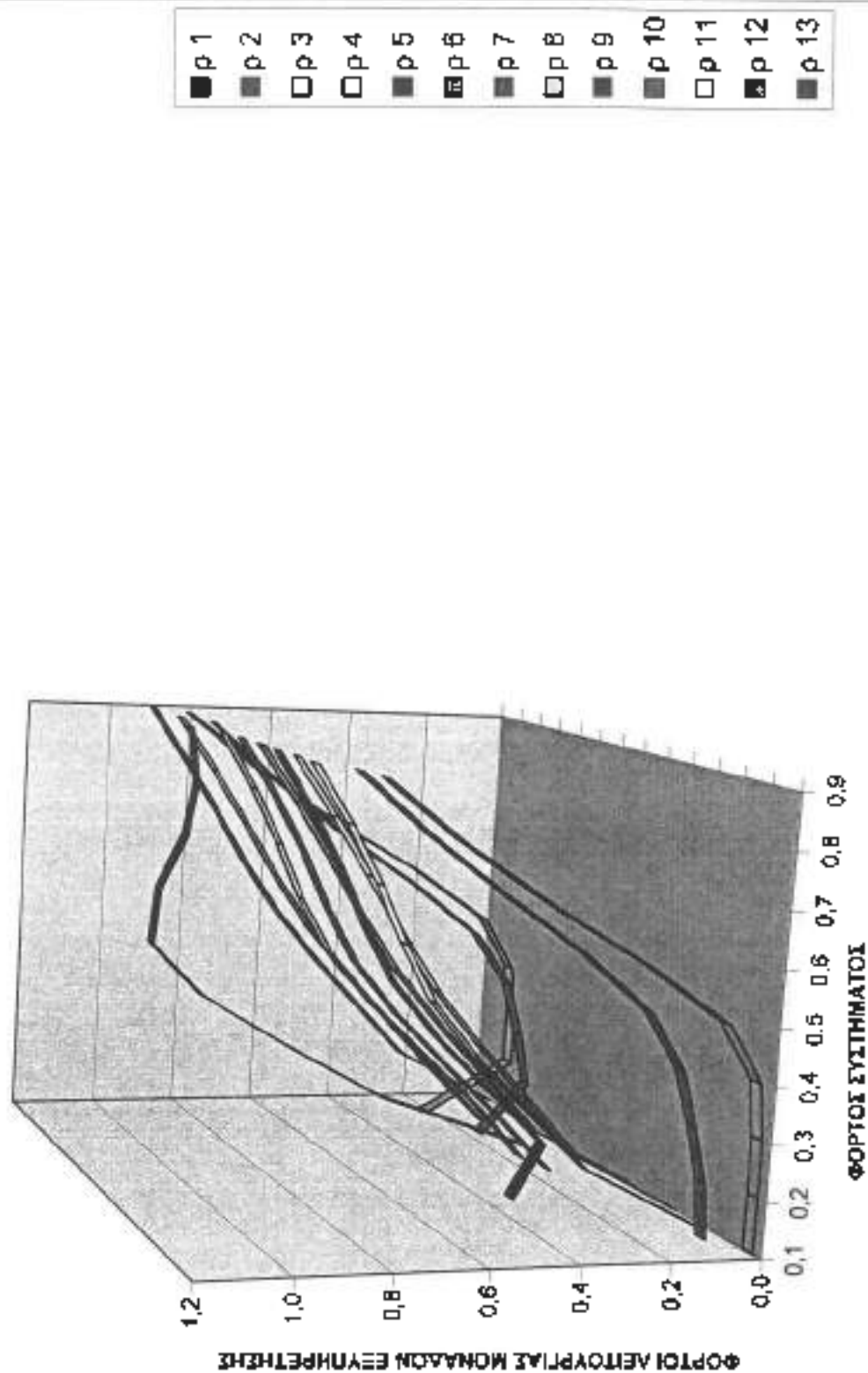
**ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ**



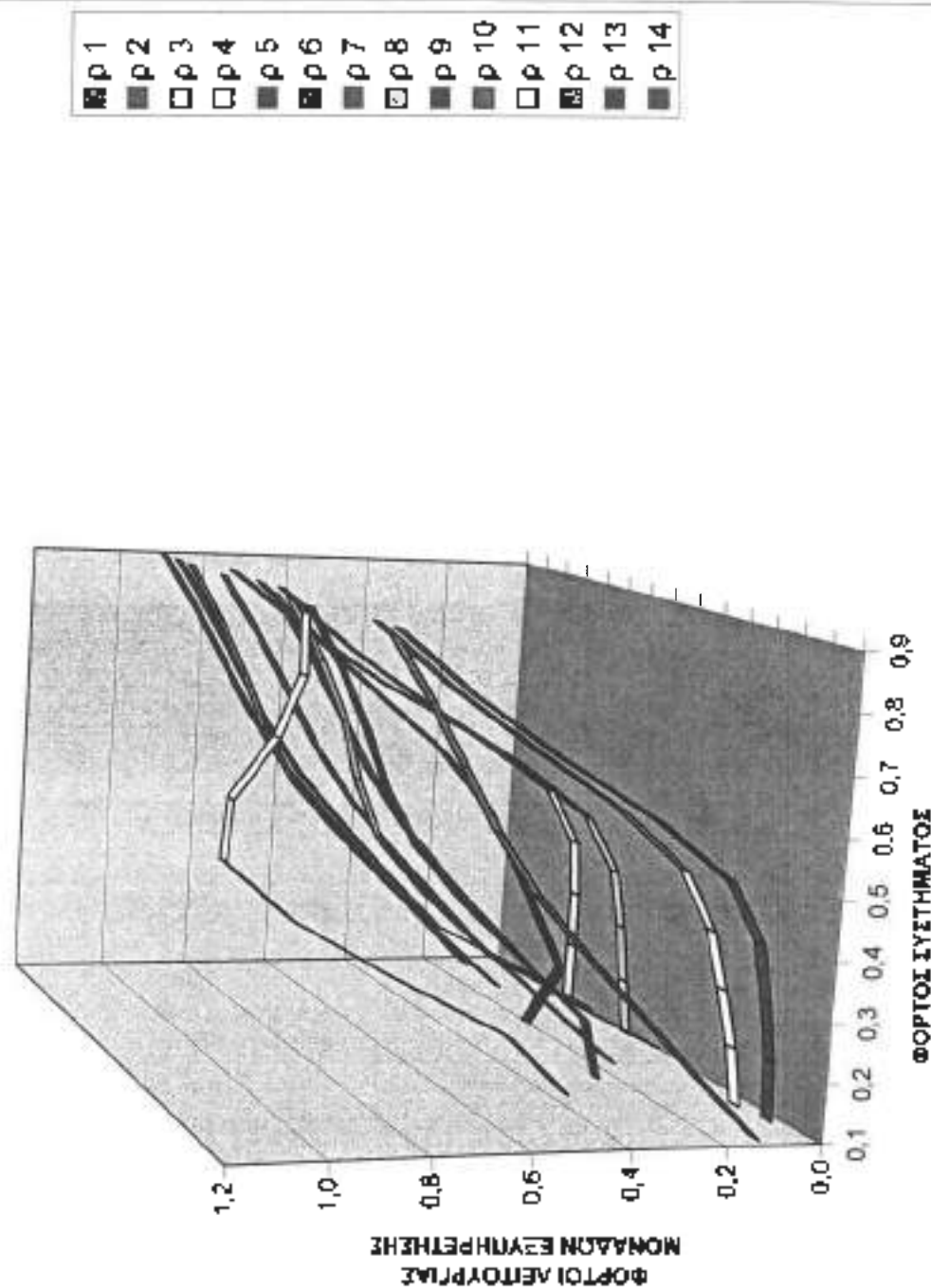
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



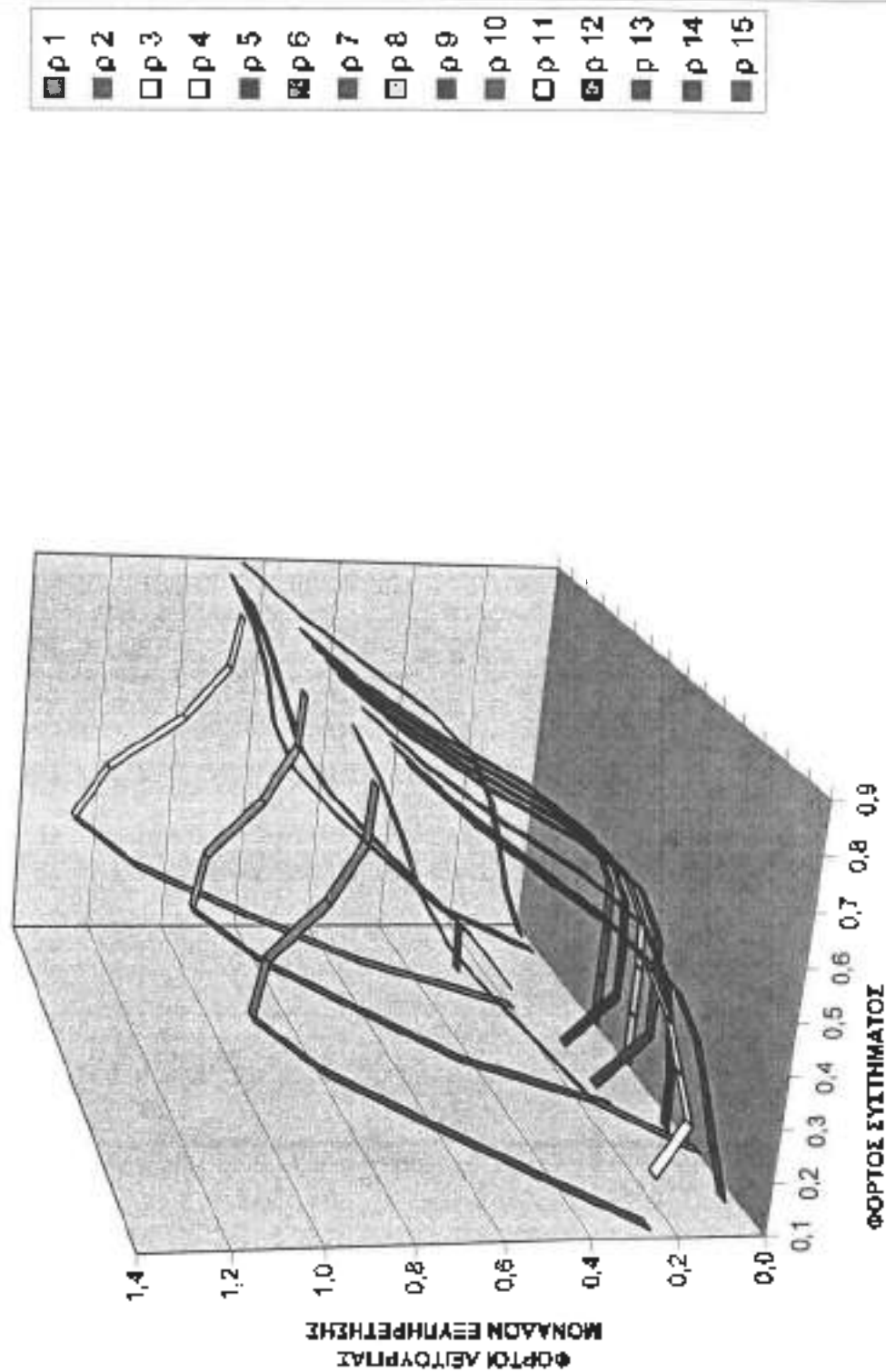
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΠΤΙΚΗ
ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



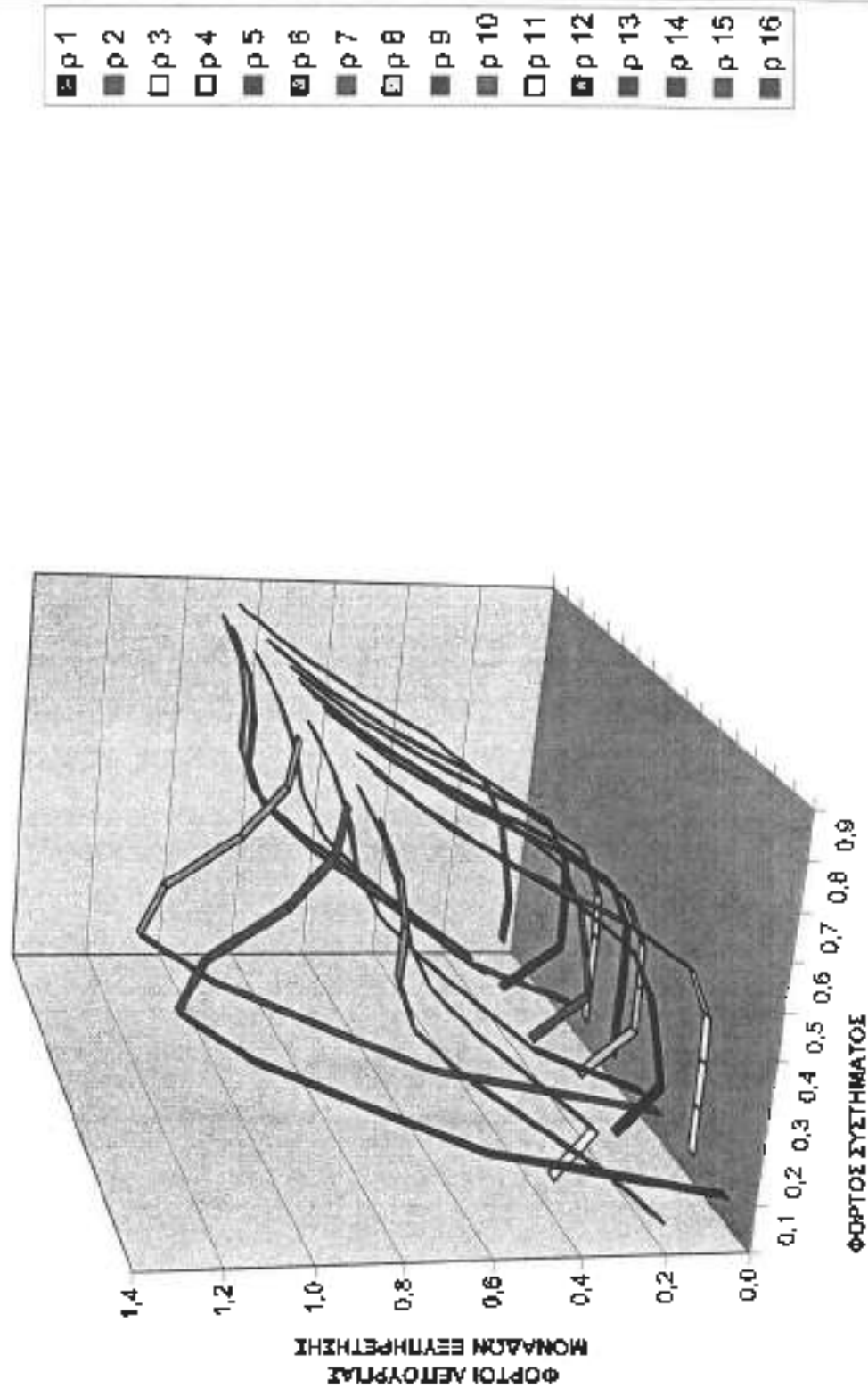
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



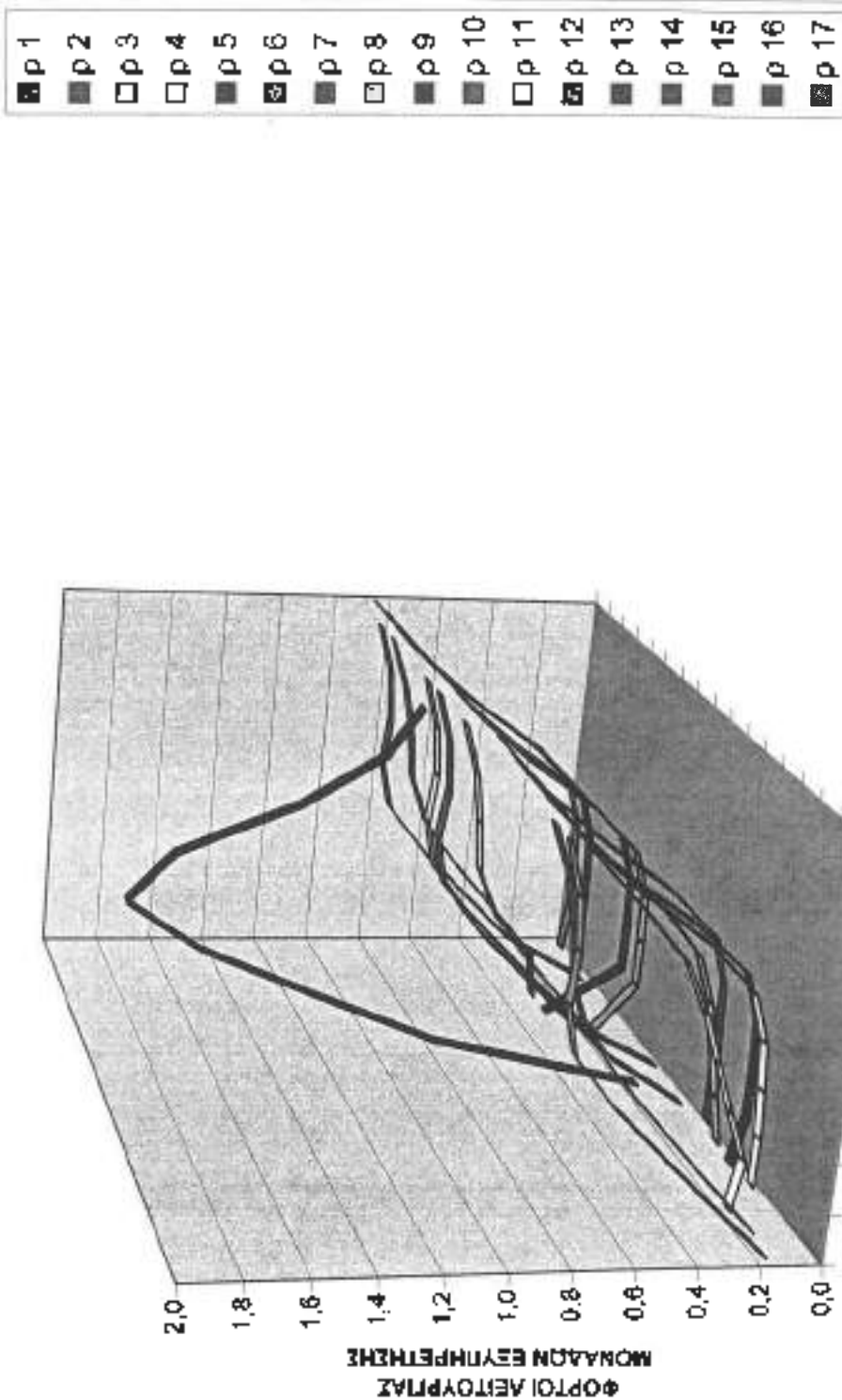
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



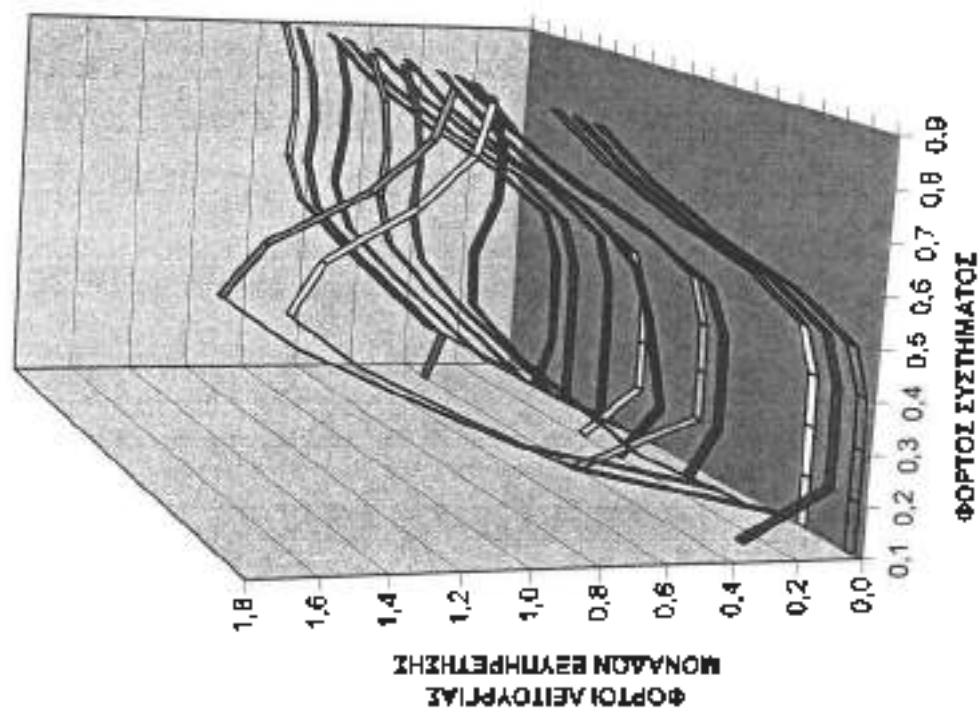
**ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΥΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ**



ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ

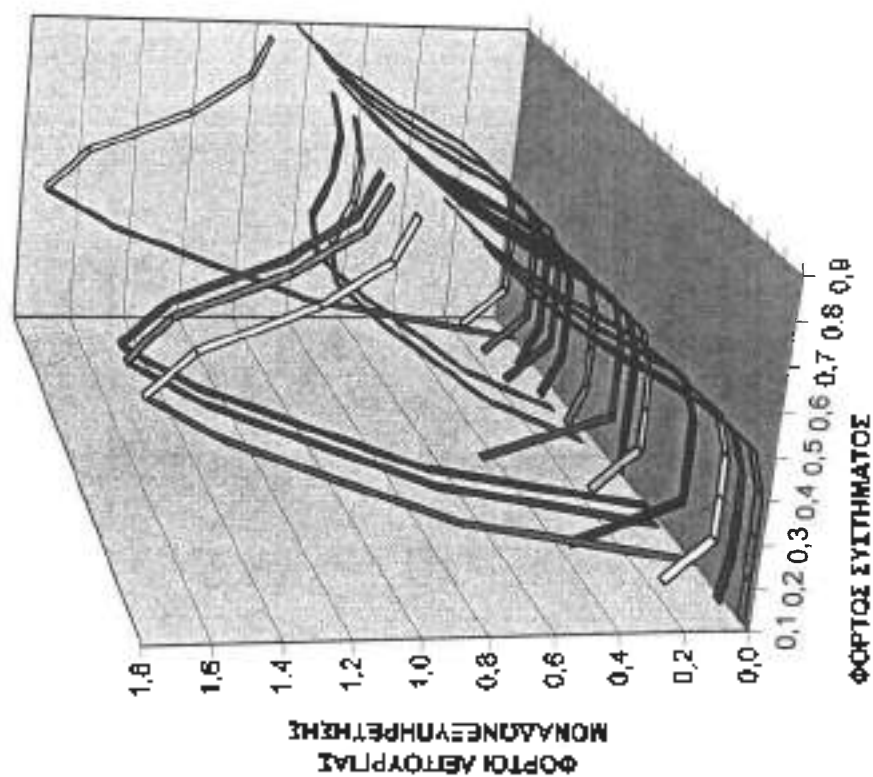


ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



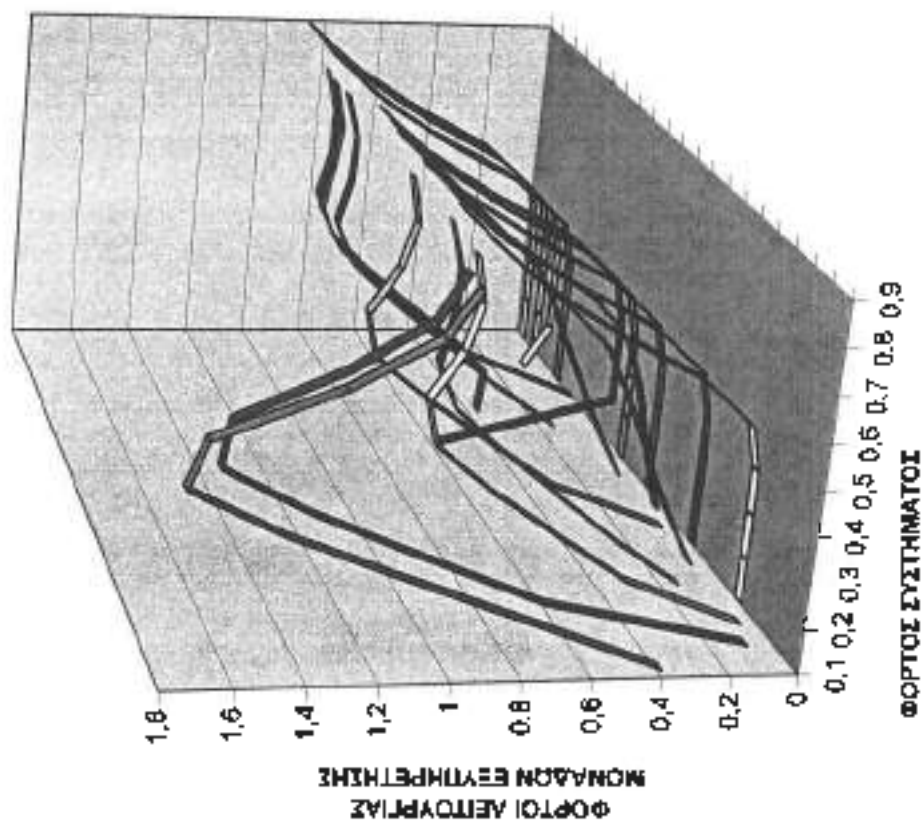
- ρ 1
- ρ 2
- ρ 3
- ρ 4
- ρ 5
- ρ 6
- ρ 7
- ρ 8
- ρ 9
- ρ 10
- ρ 11
- ρ 12
- ρ 13
- ρ 14
- ρ 15
- ρ 16
- ρ 17
- ρ 18

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΠΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



- ρ 1
- ρ 2
- ρ 3
- ρ 4
- ρ 5
- ρ 6
- ρ 7
- ρ 8
- ρ 9
- ρ 10
- ρ 11
- ρ 12
- ρ 13
- ρ 14
- ρ 15
- ρ 15
- ρ 17
- ρ 18
- ρ 19

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΦΟΡΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΦΟΡΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΟΛΠΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ



- ρ 1
- ρ 2
- ρ 3
- ρ 4
- ρ 5
- ρ 6
- ρ 7
- ρ 8
- ρ 9
- ρ 10
- ρ 11
- ρ 12
- ρ 13
- ρ 14
- ρ 15
- ρ 16
- ρ 17
- ρ 18
- ρ 19
- ρ 20

8.ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την διπλωματική εργασία μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες: α) σε συμπεράσματα που προέκυψαν από την ανάλυση του 2^{ου} κεφαλαίου και αφορούν τη χωροθέτηση μίας μονάδας ανταπόκρισης σε οδικό τμήμα με συγκεκριμένες λειτουργικές διαμορφώσεις και β) σε συμπεράσματα που πηγάζουν από τη λειτουργία του συστήματος ως ένα σύστημα αναμονής.

Α). Για την επιλογή της στρατηγικής χωροθέτησης των μονάδων ανταπόκρισης με γνώμονα την ελαχιστοποίηση της διανυσθείσας απόστασης D, είναι αναγκαία η διαμόρφωση όλων των εναλλακτικών σεναρίων εύρους λειτουργίας του συστήματος. Και αυτό γιατί η διαίρεση της συνολικής περιοχής εξυπηρέτησης σε υποπεριοχές αποκλειστικής ευθύνης διαφοροποιείται ανάλογα με τον αριθμό των επιχειρησιακά ενεργών κάθε φορά μονάδων ανταπόκρισης. Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές, το μήκος και συνεπώς ο φόρτος ή ακόμα και η λειτουργική διαμόρφωση κάθε υποπεριοχής αλλάζει. Αρά είναι δυνατό να διαφοροποιείται όχι μόνο ο ρυθμός άφιξης αιτήσεων λ αλλά κυρίως ο αριθμός των μη διακοπτόμενων τμημάτων διαχωριστικής νησίδας που εμπεριέχεται σε κάθε υποπεριοχή. Συνεπώς η εξαγωγή ασφαλούς συμπεράσματος για την χωροθέτηση κάθε μονάδας εξυπηρέτησης στην αντίστοιχη προς αυτήν κάθε φορά αποκλειστική περιοχή ευθύνης δεν είναι σίγουρο ότι μπορεί να βασιστεί στα συμπεράσματα του 2^{ου} κεφαλαίου. Η διαδικασία υπολογισμού της συνάρτησης $F(\gamma, L)$ είναι όμως παρόμοια. Άρα βασισμένοι στην ανάλυση του 2^{ου} κεφαλαίου μπορούμε να διατυπώσουμε συμπεράσματα σε περιπτώσεις όπου η διαίρεση της συνολικής περιοχής εξυπηρέτησης οδηγεί στη δημιουργία υποπεριοχών αποκλειστικής ευθύνης:

- οδικών τμημάτων χωρίς διαχωριστική νησίδα σταθερού φόρτου ή όχι, όπου η τοποθέτηση των μονάδων άμεσης βοήθειας πρέπει να γίνεται στη χλιομετρική θέση που αντιστοιχεί στο κέντρο βάρους της συνάρτησης των οχηματοχλιομέτρων όπως αυτή υπολογίζεται από τις μετρήσεις κυκλοφοριακού φόρτου.

- οδικών τμημάτων με διαχωριστική νησίδα άνευ ανοίγματος, σταθερού φόρτου, όπου η τοποθέτηση των μονάδων άμεσης βοήθειας πρέπει να γίνεται εκατέρωθεν της νησίδας, στις χλιομετρικές θέσεις που αντιστοιχούν στο κέντρο βάρους της συνάρτησης των οχηματοχλιομέτρων όπως αυτή υπολογίζεται από τις μετρήσεις κυκλοφοριακού φόρτου σε κάθε κατεύθυνση κυκλοφορίας.

• οδικού τμήματος με δυνατότητα επί τόπου αναστρωφής στην αρχή στο τέλος και σε ένα αυθαιρέτου μήκους εσωτερικό άνοιγμα που αρχίζει σε τυχαία θέση, σταθερού φόρτου όπου η επιλογή μεταξύ περιτολίας εναλλάξ στις δύο κυκλοφοριακές κατευθύνσεις και προ τοποθέτησης της μονάδας ανταπόκρισης στο μέσο του ανοίγματος εξαρτάται από τη σχετική θέση του ανοίγματος και ασφαλώς το σχετικό του μήκος.

Επιπλέον η κατασκευή νησίδας άνευ ανοίγματος κατά μήκος οδικού τμήματος σταθερού φόρτου επιβαρύνει την μέση τιμή της προσδοκώμενης απόστασης D κατά 50% όταν η ζήτηση για παροχή εξυπηρέτησης παρέχεται από μία και μόνο μονάδα ανταπόκρισης στο τμήμα αυτό.

Β). Ο προκαθορισμός μίας πολύ επίπεδης στρατηγικής αλληλοκάλυψης μεταξύ των N το πλήθος μονάδων ανταπόκρισης όπως αυτή εκφράζεται από το $N \times N$ μητρώο προκαθορισμένων πολιτικών εκχώρησης αιτήσεων αυξάνει την αντίσταση του συστήματος έναντι κορεσμού γιατί εξαντλεί τη δυνατότητα αποστολής κάθε διατιθέμενου πόρου. Επίσης οδηγεί στην άμβλυνση των ανισορροπιών των φόρτων λειτουργίας μεταξύ των μονάδων, ανισορροπία που θα προκαλούσε η λειτουργία του συστήματος με αποκλειστικές περιοχές ευθύνης και έλλειψη συνεργασίας μεταξύ των μονάδων. Επιπλέον η μη ανεξάρτητη λειτουργία των μονάδων εξυπηρέτησης, όπως εκφράζεται από το διορθωτικό συντελεστή Q , αυξάνεται γεωμετρικά καθώς το σύστημα αναμονής πλησιάζει τη κατάσταση κορεσμού.

Η παραμετρική επίλυση του αλγορίθμου του Α.Οdoni στο 7^ο κεφάλαιο, κατέστησε σαφές ότι ο φόρτος λειτουργίας κάθε μονάδας ανταπόκρισης ρ_i είναι συνάρτηση δύναμης του βαθμού χρησιμοποίησης όλου του συστήματος ρ όταν υφίσταται πολύ επίπεδη στρατηγική αλληλοκάλυψης.

 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

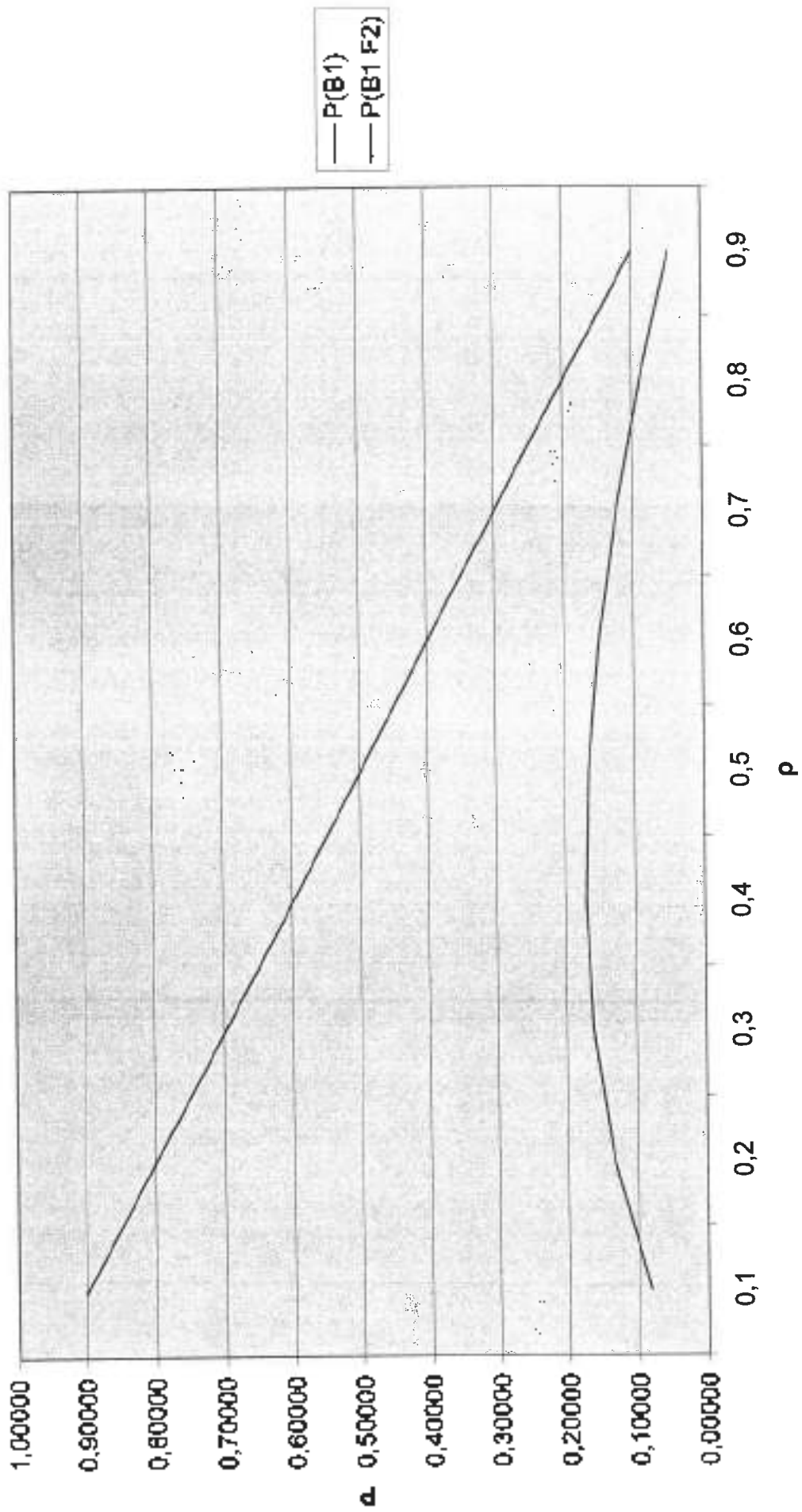
- UOR., MIT Press, Cambridge, Mass
- BLATTNER & ULRICH, QUE PRESS. MICROSOFT EXCEL 2000
- DRAKE, A. W., Fundamentals of Applied Probability, McGraw-Hill, New York, 1967.
- HAUSNER, J., Determining the Travel Characteristics of Emergency Service Vehicles, R-1687-HUD, The New York City Rand Institute, April 1973.
- JARVIS, J.P., K.A. STEVENSON, and T.R. WILLEMAIN, A Simple Procedure for the Allocation of Ambulances in Semi-Rural Areas, Technical Report TR-13-75, MIT Operations Research Center, Cambridge, Mass., March 1975.
- KENDALL, M G., and P.A.P. MORAN, Geometrical Probability. Charles Griffen, London, 1963
- LARSON, R.C., Urban Police Patrol Analysis, MIT Press, Cambridge, Mass., 1972.
- LARSON, R.C., and K.A. STEVENSON, "On Insensitivities in Urban Redistricting and Facility Location," Operations Research, 20, 596-612 (1972).
- ROGERS, A., Statistical analysis of Spatial Dispersion: The Quadrat Method, Pion Ltd., London, 1974.
- SOLOMON H., Geometric Probability, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1978
- DISNEY, R. L., Queueing Networks, Department of Industrial Engineering and Operations Research, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Va., 1979.
- EDIE, L. C., "Traffic Delays at Toll Booths," Operations Research, 2, 107-138 (1954).
- GROSS, D., AND C. M. HARRIS, Fundamentals of Queueing Theory, Wiley, New York, 1974.
- HENGSBACH, G., AND A. R. ODONI, Time-Dependent Estimates of Delays and Delay Costs, at Major Airports, Report R75-4, MIT Flight Transportation Laboratory, Cambridge, Mass., 1975
- IGNALL, E. L, P. KOLESAR, AND W. F. WALKER, "Using Simulation to Develop and Validate Analytic Models: Some Case Studies," Operations Research, 26, 237-253 (1978).
- KINGMAN, J. F. C., "On Queues in Heavy Traffic," Journal of the Royal Statistical Society. Series B, 24, 383-392 (1962).
- KLEINROCK, L., Queueing Systems, Volume I. Theory, Wiley, New York, 1975.
- KLEINROCK, L., Queueing Systems, Volume II: Computer Applications, Wiley, New York, 1976.

- KOLESAR, P. C., K. L. RIDER, T. B. CRABILL, AND W. E. WALKER,
"A Queueing-Linear Programming Approach to Scheduling Police Patrol Cars,"
Operations Research, 23, 1045-1062 (1975).
- KOLLERSTROM, L., "Heavy Traffic Theory for Queues with Several Servers:
I," Journal of Applied Probability, 11, 544-552 (1974).
- KoopMAN, B. O., "Air Terminal Queues under Time-Dependent Conditions,"
Operations Research, 20, 1089-1114 (1972).
- LARSON, R. C., "Improving the Effectiveness of New York City's 911," in
Analysis of Public Systems, A. W. DRAKE, R. L. KEENEY, AND P. M.
MORSE, eds., MIT Press, Cambridge, Mass., 1972.
- LARSON, R. C., Urban Police Patrol Analysis, MIT Press, Cambridge,
Mass., 1972.
- LITTLE, J. D. C., "A Proof of the Queueing Formula $L = W$," Operations
Research, 9, 383-387 (1961).
- MARCHAL, W. G., "Some Simpler Bounds on the Mean Queueing Time,"
Operations Research, 26, 1083-1088 (1978).
- MARSHALL, K. T., "Some Inequalities in Queueing," Operations Research,
16, 651-665 (1968).
- OSUNA, E. F., AND G. F. NEWELL, "Control Strategies for an Idealized
Public Transportation System," Transportation Science, 6 (1), 52-72 (February
1972).
- STIDHAM, S., JR., "A Last Word on $L = W$," Operations Research, 22,
417-421 (1974).

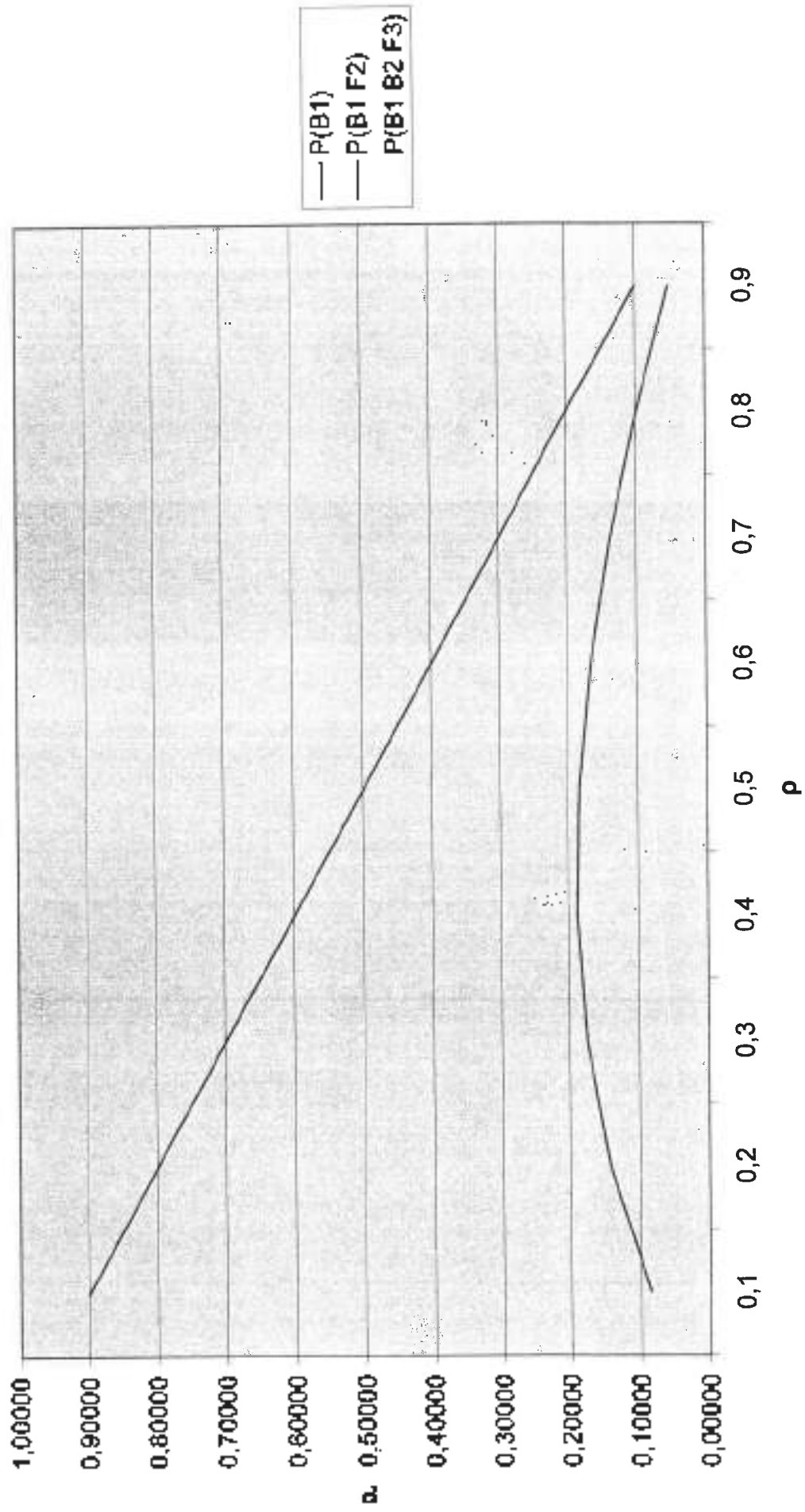
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

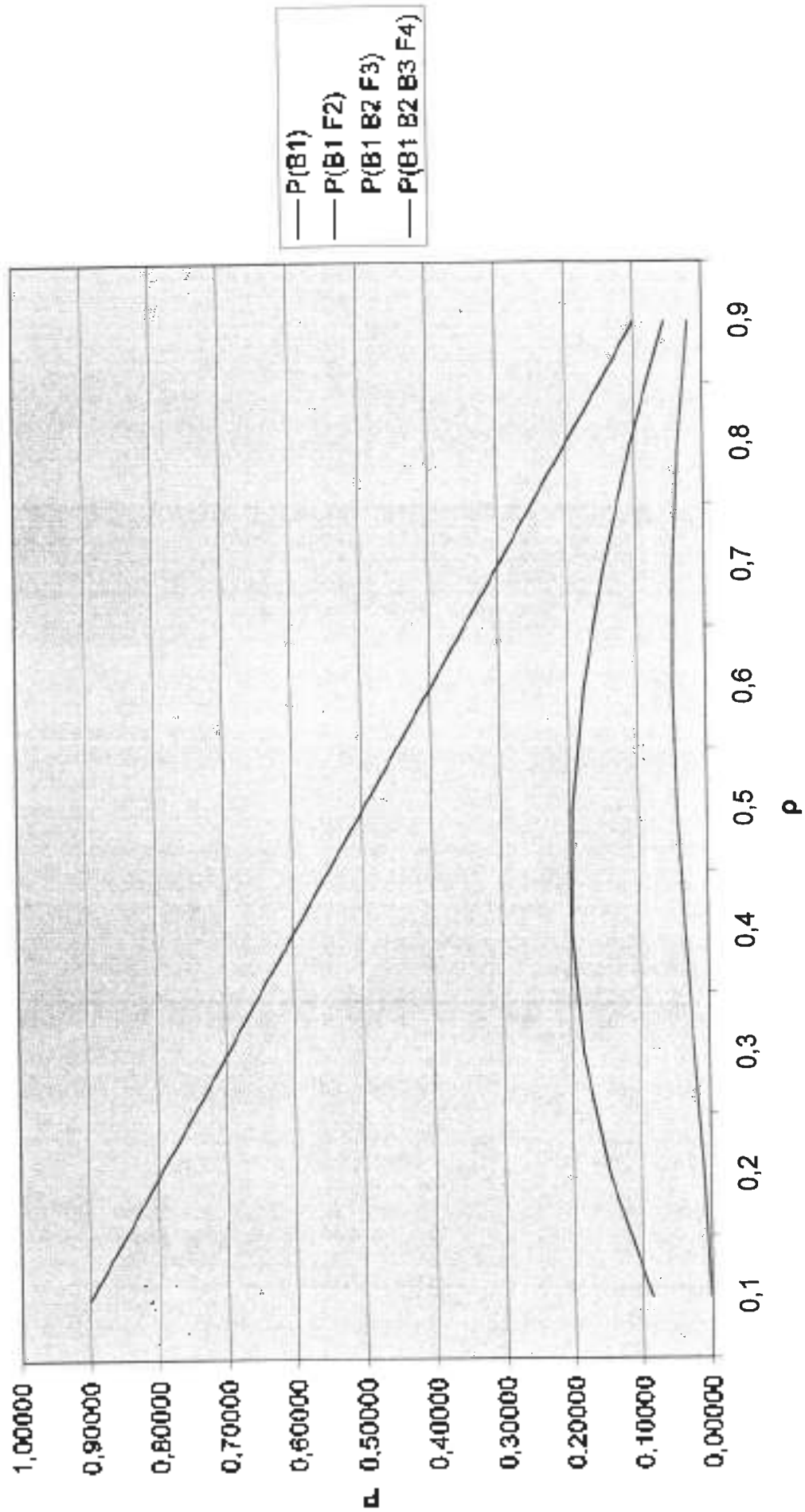
MM2



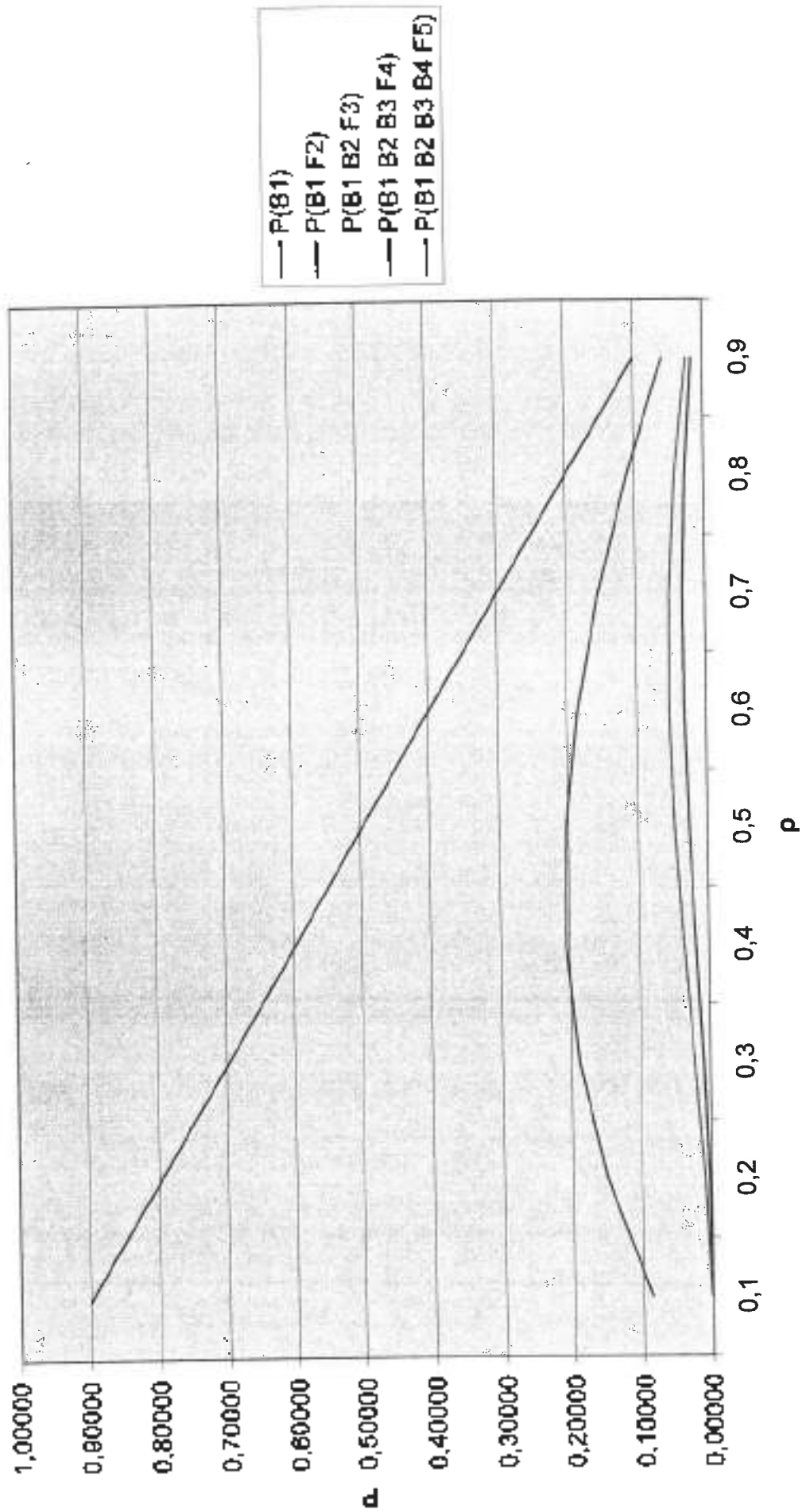
MM3



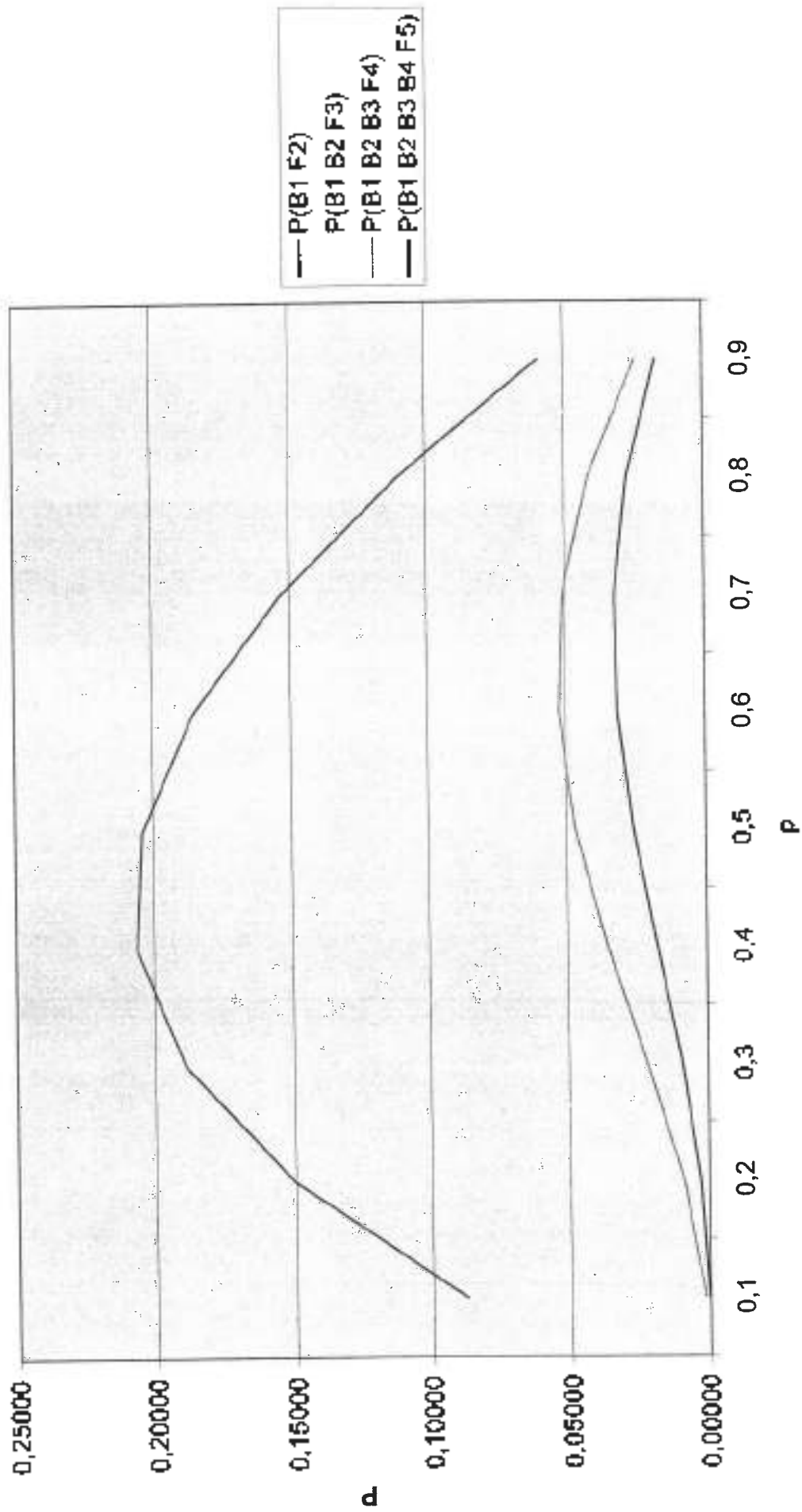
MM4



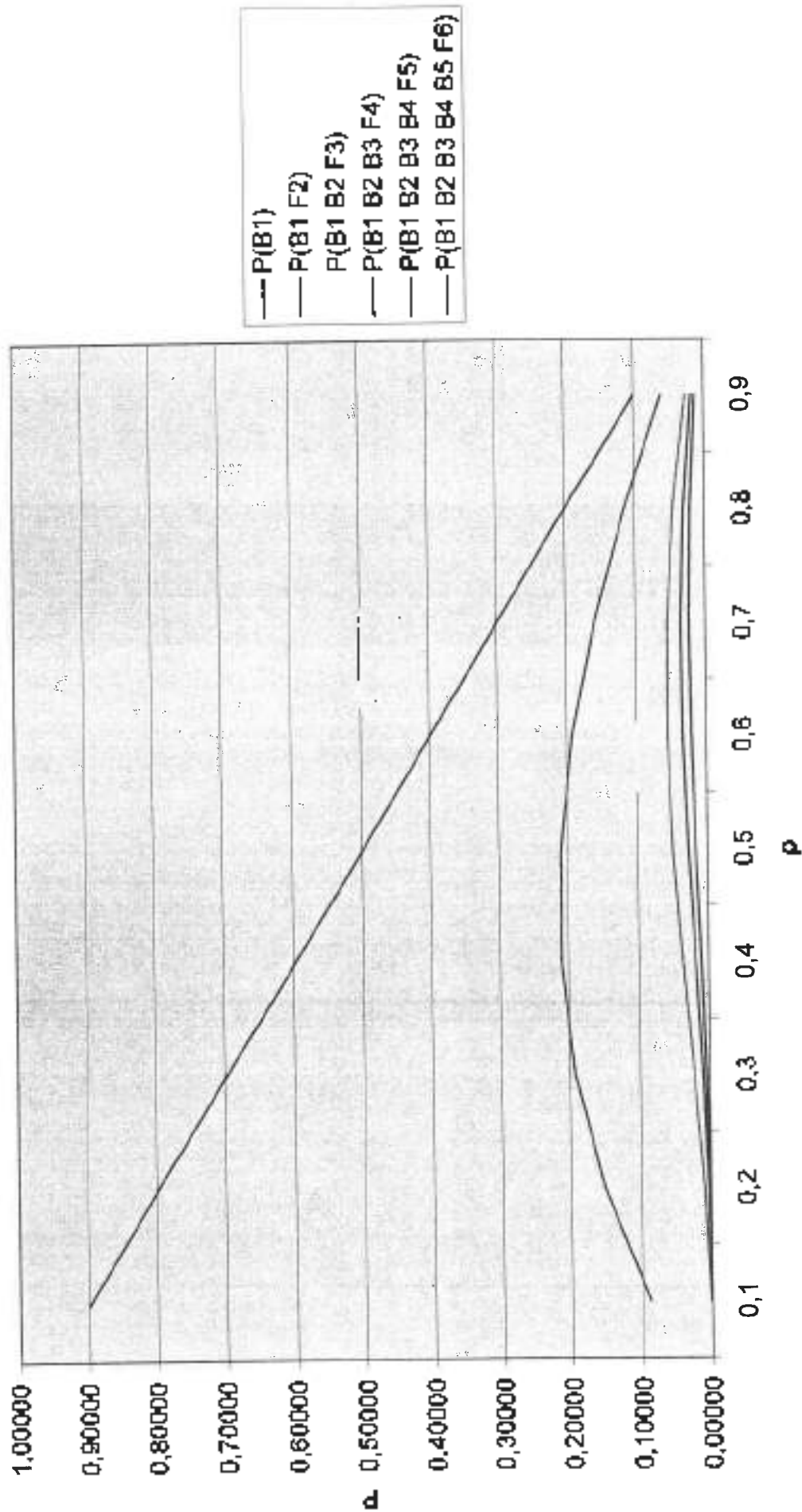
MM5



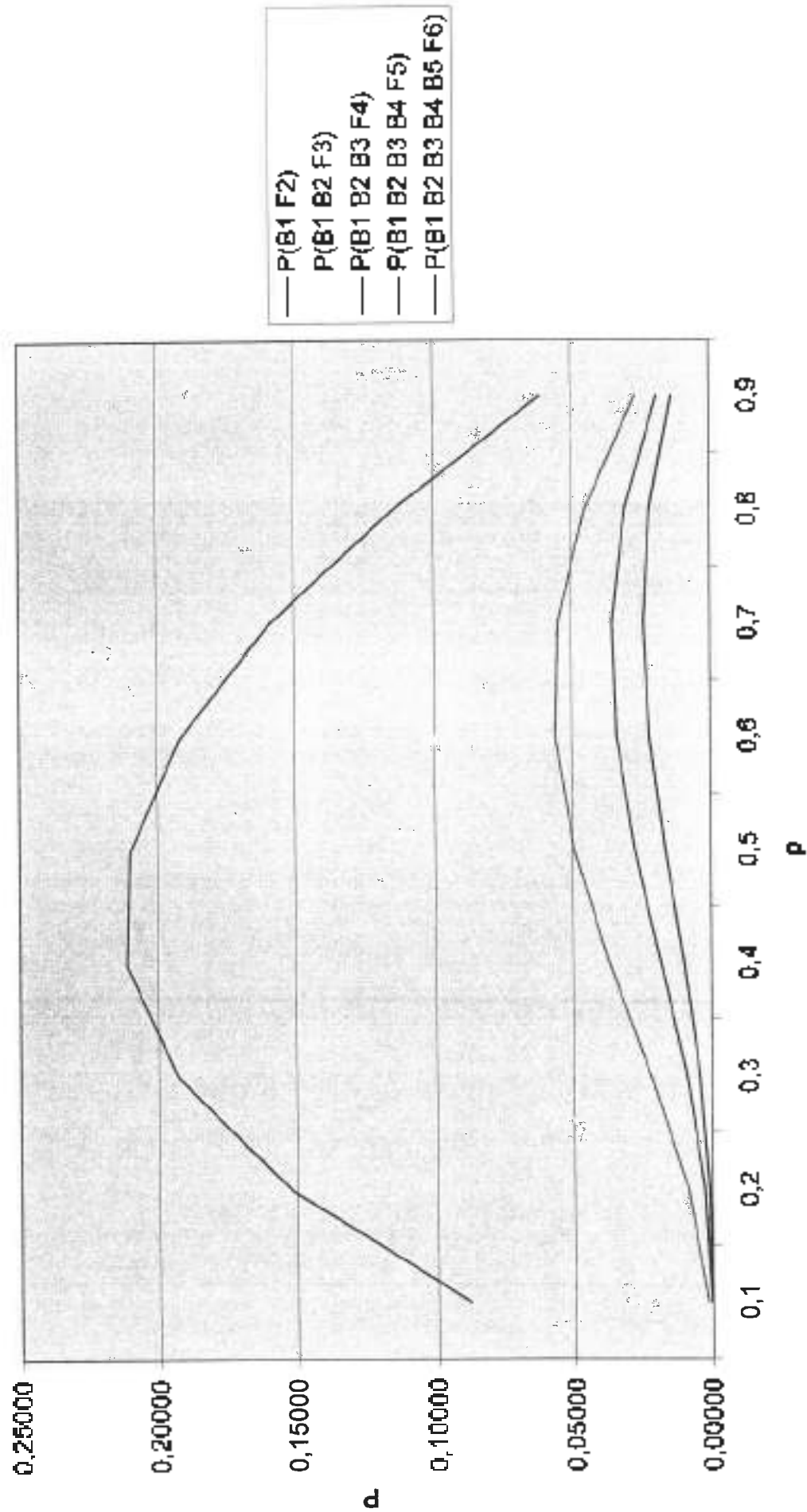
MM5



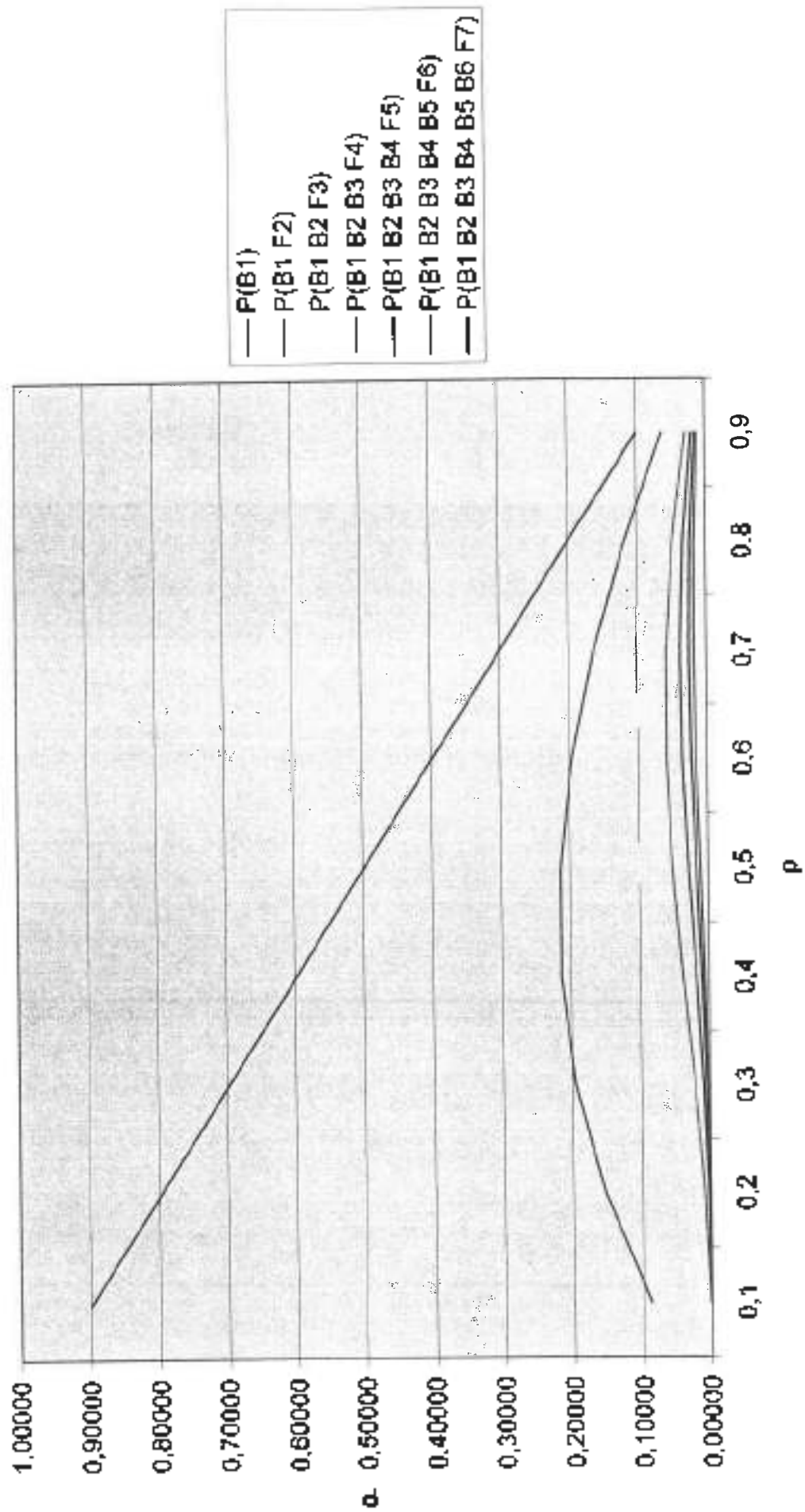
RM16



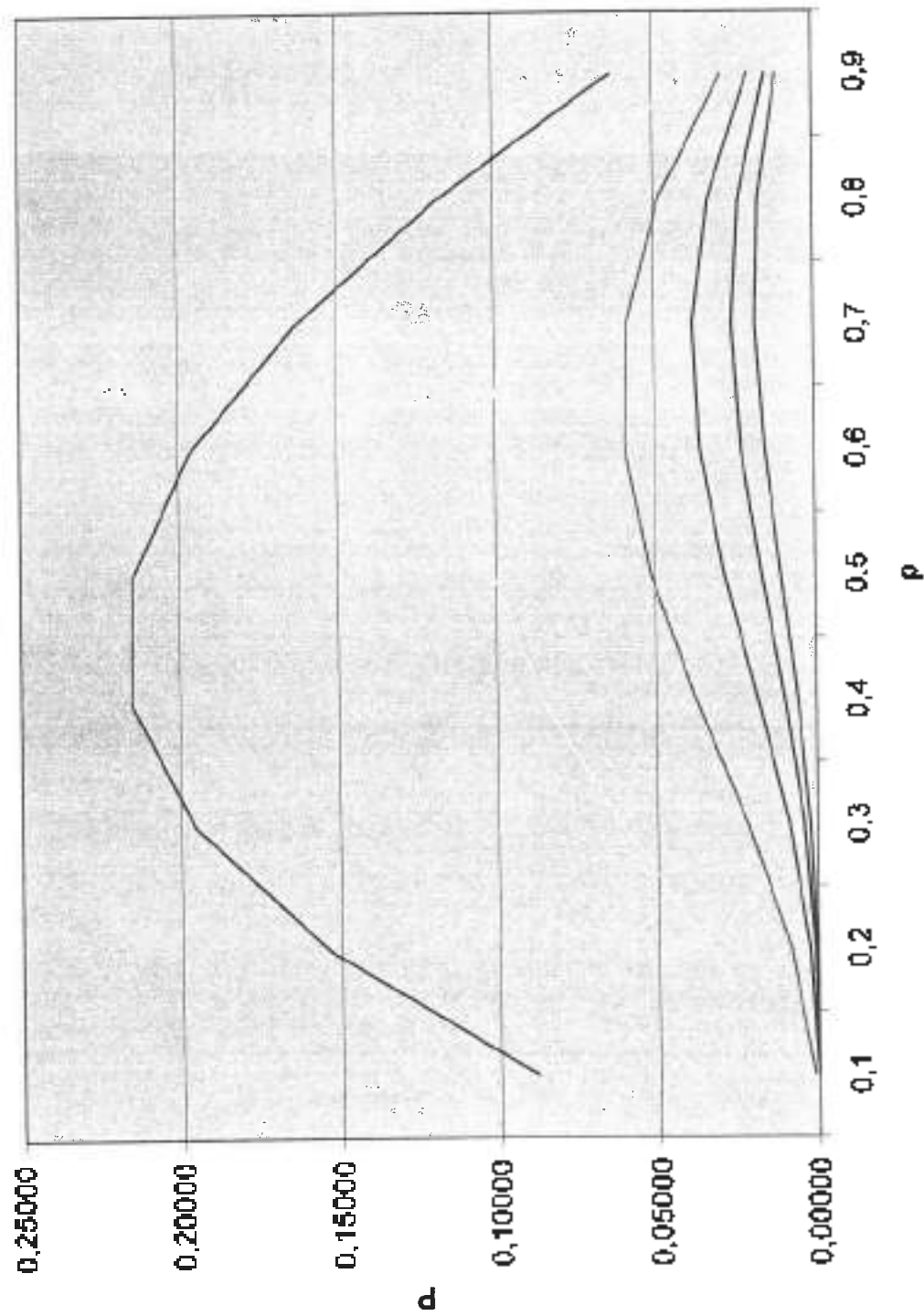
MM6



MM7

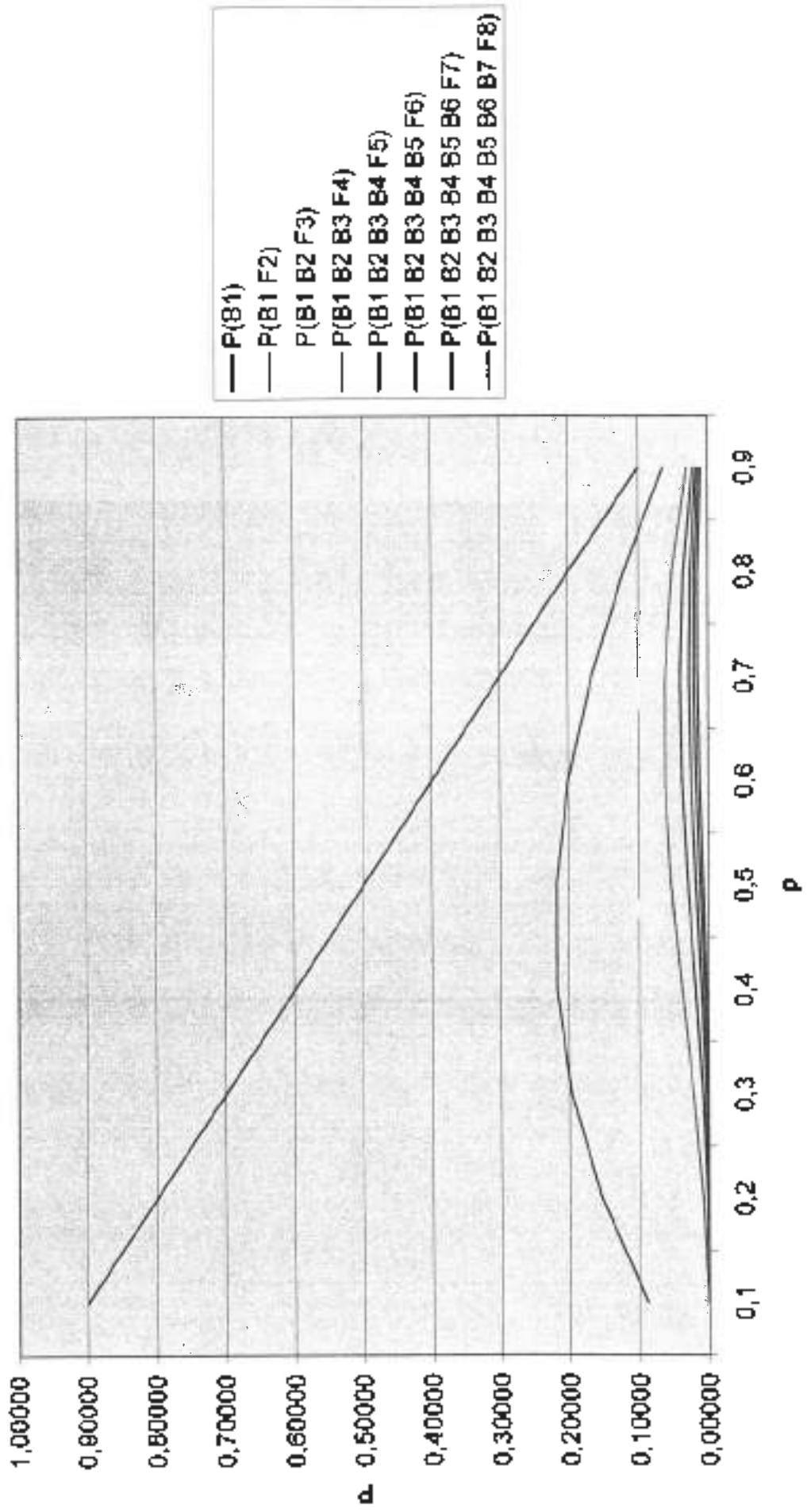


MM7

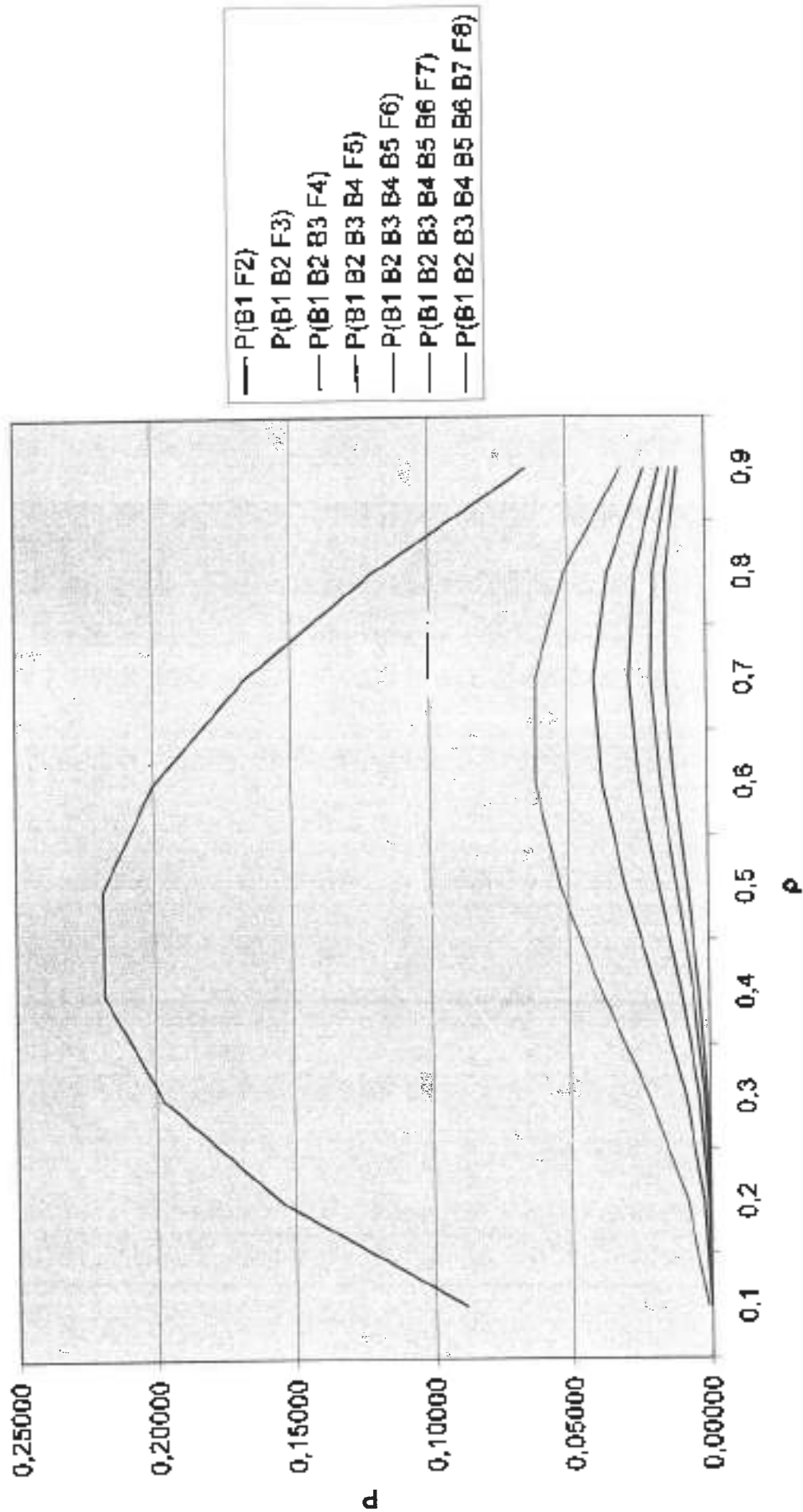


- $P(B1 F2)$
- $P(B1 B2 F3)$
- $P(B1 B2 B3 F4)$
- $P(B1 B2 B3 B4 F5)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)$

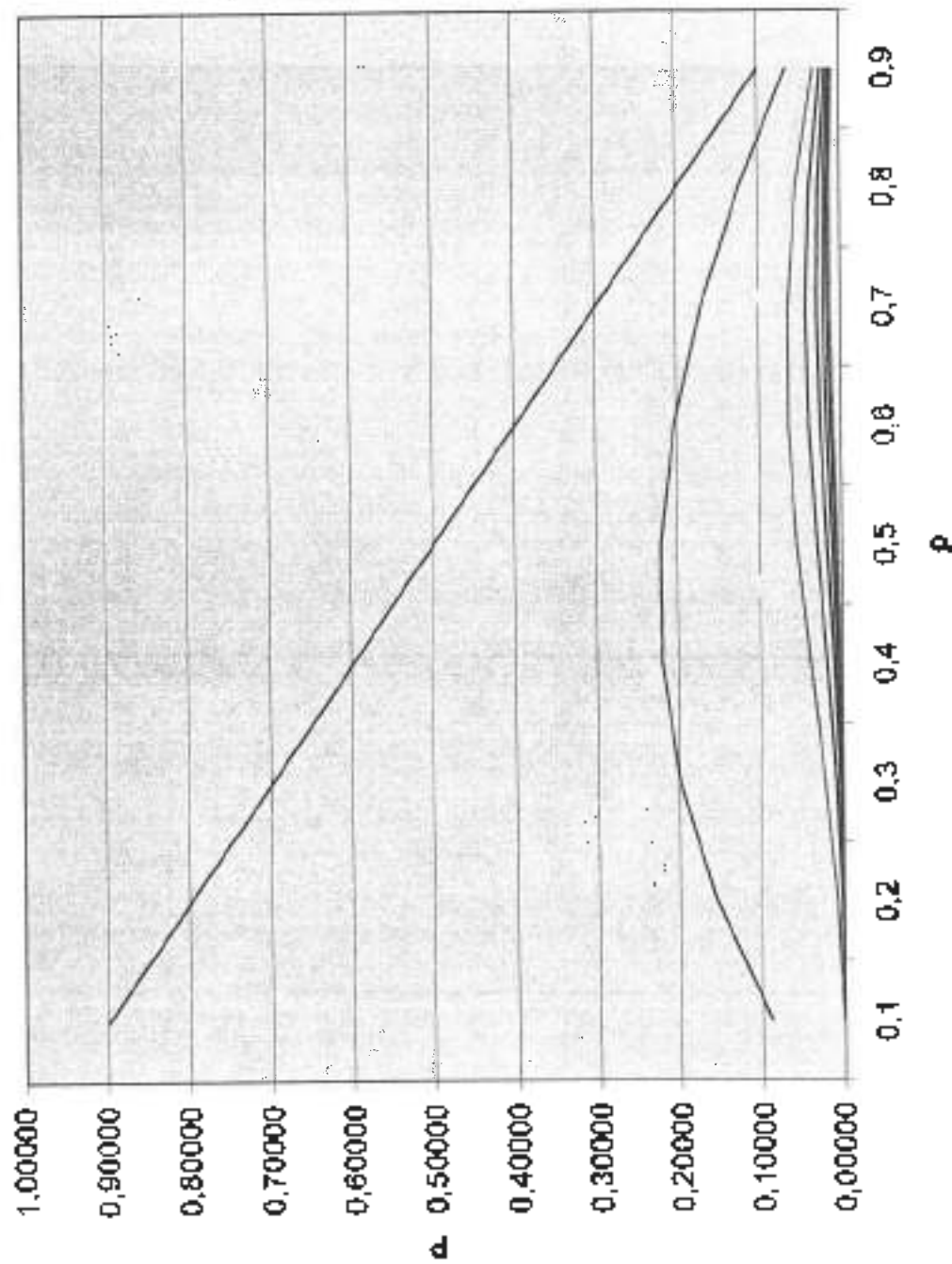
MM8



MM8

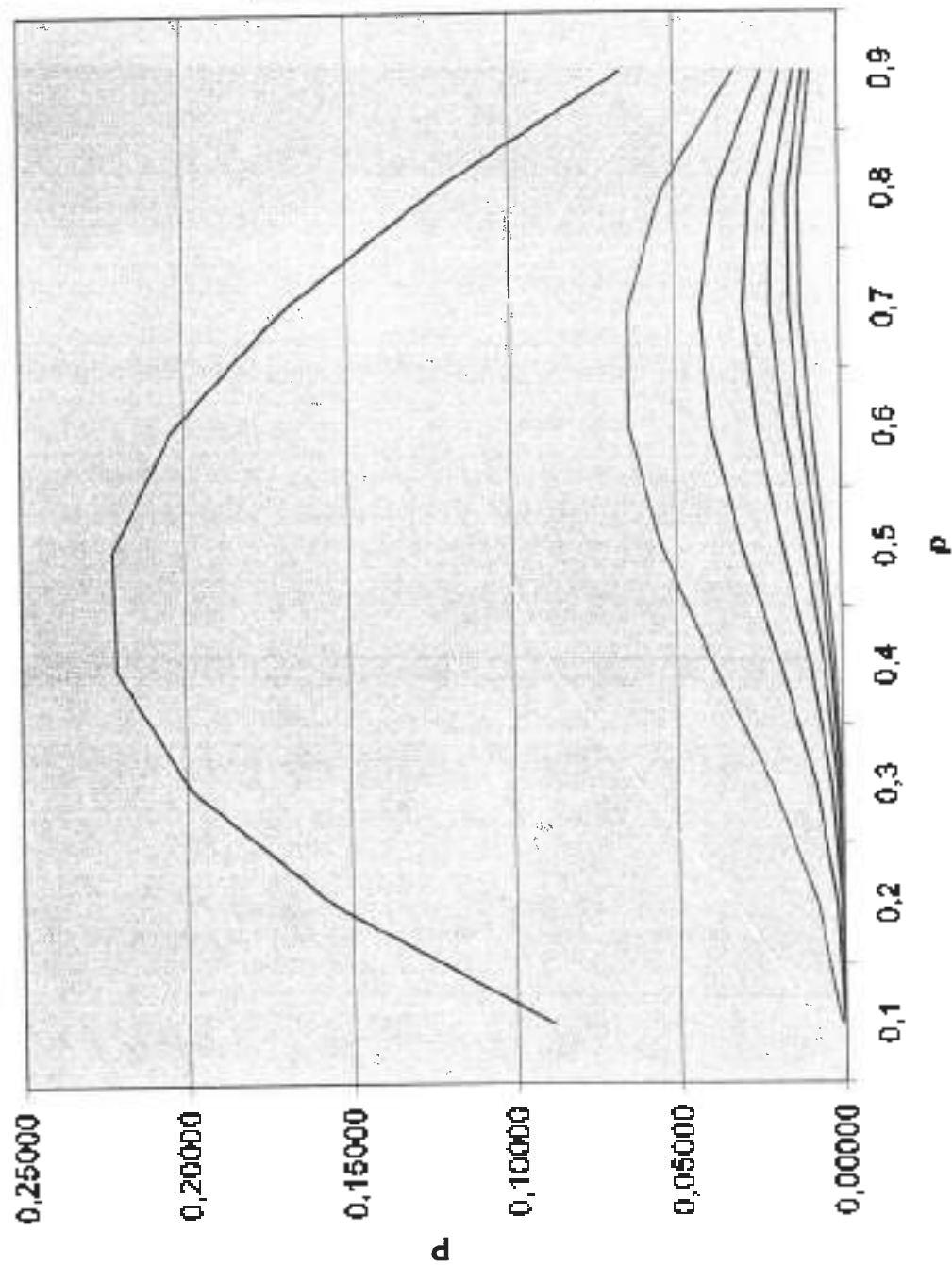


MM9



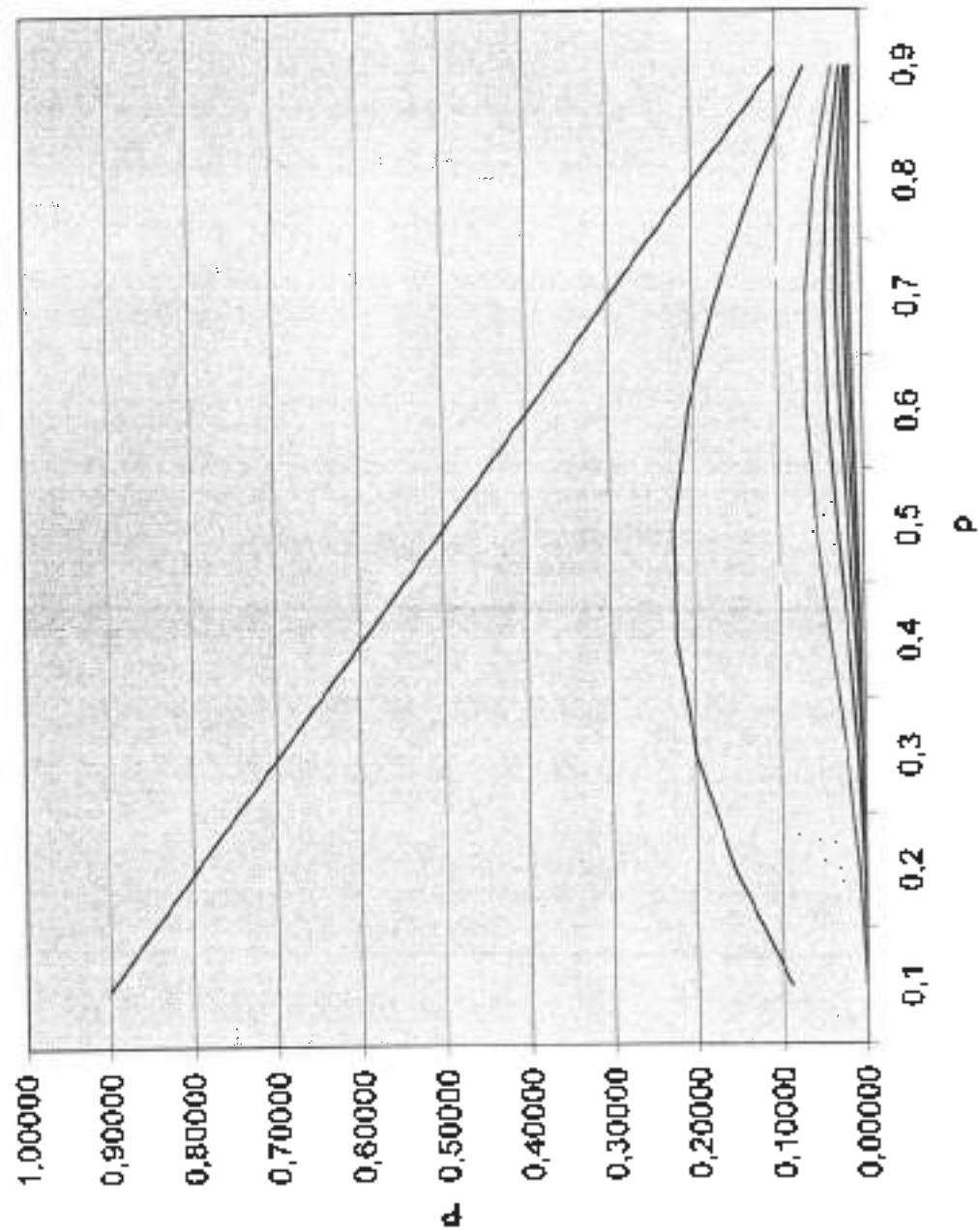
- P(B1)
- P(B1 F2)
- P(B1 B2 F3)
- P(B1 B2 B3 F4)
- P(B1 B2 B3 B4 F5)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)

MM9



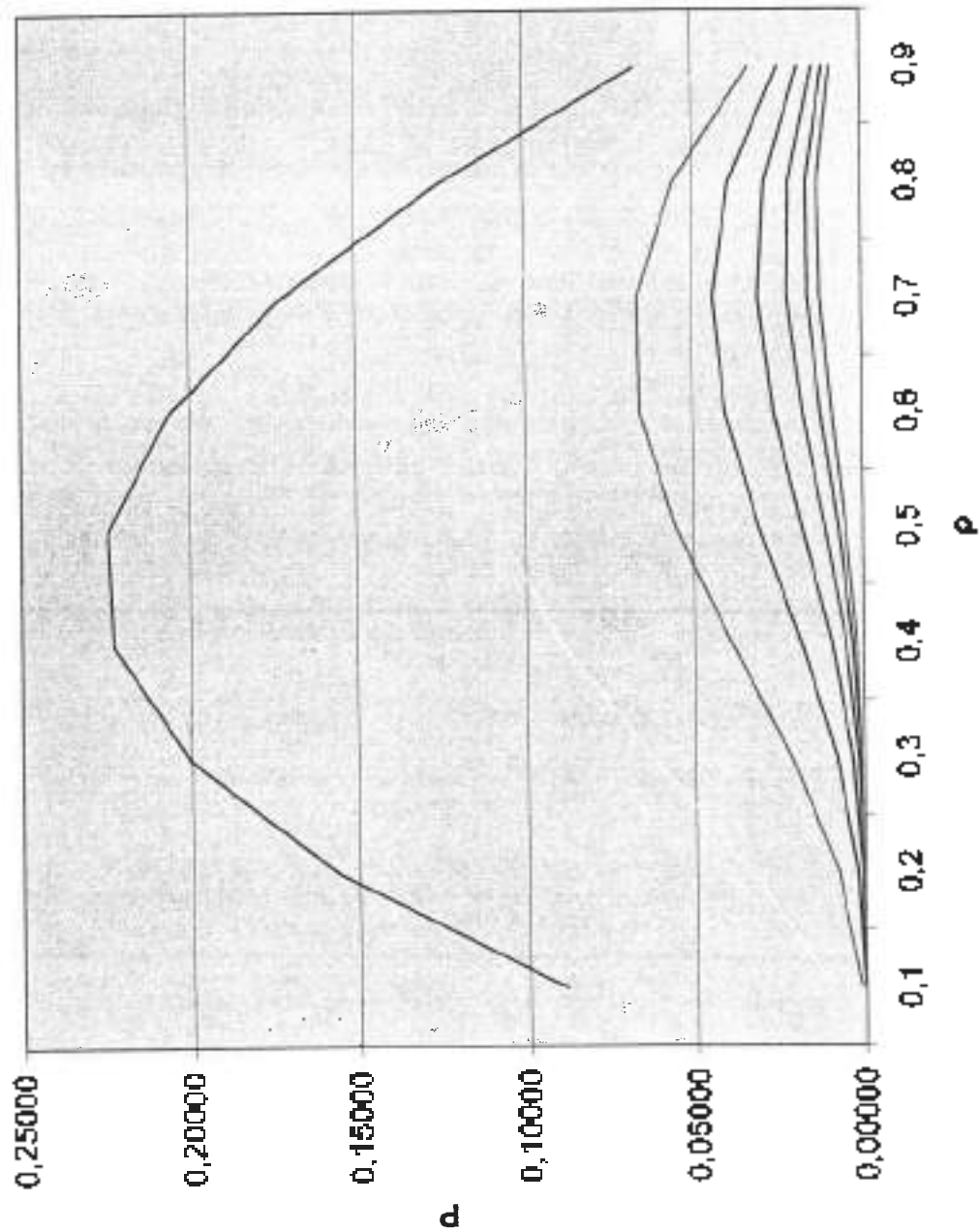
- P(B1 F2)
- P(B1 B2 F3)
- P(B1 B2 B3 F4)
- P(B1 B2 B3 B4 F5)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)

MM10



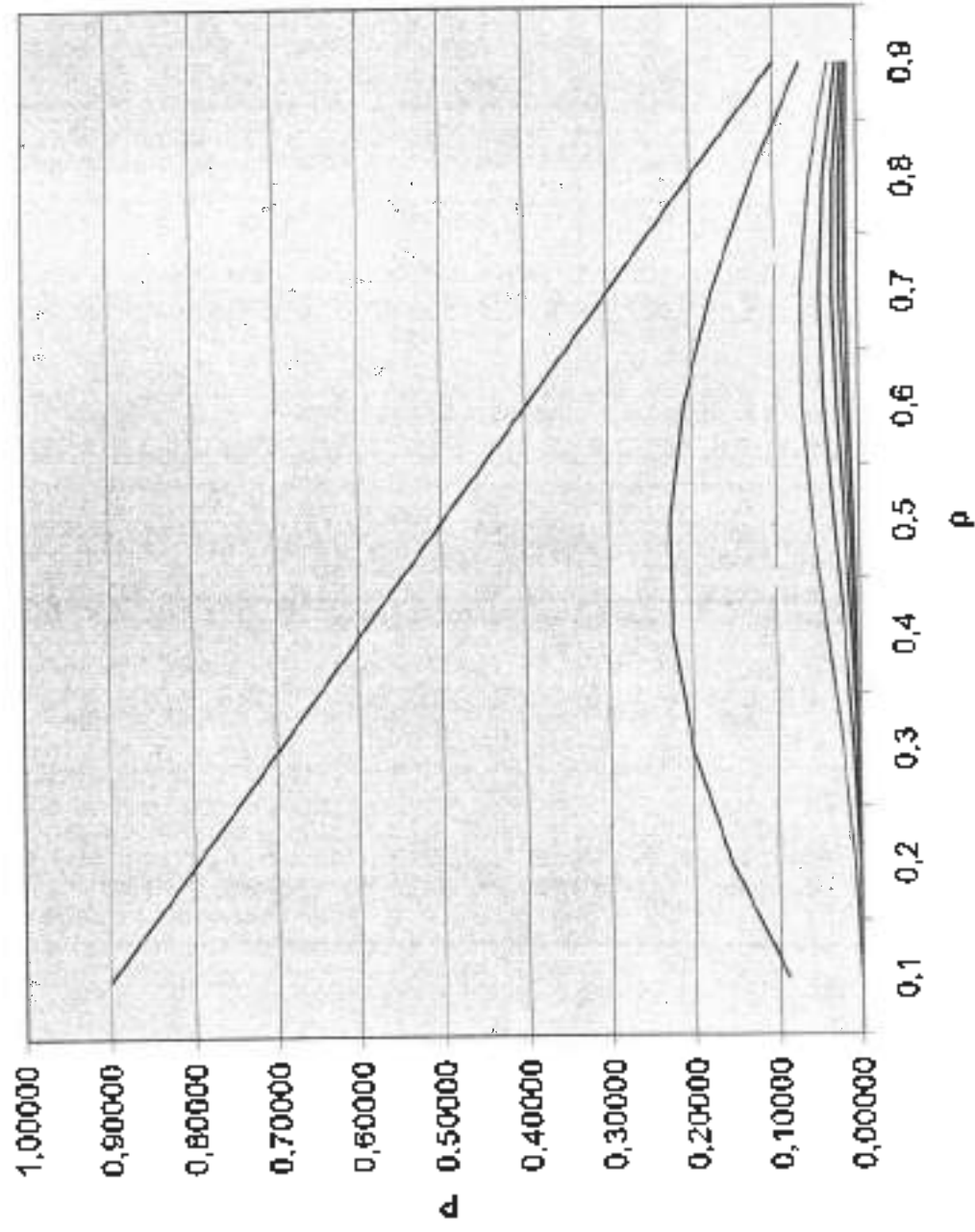
- P(B1)
- P(B1 F2)
- P(B1 B2 F3)
- P(B1 B2 B3 F4)
- P(B1 B2 B3 B4 F5)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)

MN10



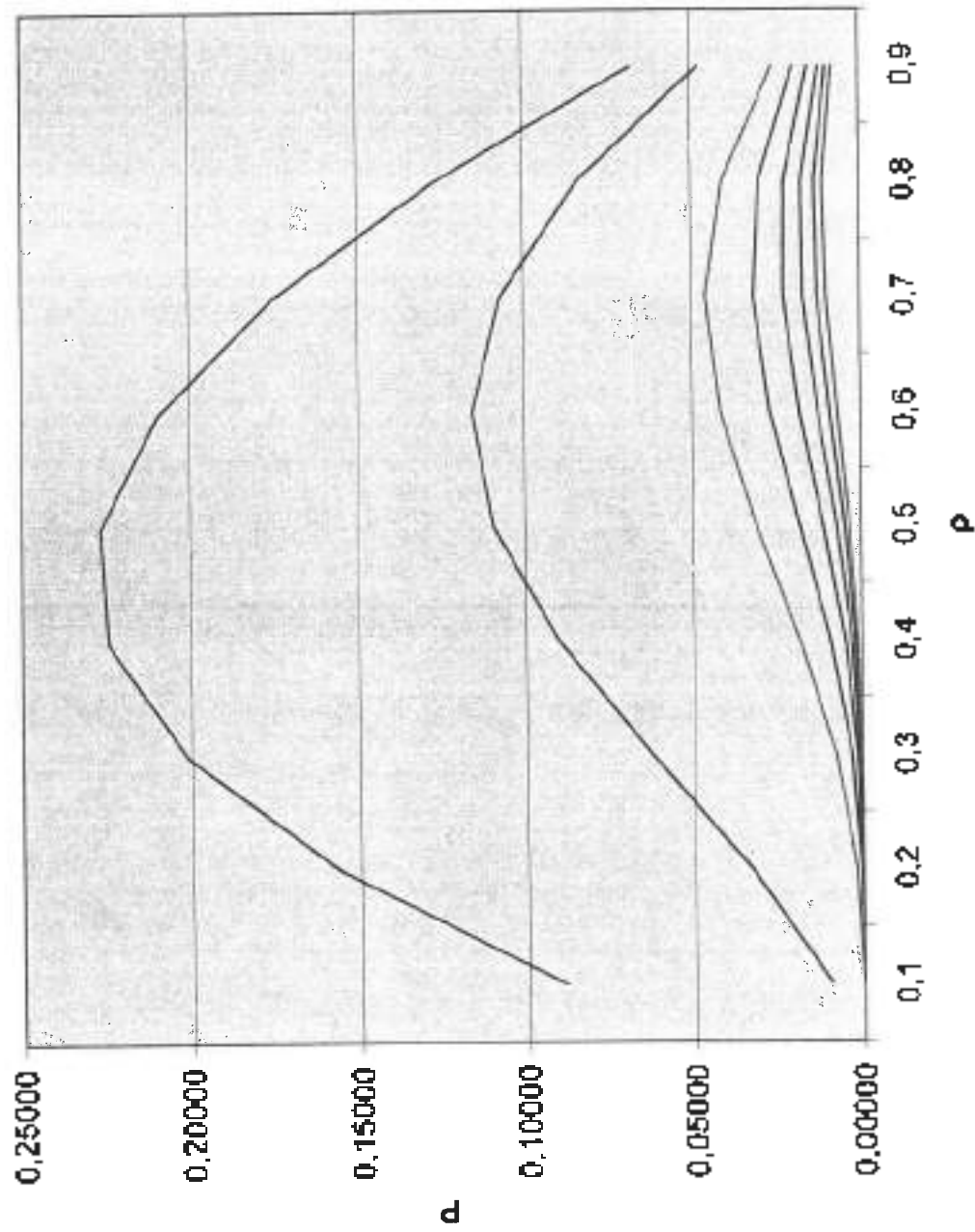
- $P(B1 F2)$
- $P(B1 B2 F3)$
- $P(B1 B2 B3 F4)$
- $P(B1 B2 B3 B4 F5)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)$

MM11



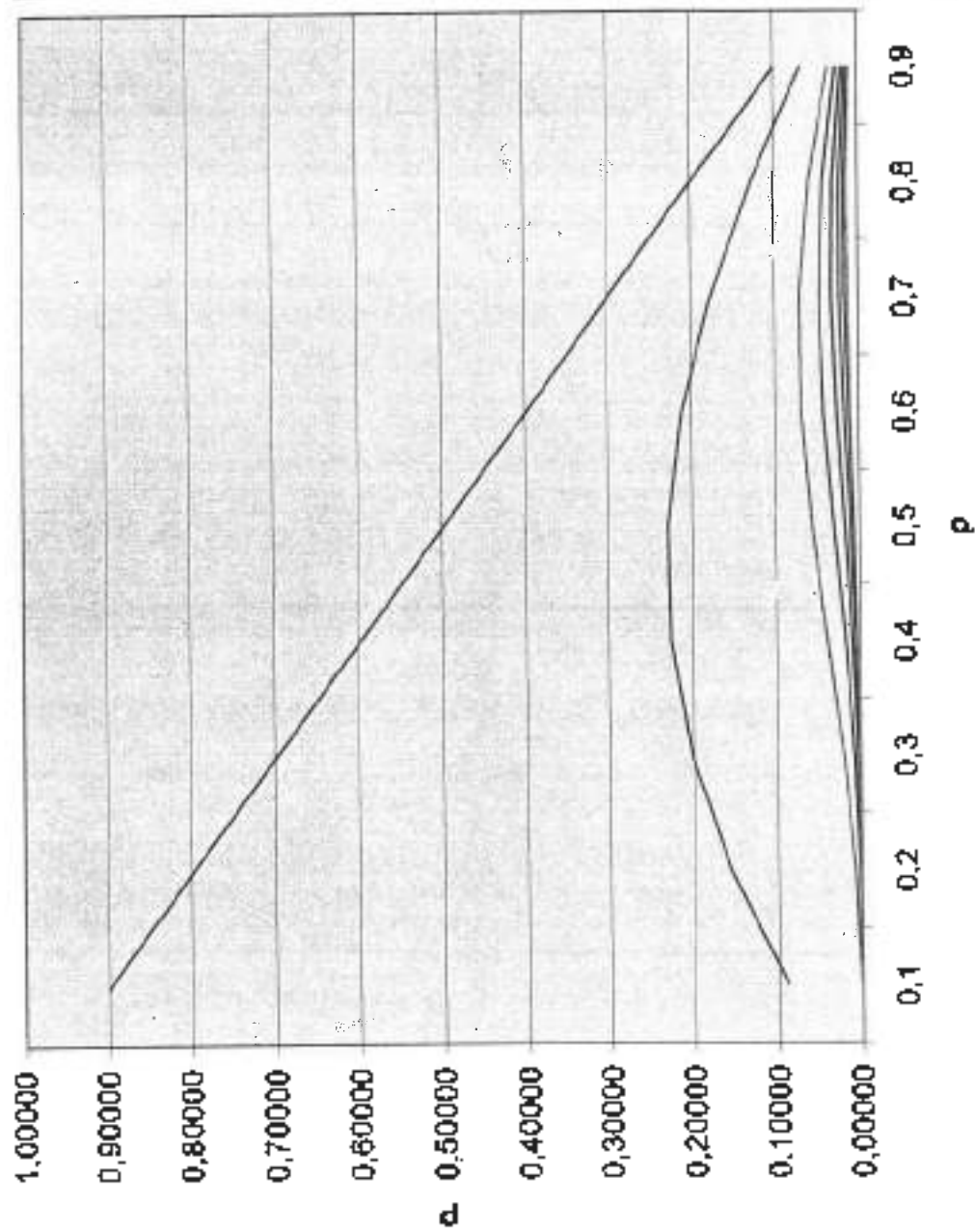
- $P(B1)$
- $P(B1 F2)$
- $P(B1 B2 F3)$
- $P(B1 B2 B3 F4)$
- $P(B1 B2 B3 B4 F5)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)$

MM11

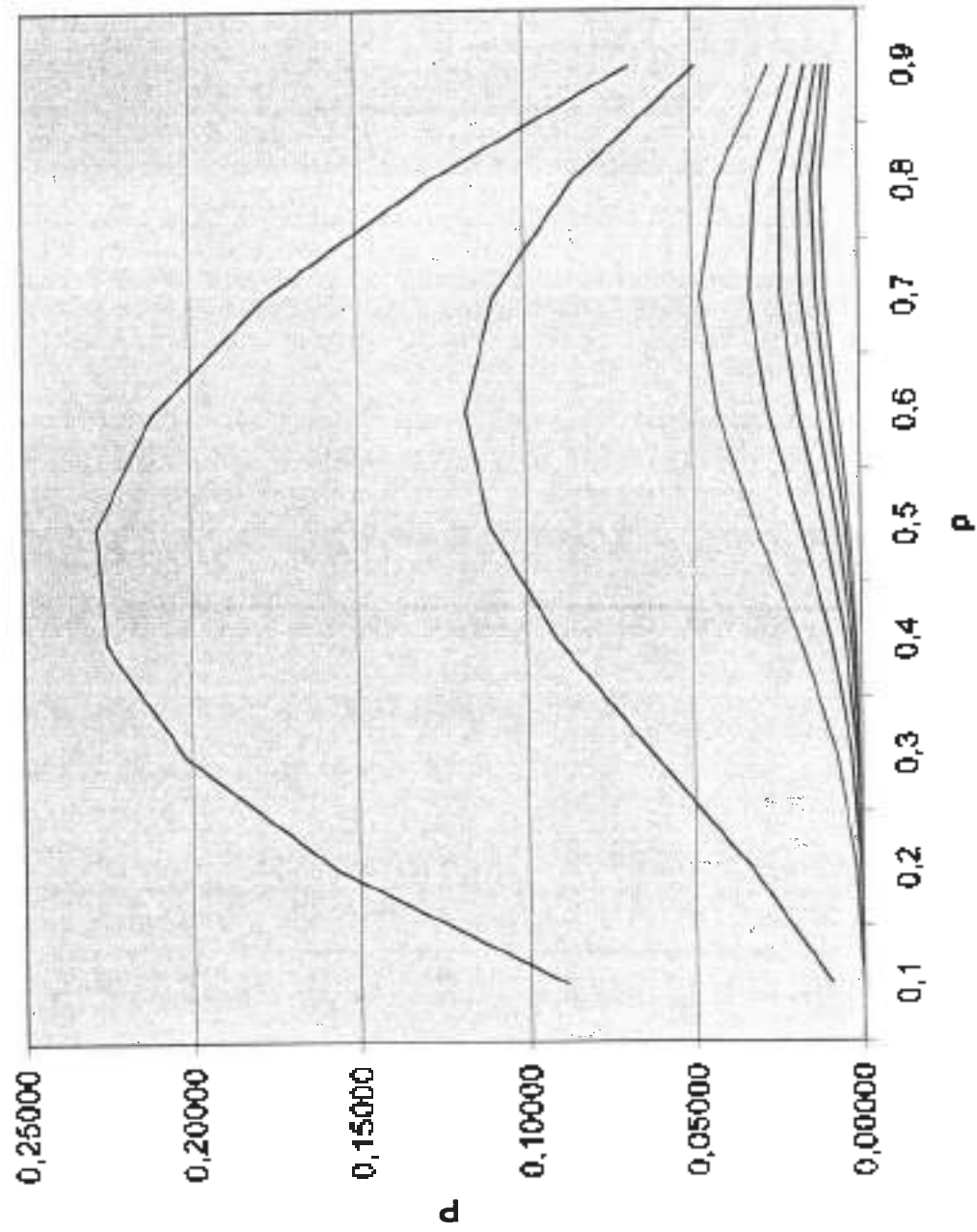


- P(B1 F2)
- P(B1 B2 F3)
- P(B1 B2 B3 F4)
- P(B1 B2 B3 B4 F5)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)

MM12



MM12



—P(B1 F2)

— P(01 02 F3)

P(B1 B2 B3 F4)

—P(B1 B2 B3 B4 F5)

—P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)

—P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)

—P(81 82 83 84 85 86 87 F8)

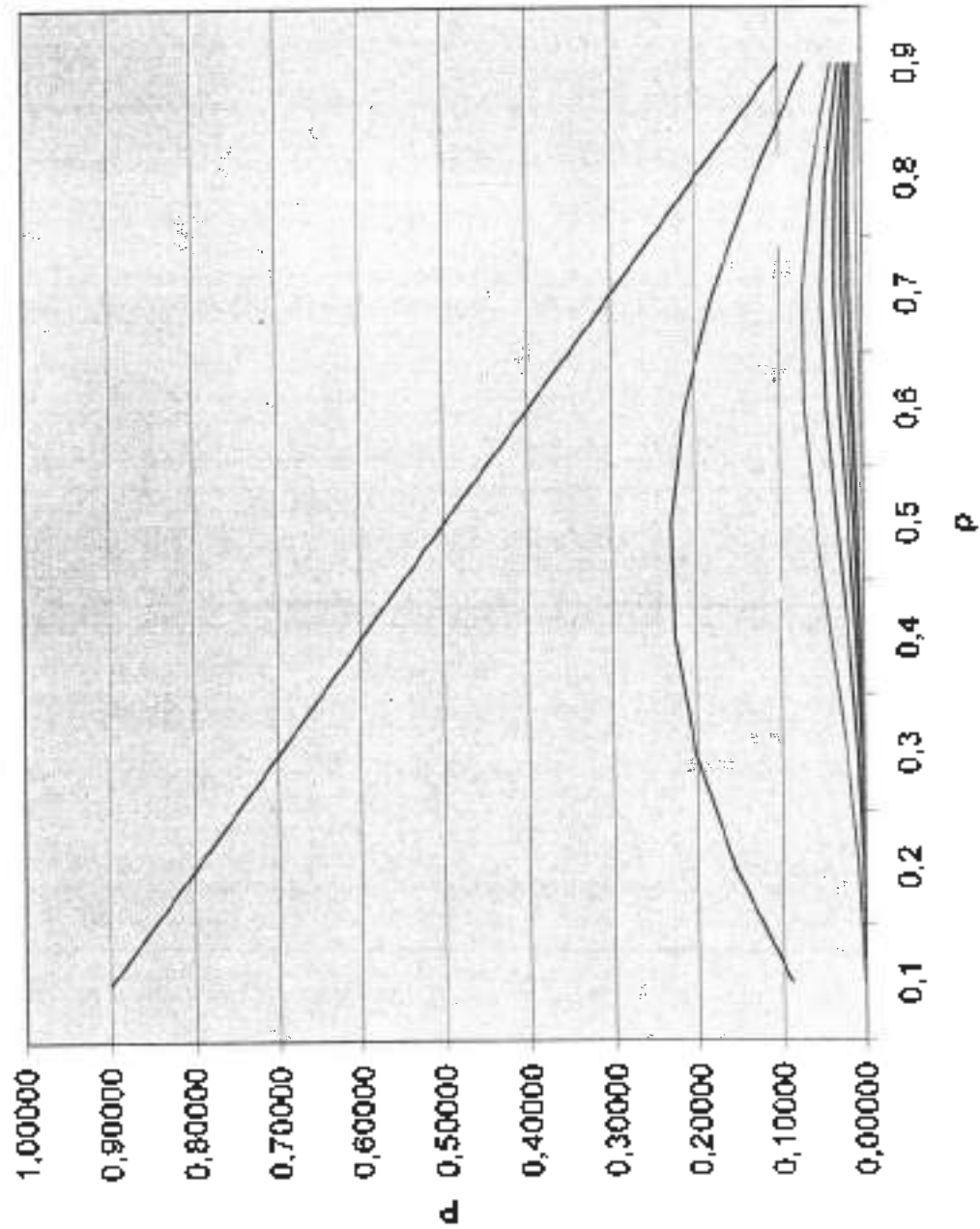
—P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9)

—P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)

P/B1 82 83 84 85 86 87 88 89 910

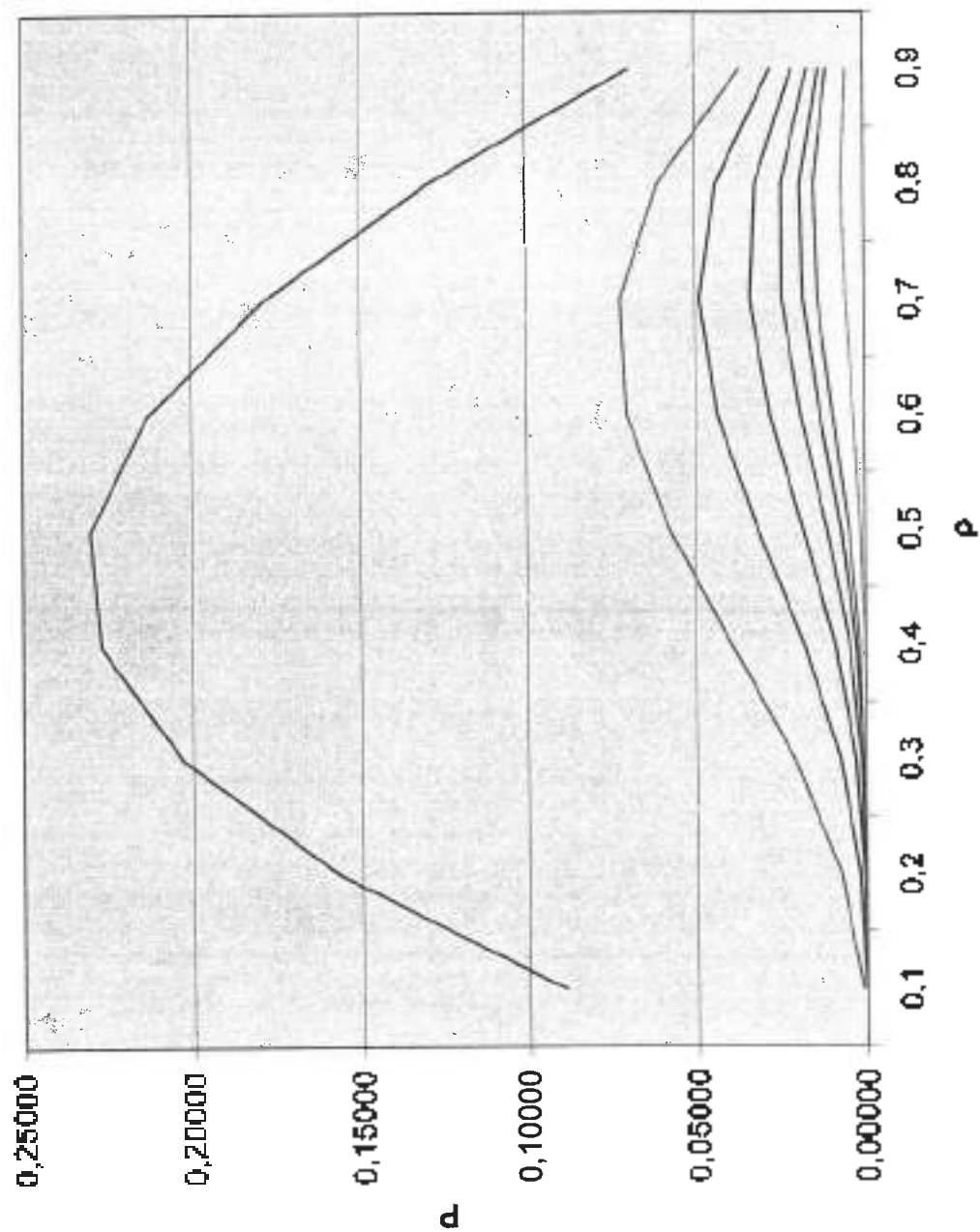
P(81 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10

MM13

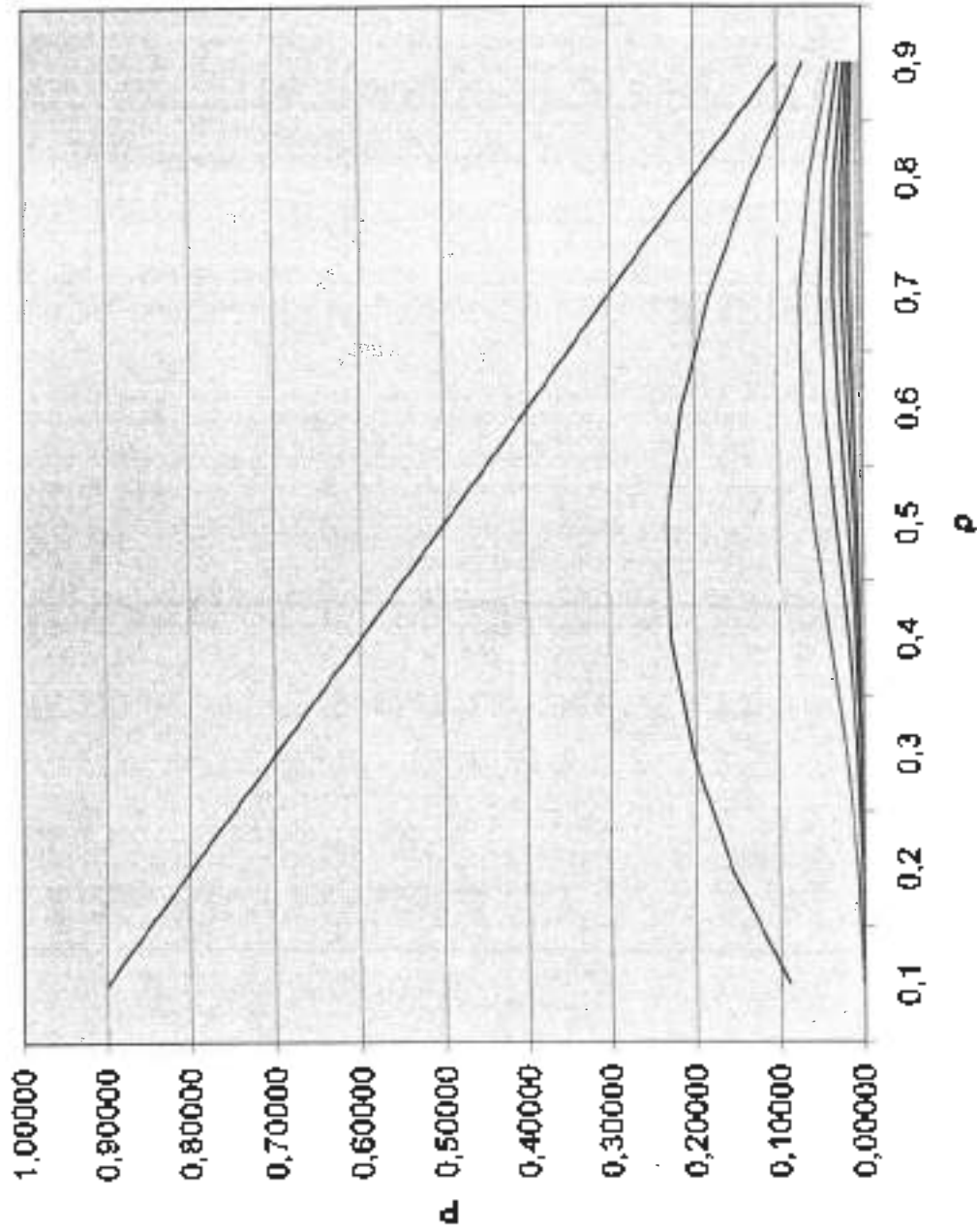


- $P(B1)$
- $P(B1 B2 F2)$
- $P(B1 B2 F3)$
- $P(B1 B2 B3 F4)$
- $P(B1 B2 B3 B4 F5)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 F11)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 F12)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 F13)$

MM13

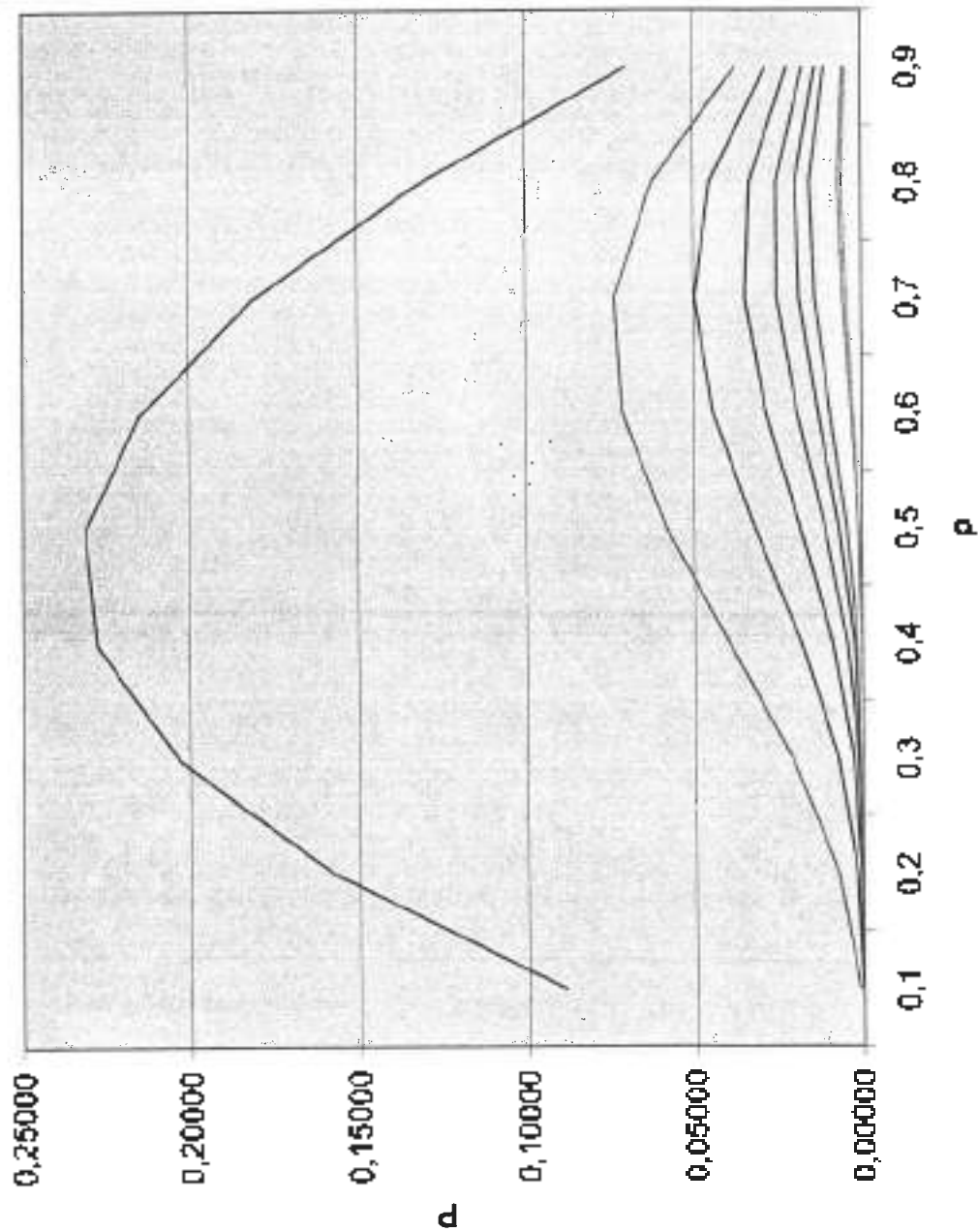


MM14

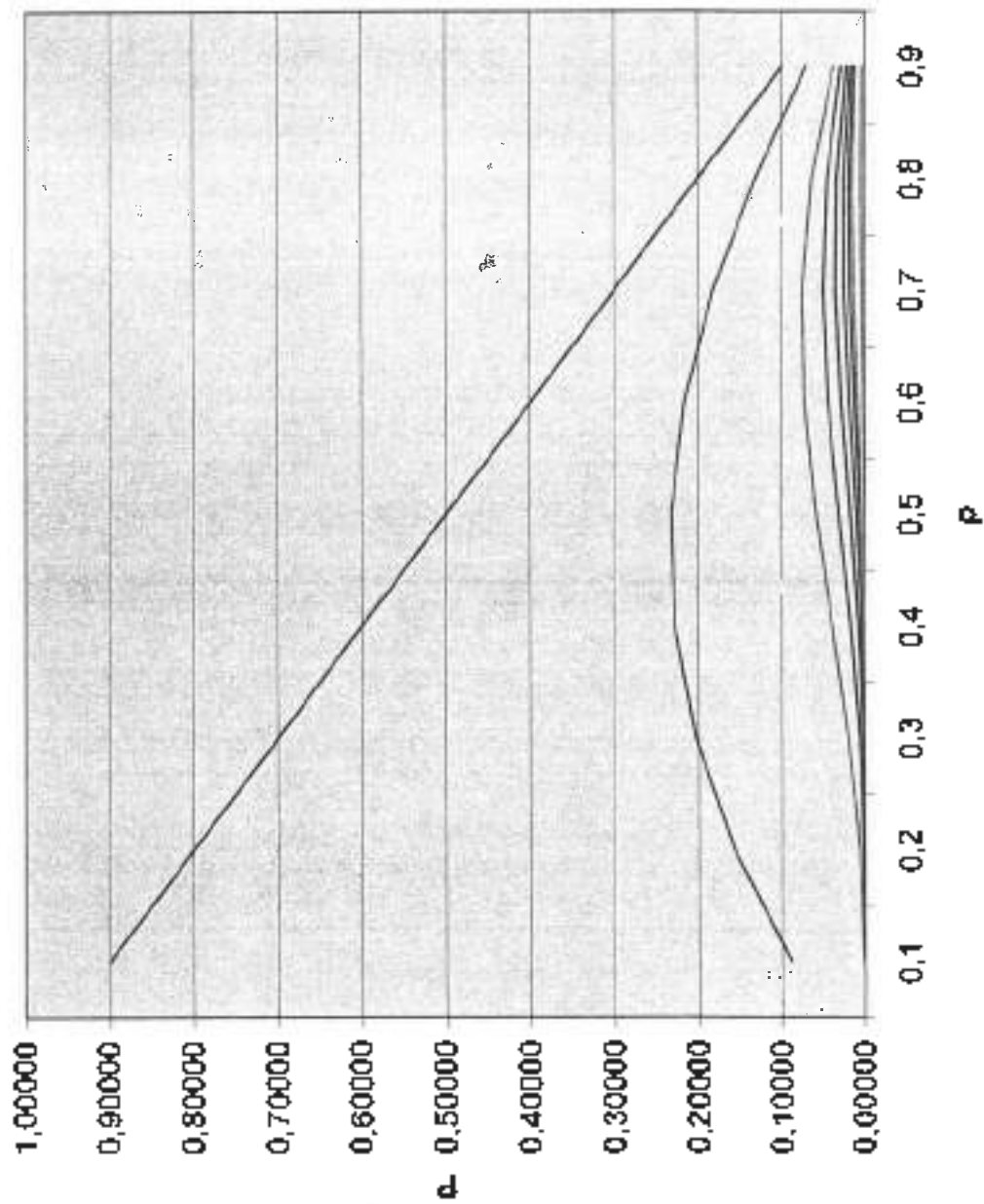


- $P(B1)$
- $P(B1 F2)$
- $P(B1 B2 F3)$
- $P(B1 B2 B3 F4)$
- $P(B1 B2 B3 B4 F5)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 F11)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 F12)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 F13)$
- $P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 F14)$

MM14

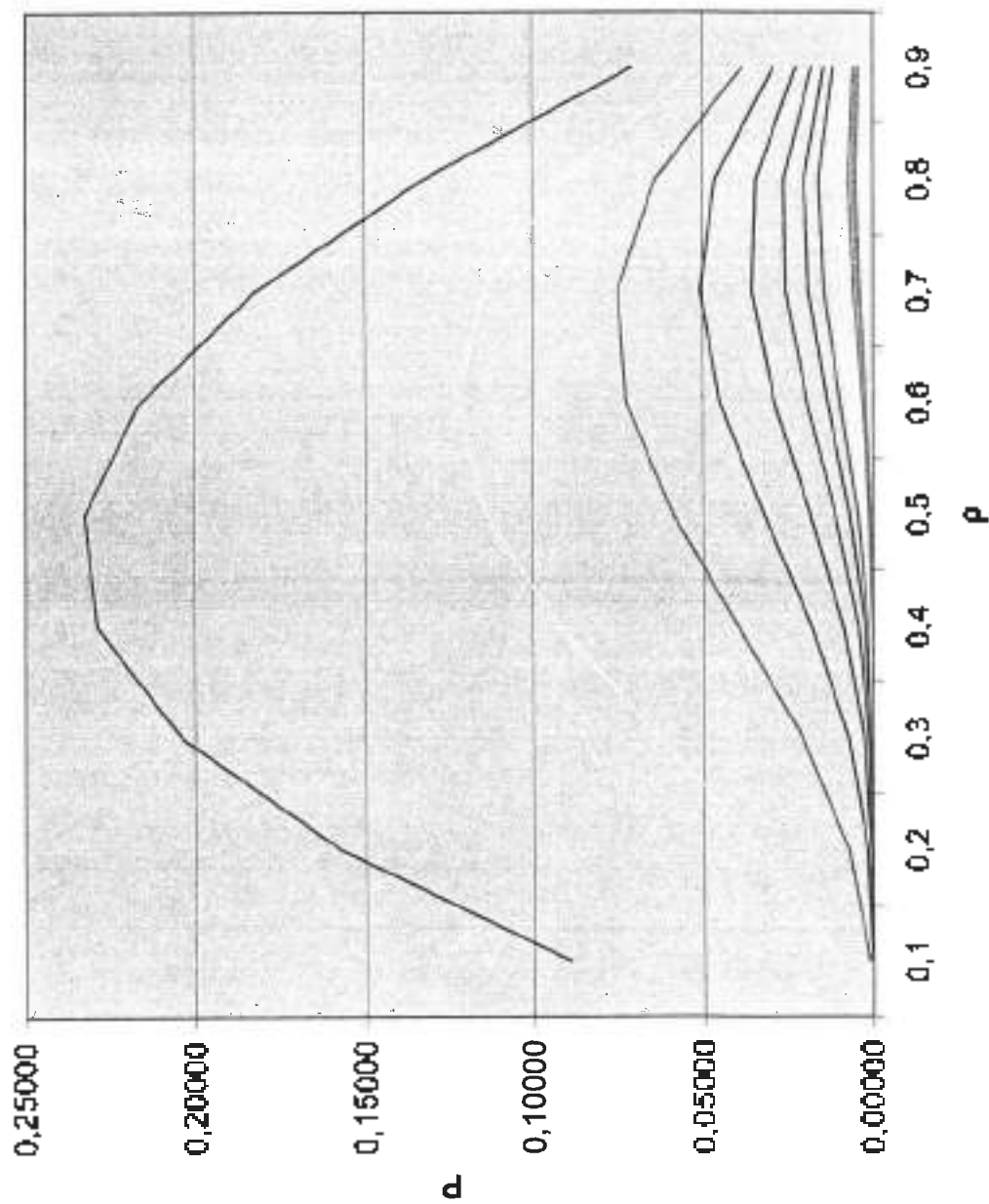


MM15



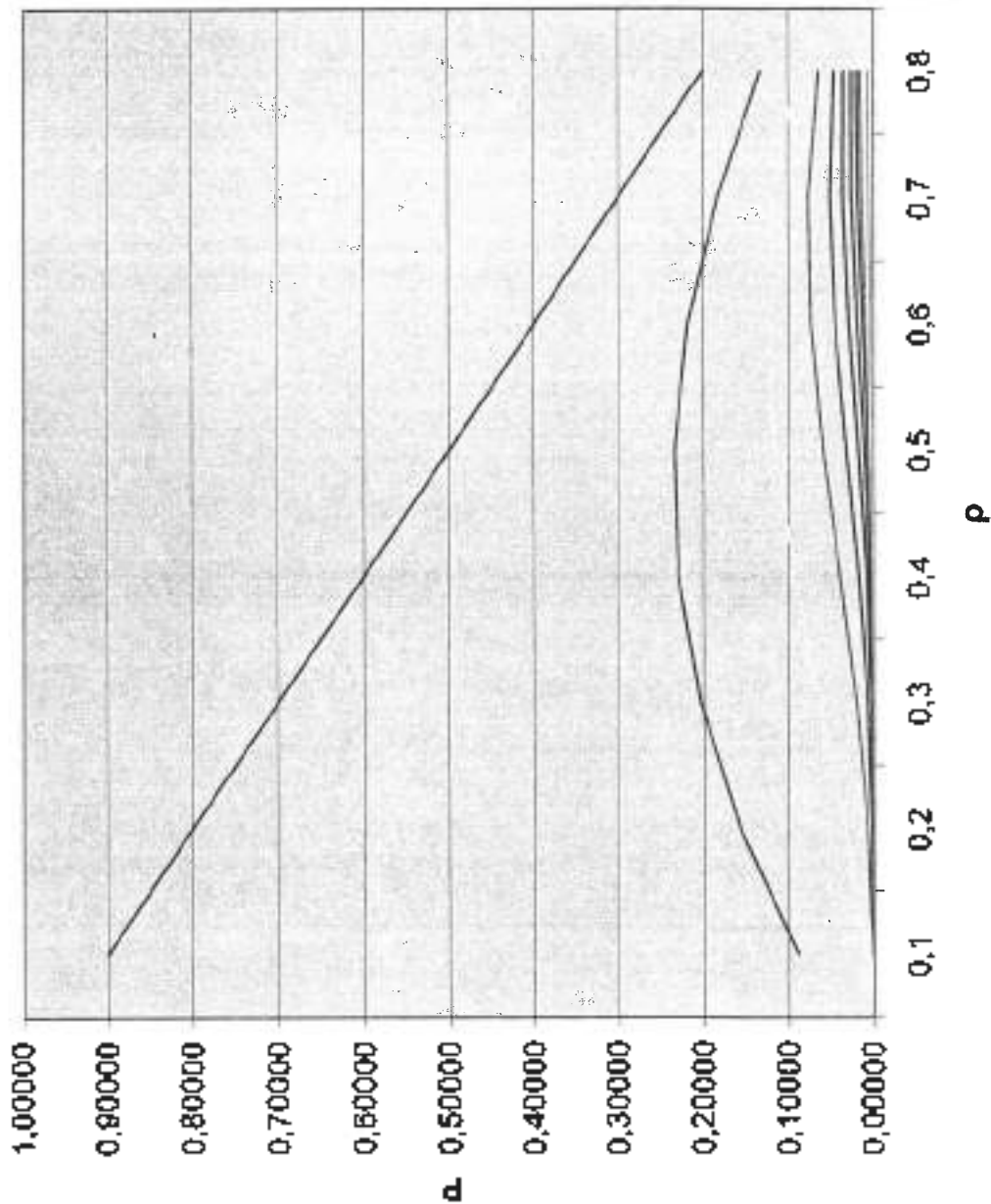
- P(B1)
- P(B1 F2)
- P(B1 B2 F3)
- P(B1 B2 B3 F4)
- P(B1 B2 B3 B4 F5)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 F11)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 F12)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 F13)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 F14)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 F15)

MM15



- P(B1 F2)
- P(B1 B2 F3)
- P(B1 B2 B3 F4)
- P(B1 B2 B3 B4 F5)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 F11)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 F12)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 F13)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 F14)
- P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 F15)

MM16



— $P(B_1)$

— $P(B_1, F_2)$

$P(B_1, B_2, F_3)$

— $P(B_1, B_2, B_3, F_4)$

— $P(B_1, B_2, B_3, B_4, F_5)$

— $P(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, F_6)$

— $P(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, F_7)$

— $P(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, F_8)$

— $P(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, F_9)$

$P(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, F_{10})$

$P(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, F_{11})$

$P(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, F_{12})$

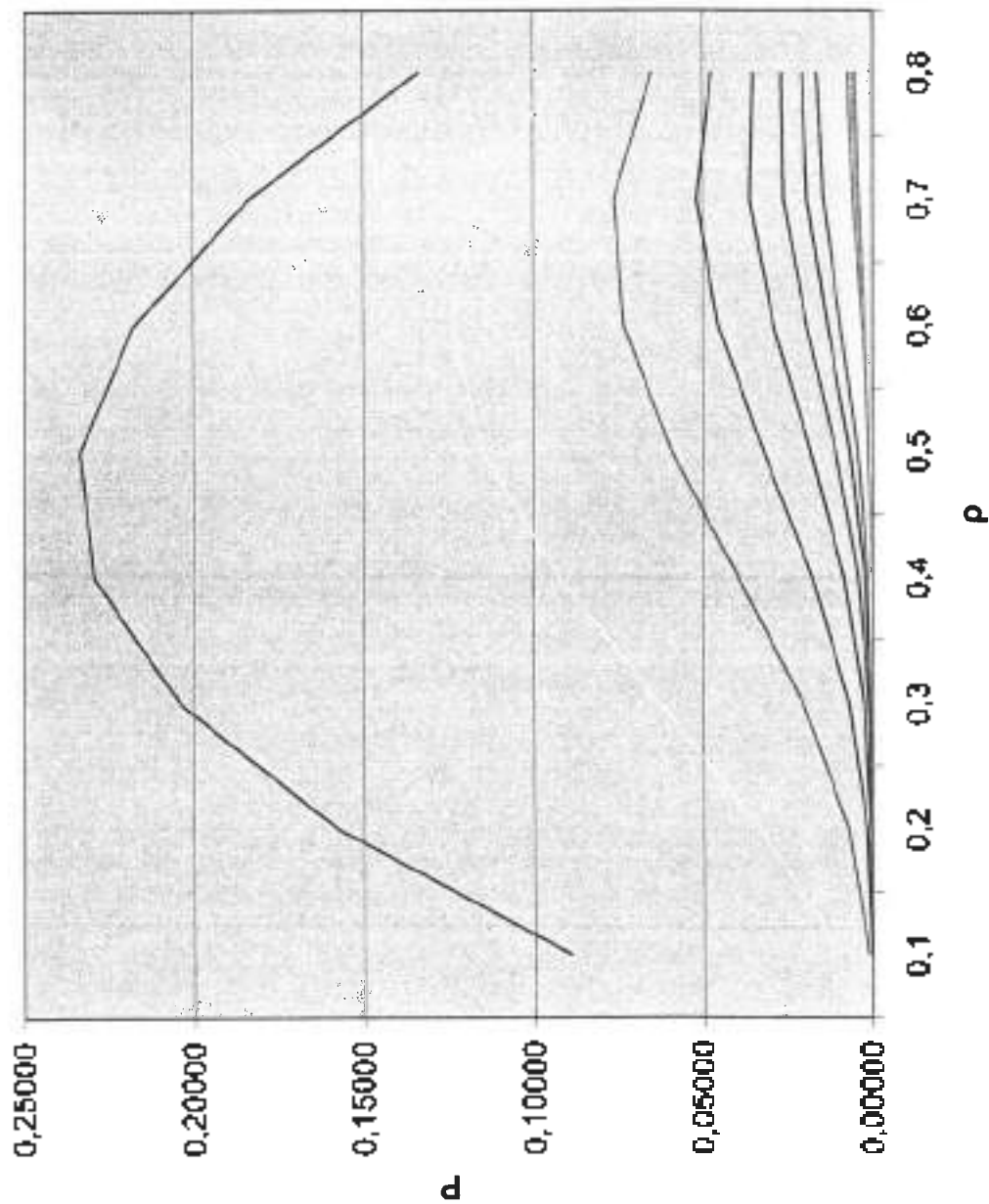
— $P(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, F_{13})$

$P(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, F_{14})$

— $P(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, F_{15})$

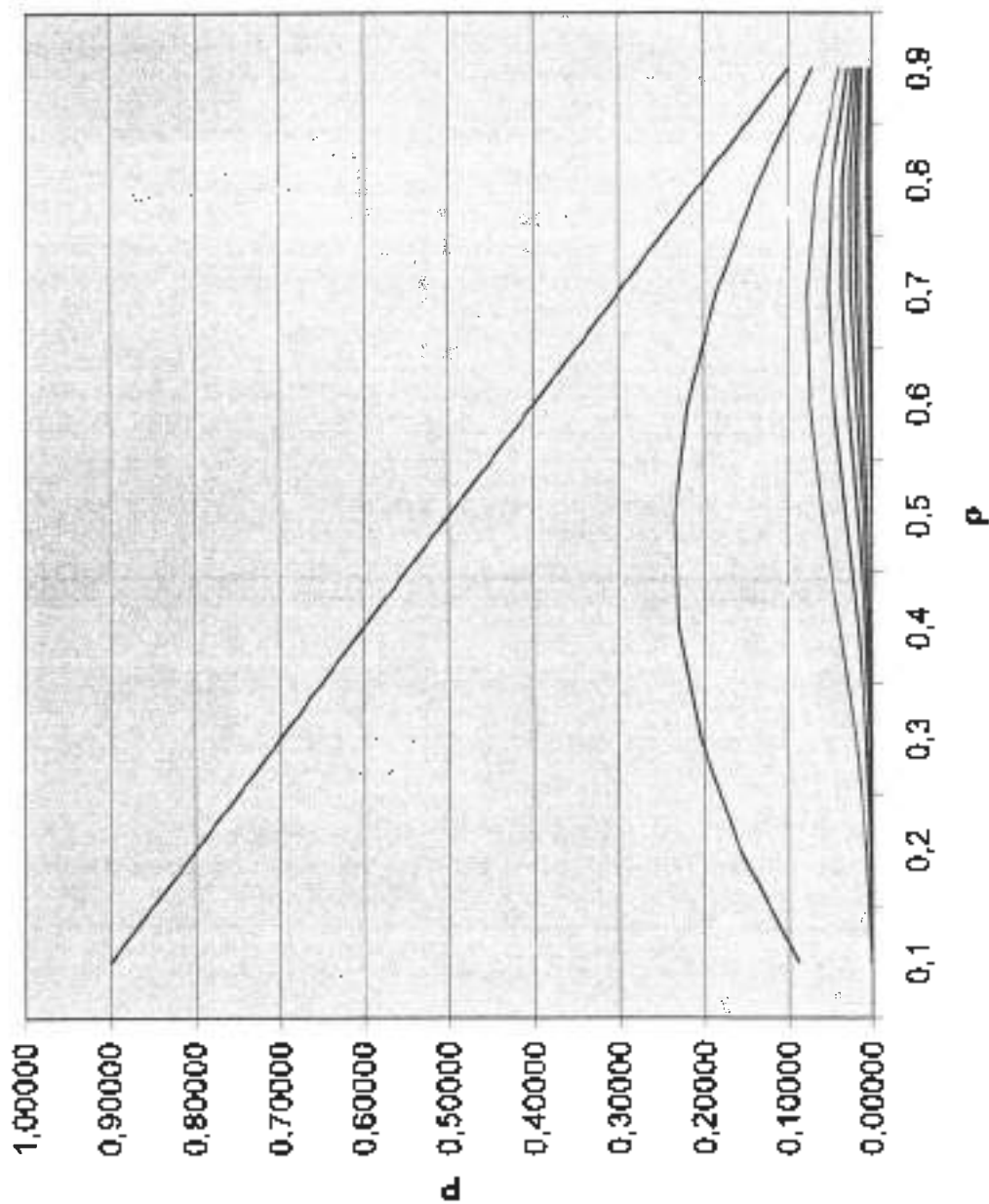
$P(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15}, F_{16})$

MM16

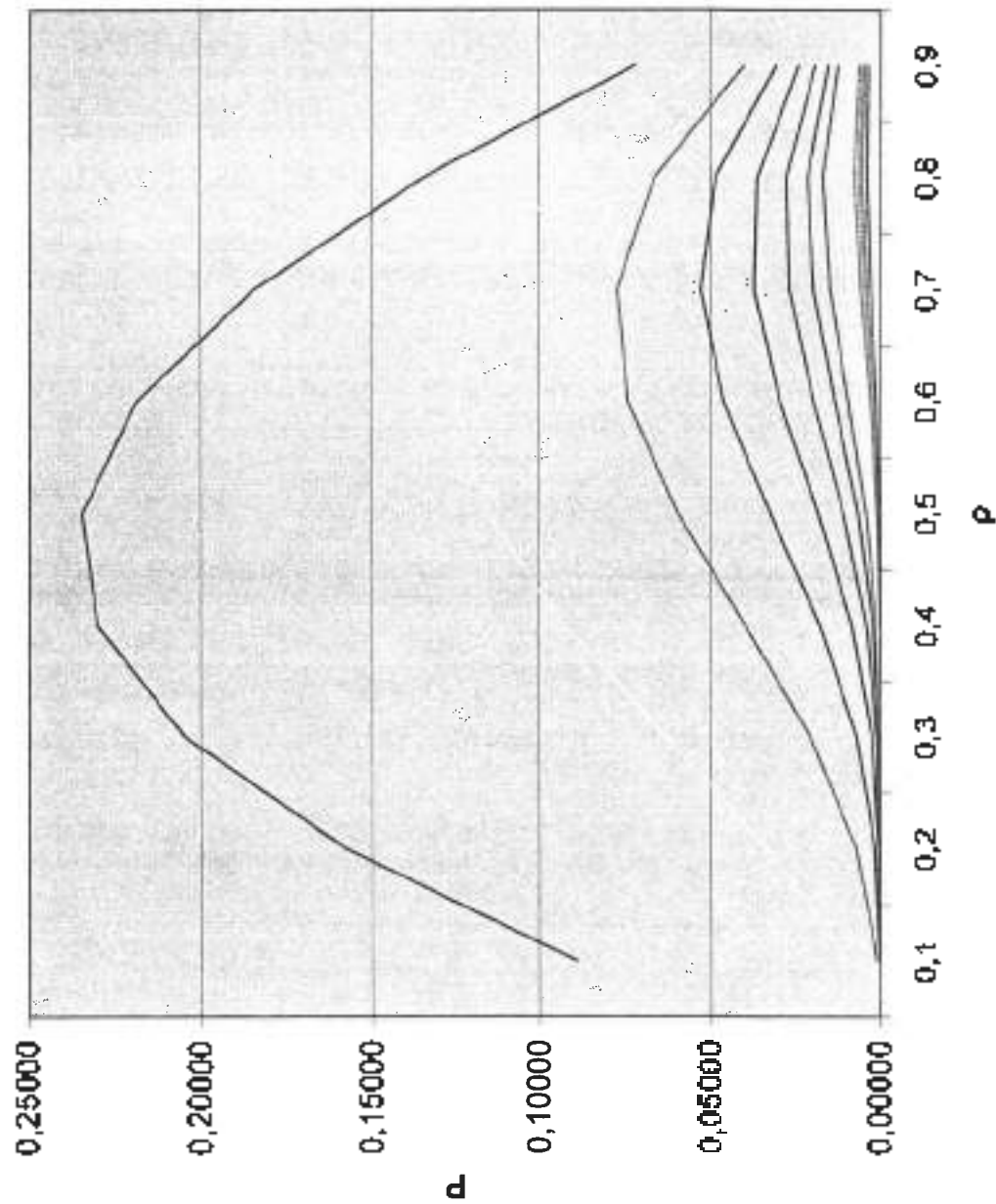


—	P(B1 F2)
—	P(B1 B2 F3)
—	P(B1 B2 B3 F4)
—	P(B1 B2 B3 B4 F5)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 F11)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 F12)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 F13)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 F14)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 F15)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 F16)

MM17

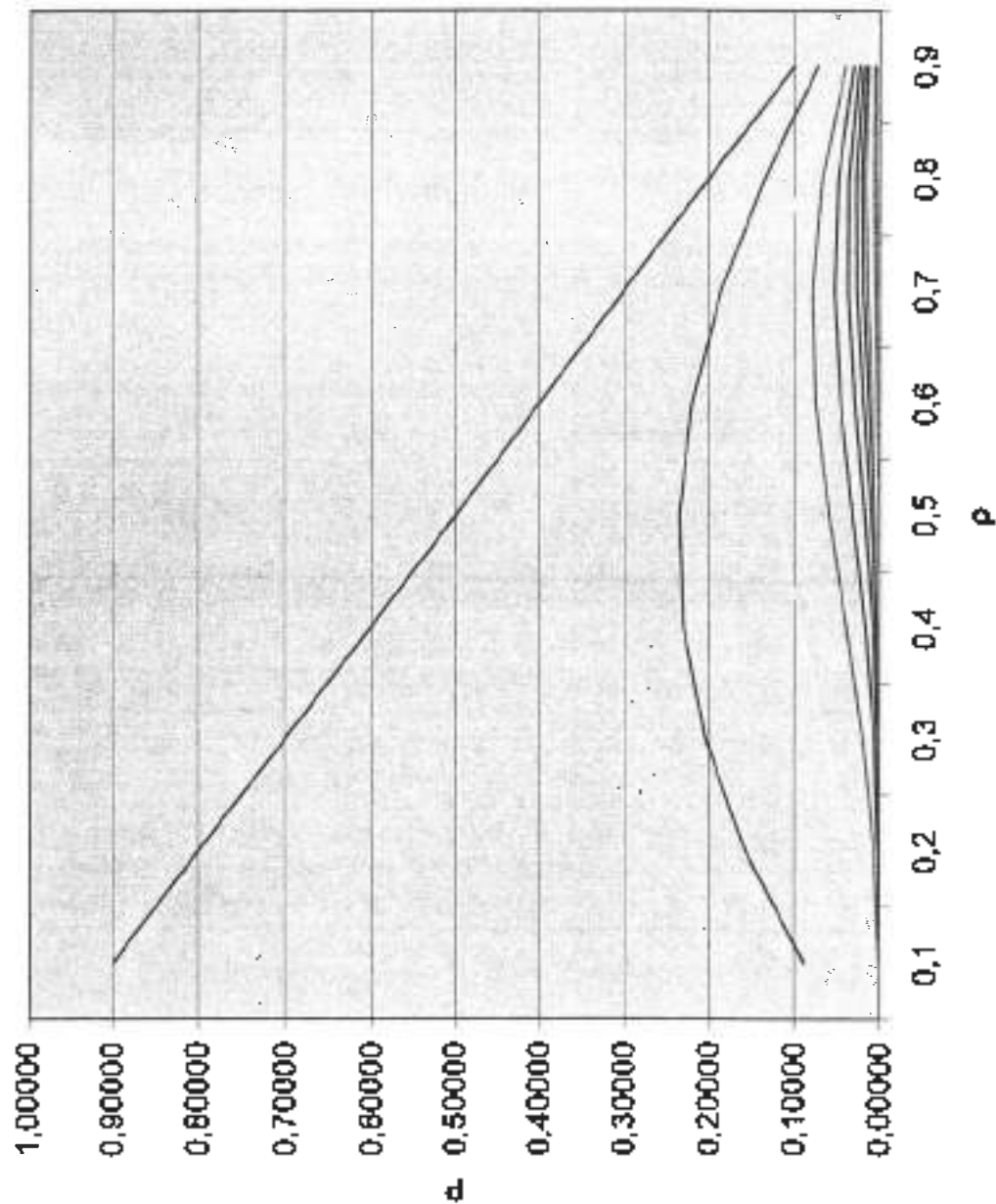


MM17



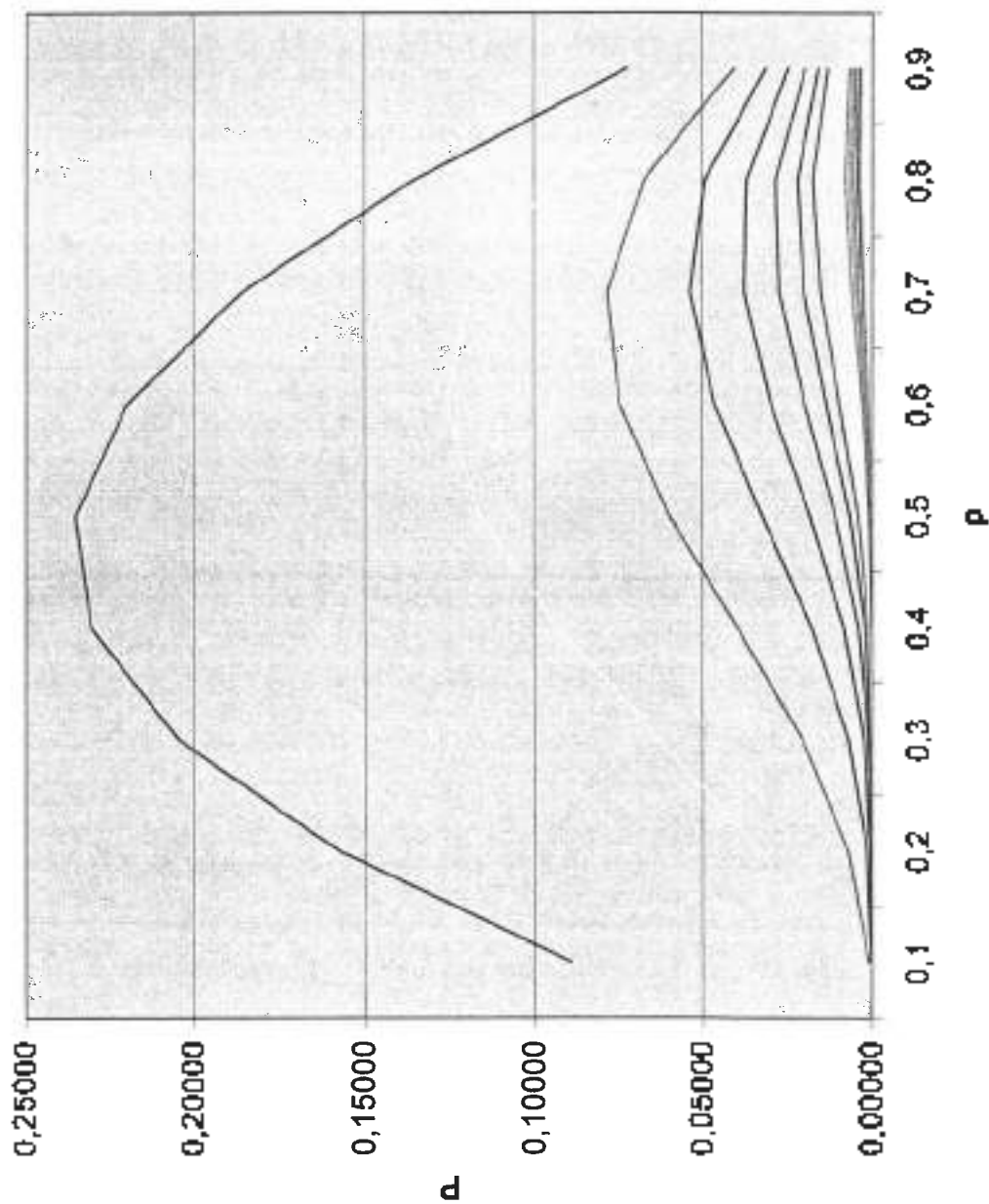
—	P(B1 F2)
—	P(B1 B2 F3)
—	P(B1 B2 B3 F4)
—	P(B1 B2 B3 B4 F5)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 F11)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 F12)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 F13)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 F14)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 F15)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 F16)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 F17)

MM18



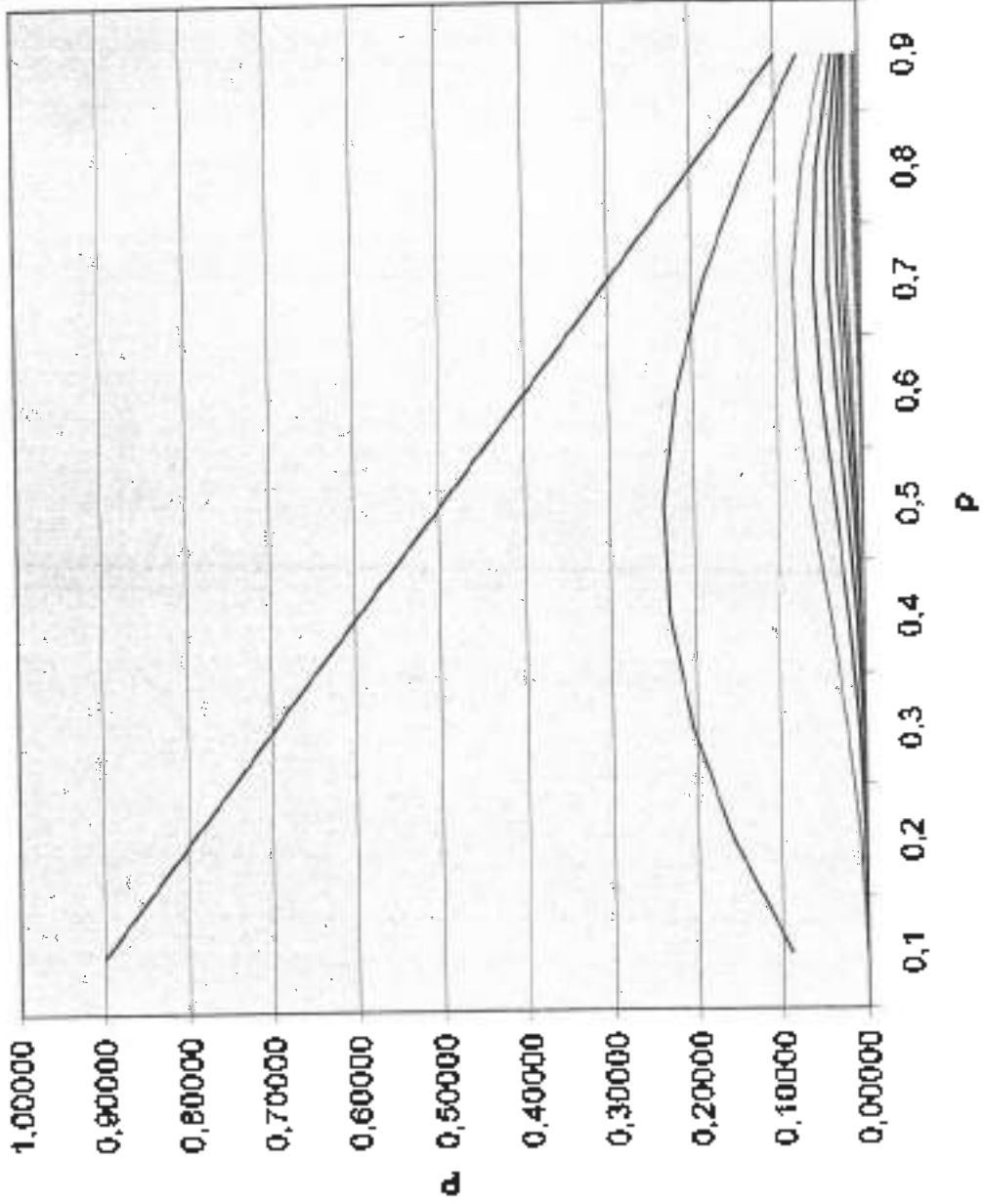
—	P(B1)
—	P(B1 F2)
—	P(B1 B2 F3)
—	P(B1 B2 B3 F4)
—	P(B1 B2 B3 B4 F5)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 F11)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 F12)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 F13)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 F14)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 F15)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 F16)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 F17)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 F18)

MM18



—	P(B1 F2)
—	P(B1 B2 F3)
—	P(B1 B2 B3 F4)
—	P(B1 B2 B3 B4 F5)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 F11)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 F12)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 F13)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 F14)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 F15)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 F16)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 F17)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 F18)

MM19



— $P(B_1)$

— $P(B_1 F_2)$

$P(B_1 B_2 F_3)$

— $P(B_1 B_2 B_3 F_4)$

— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 F_5)$

— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 F_6)$

— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 F_7)$

— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 F_8)$

— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 F_9)$

$P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 F_{10})$

$P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} F_{11})$

$P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} F_{12})$

— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} F_{13})$

— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} F_{14})$

— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} F_{15})$

$P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} F_{16})$

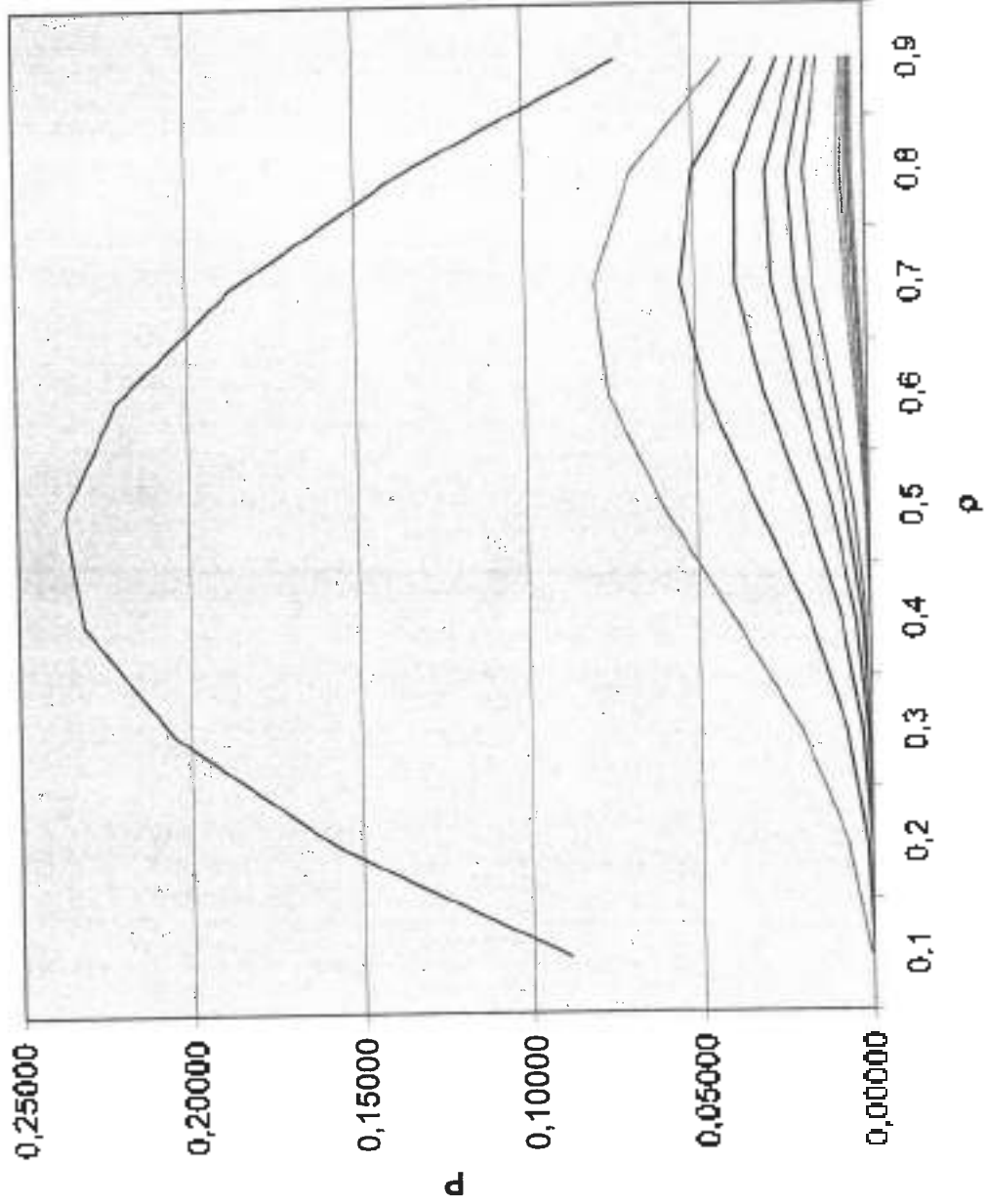
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16} F_{17})$

— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16} B_{17} F_{18})$

— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16} B_{17} B_{18} F_{19})$

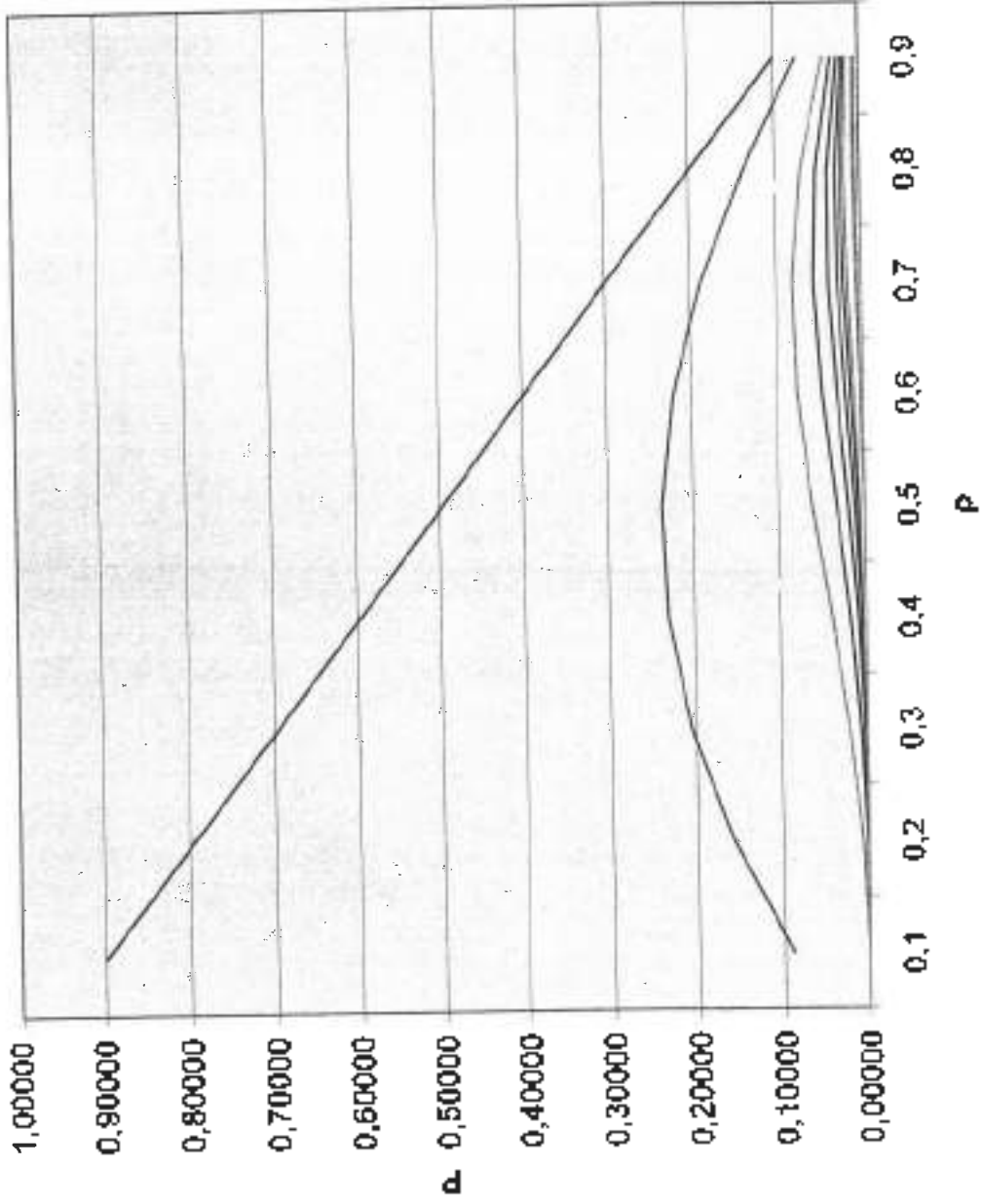
$P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16} B_{17} B_{18} B_{19} F_{20})$

MM19



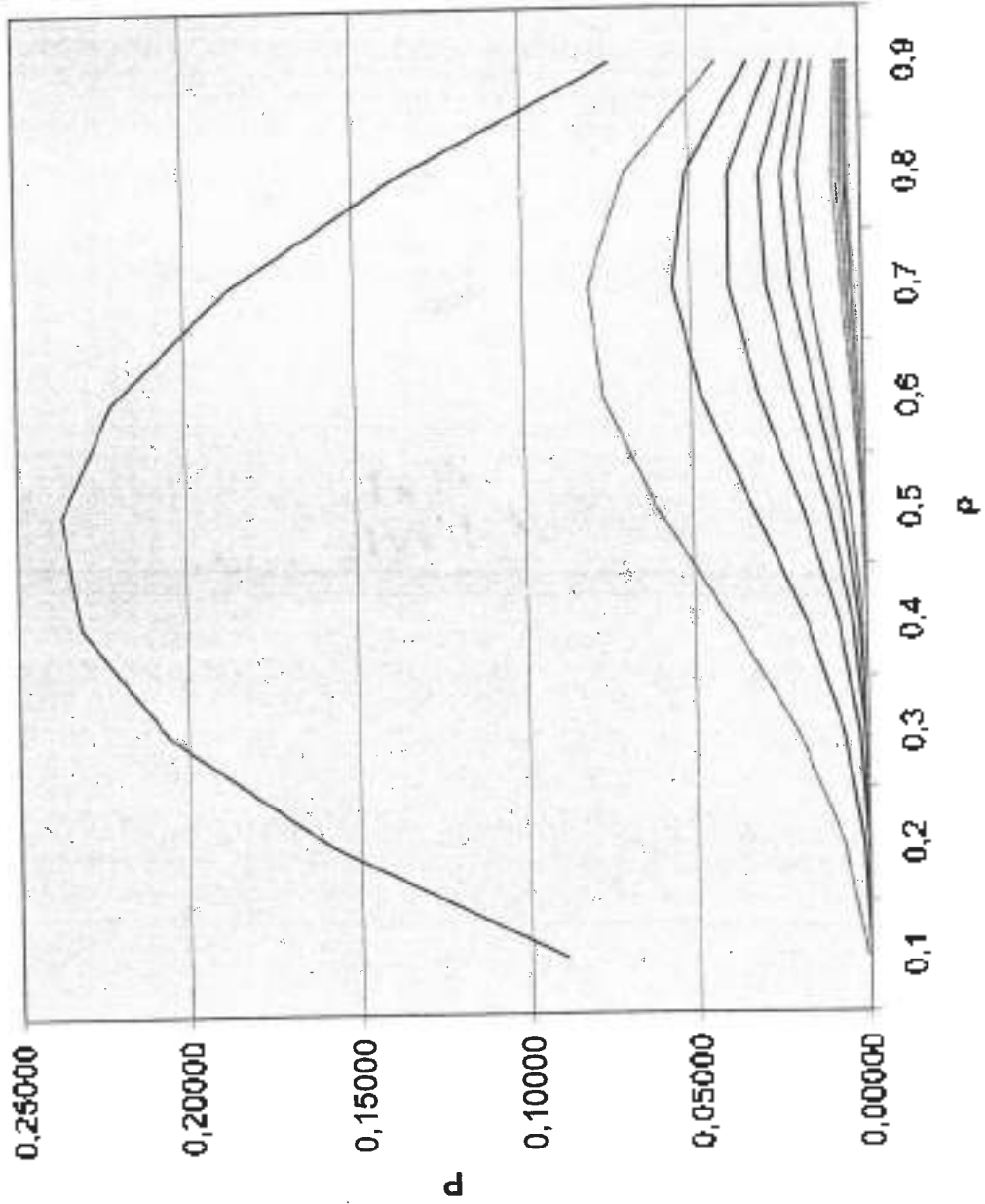
— P(B1 F2)	
P(B1 B2 F3)	
— P(B1 B2 B3 F4)	
— P(B1 B2 B3 B4 F5)	
— P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)	
— P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)	
— P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)	
— P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)	
P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)	
P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 F11)	
P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 F12)	
— P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 F13)	
— P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 F14)	
— P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 F15)	
P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 F16)	
— P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 F17)	
— P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 F18)	
— P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 B18 F19)	

MM20



— $P(B_1)$	
— $P(B_1 F_2)$	
$P(B_1 B_2 F_3)$	
— $P(B_1 B_2 B_3 F_4)$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 F_5)$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 F_6)$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 F_7)$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 F_8)$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 F_9)$	
$P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 F_{10})$	
$P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 F_{11})$	
$P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} F_{12})$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} F_{13})$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} F_{14})$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} F_{15})$	
$P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} F_{16})$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16} F_{17})$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16} B_{17} F_{18})$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16} B_{17} B_{18} F_{19})$	
— $P(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16} B_{17} B_{18} B_{19} F_{20})$	

MM20

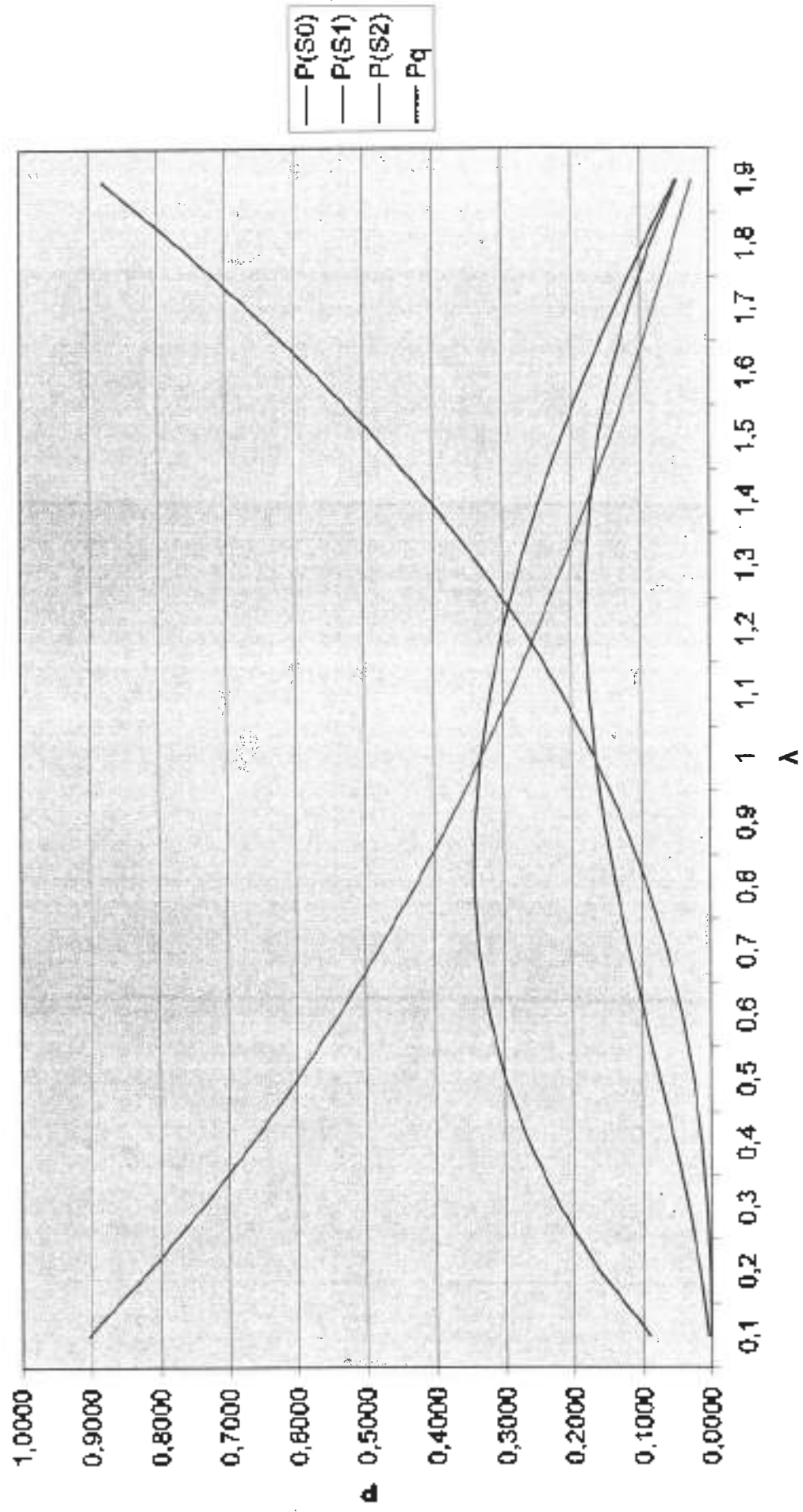


—	P(B1 F2)
—	P(B1 B2 F3)
—	P(B1 B2 B3 F4)
—	P(B1 B2 B3 B4 F5)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 F6)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 F7)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 F8)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 F9)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 F10)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 F11)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 F12)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 F13)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 F14)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 F15)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 F16)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 F17)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 F18)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 B18 F19)
—	P(B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 B18 B19 F20)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΠΡΟΤΥΠΟ Μ/Μ/Ν

MM2



MM3

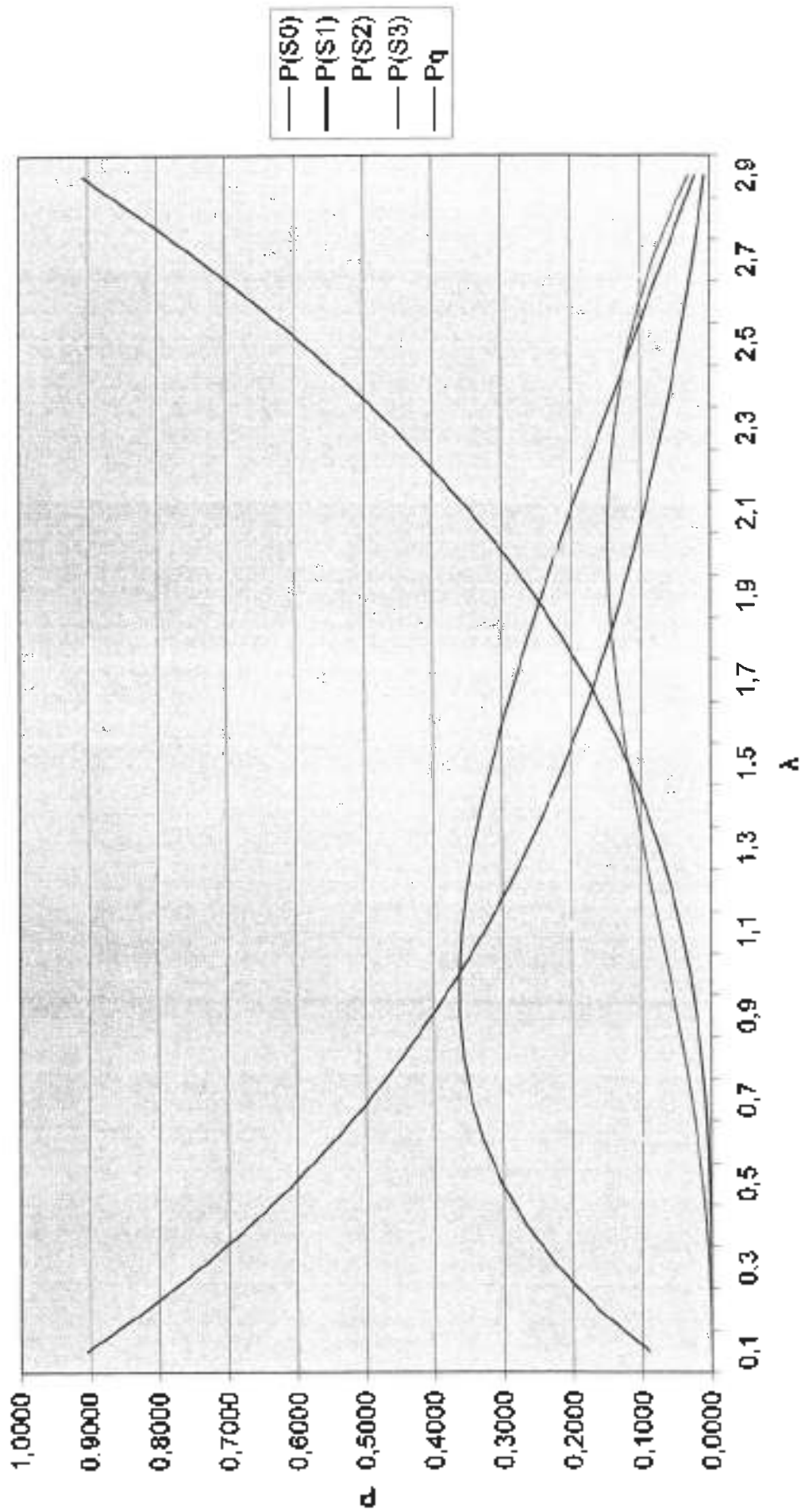
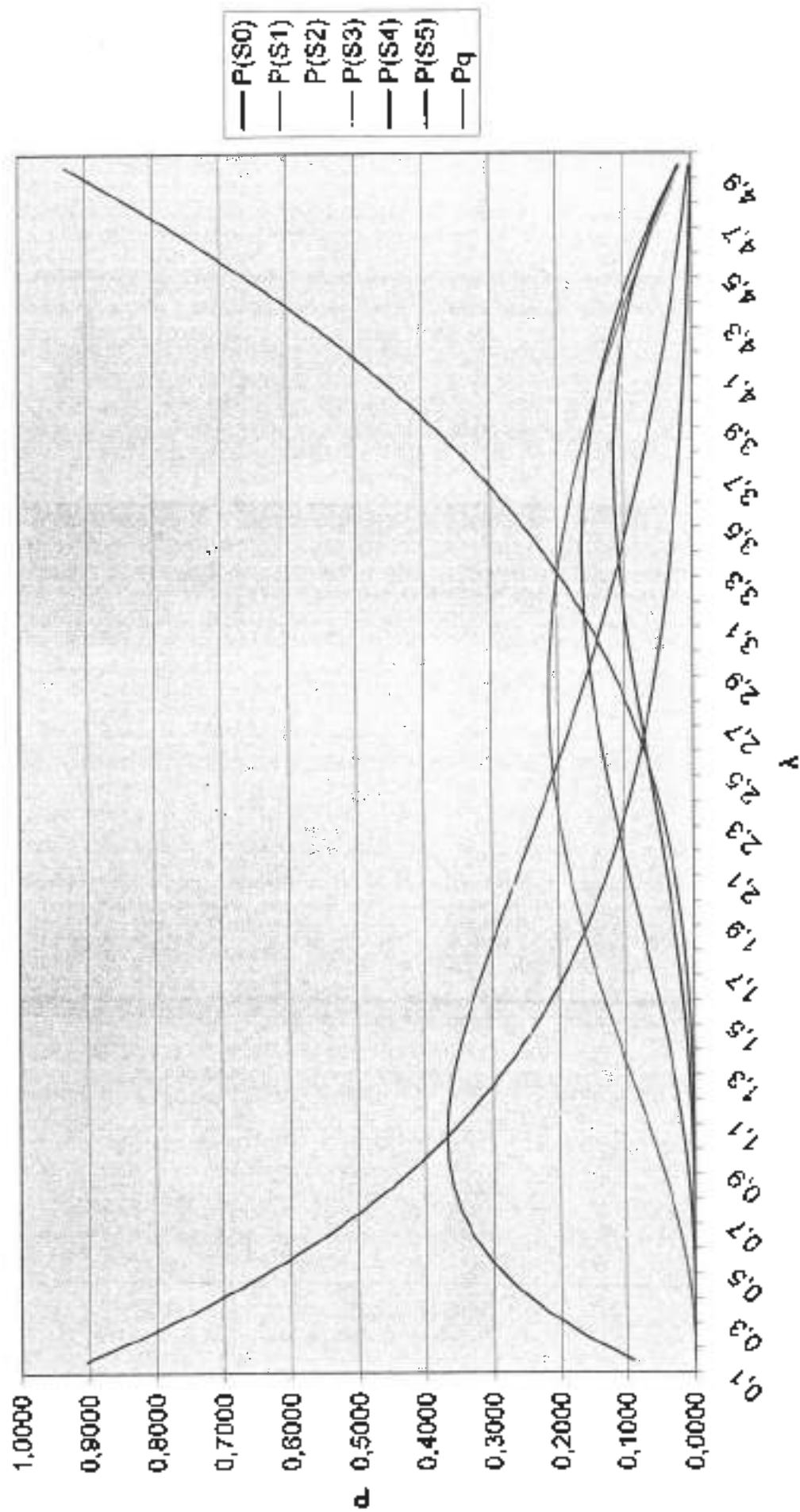
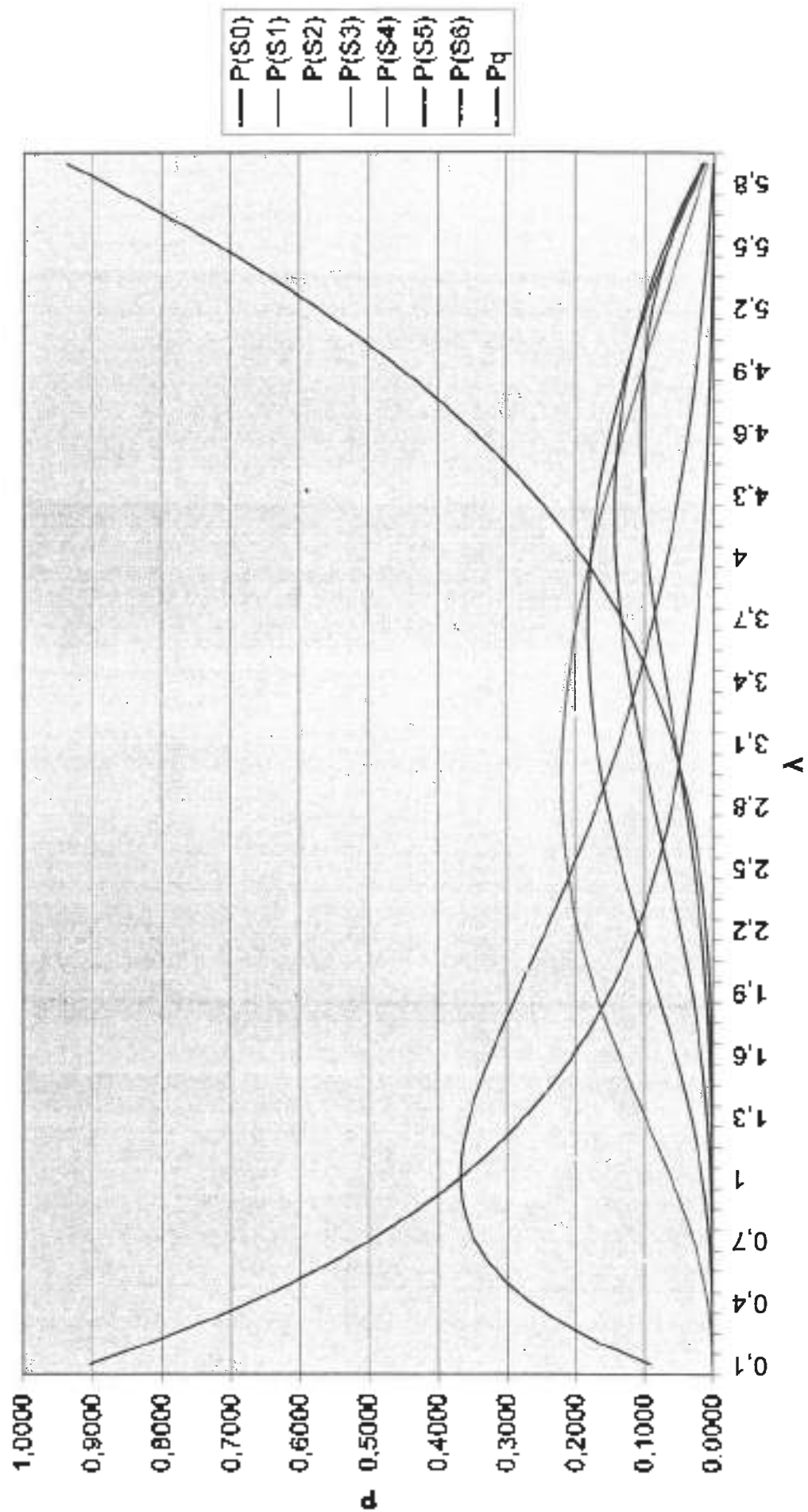


Figure 1 is a line graph showing the dependence of probabilities $P(S_0)$ through $P(S_4)$ and P_q on the parameter λ . The x-axis represents λ and ranges from 0.1 to 3.9. The y-axis represents probability and ranges from 0.0000 to 1.0000. The graph contains six curves: $P(S_0)$ (a straight line decreasing from ~0.92 to ~0.00), $P(S_1)$ (increasing from 0 to ~0.00), $P(S_2)$ (increasing from 0 to ~0.00), $P(S_3)$ (increasing from 0 to ~0.00), $P(S_4)$ (increasing from 0 to ~0.00), and P_q (increasing from 0 to ~0.00).

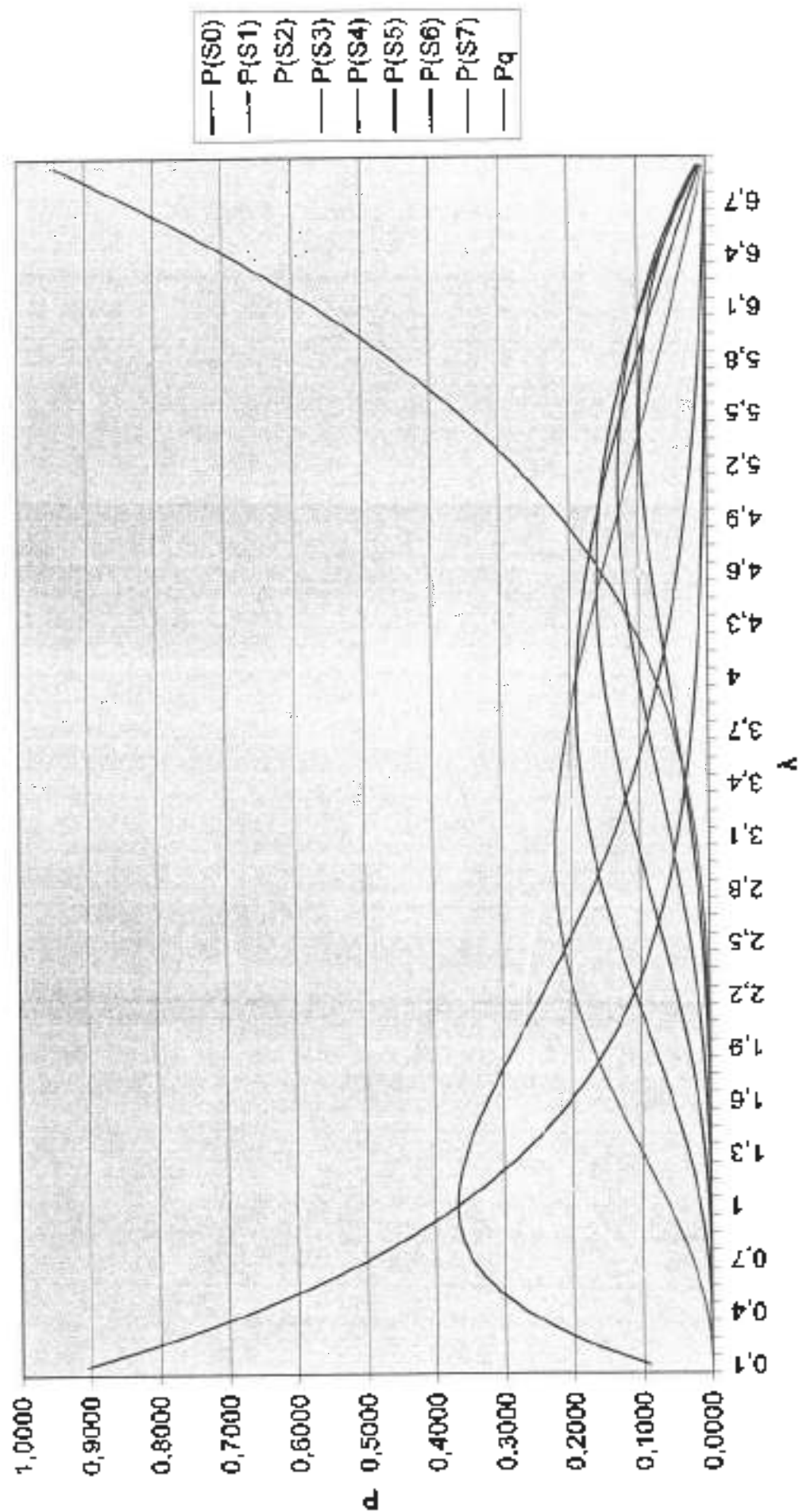


MM5

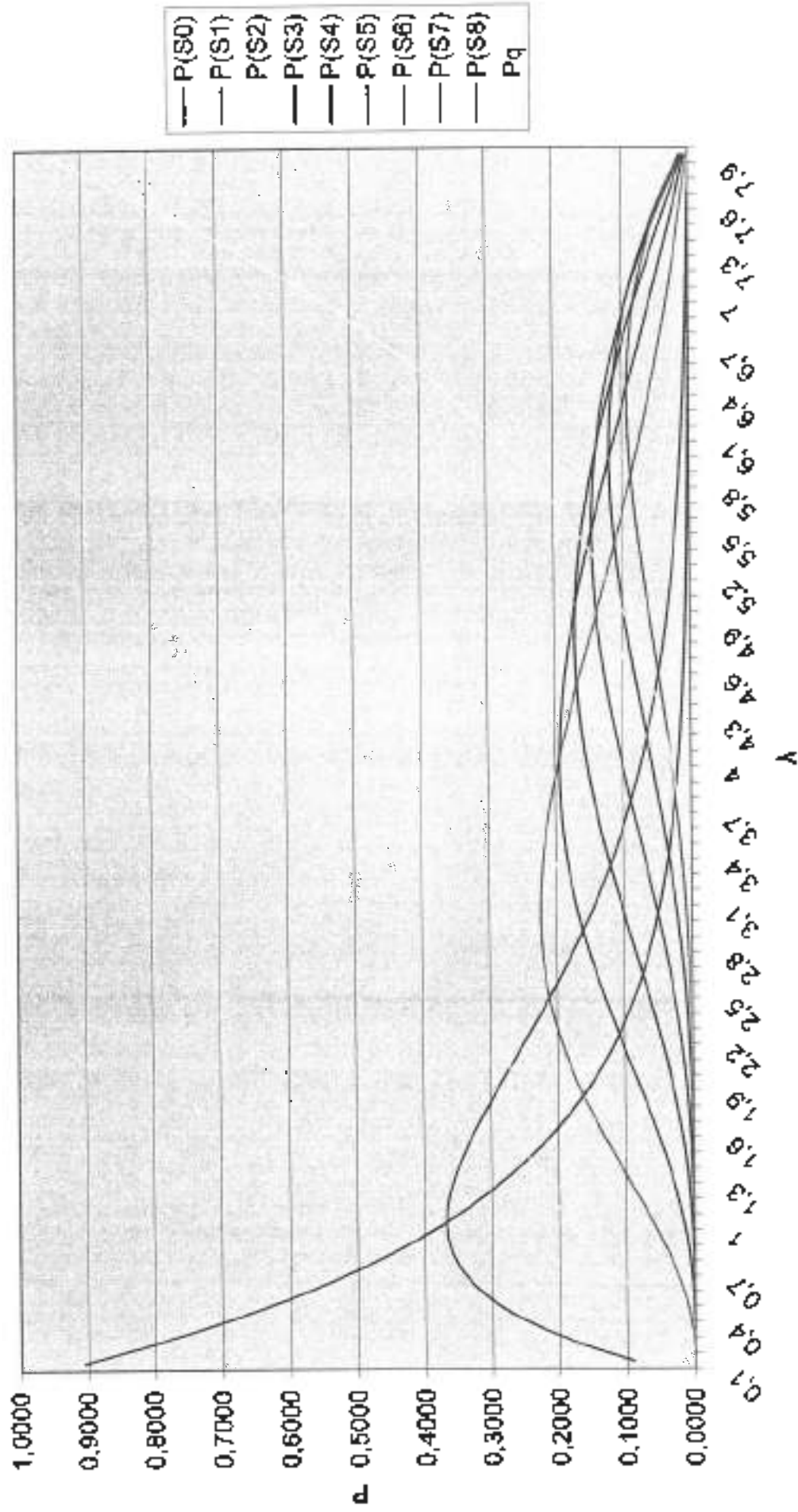




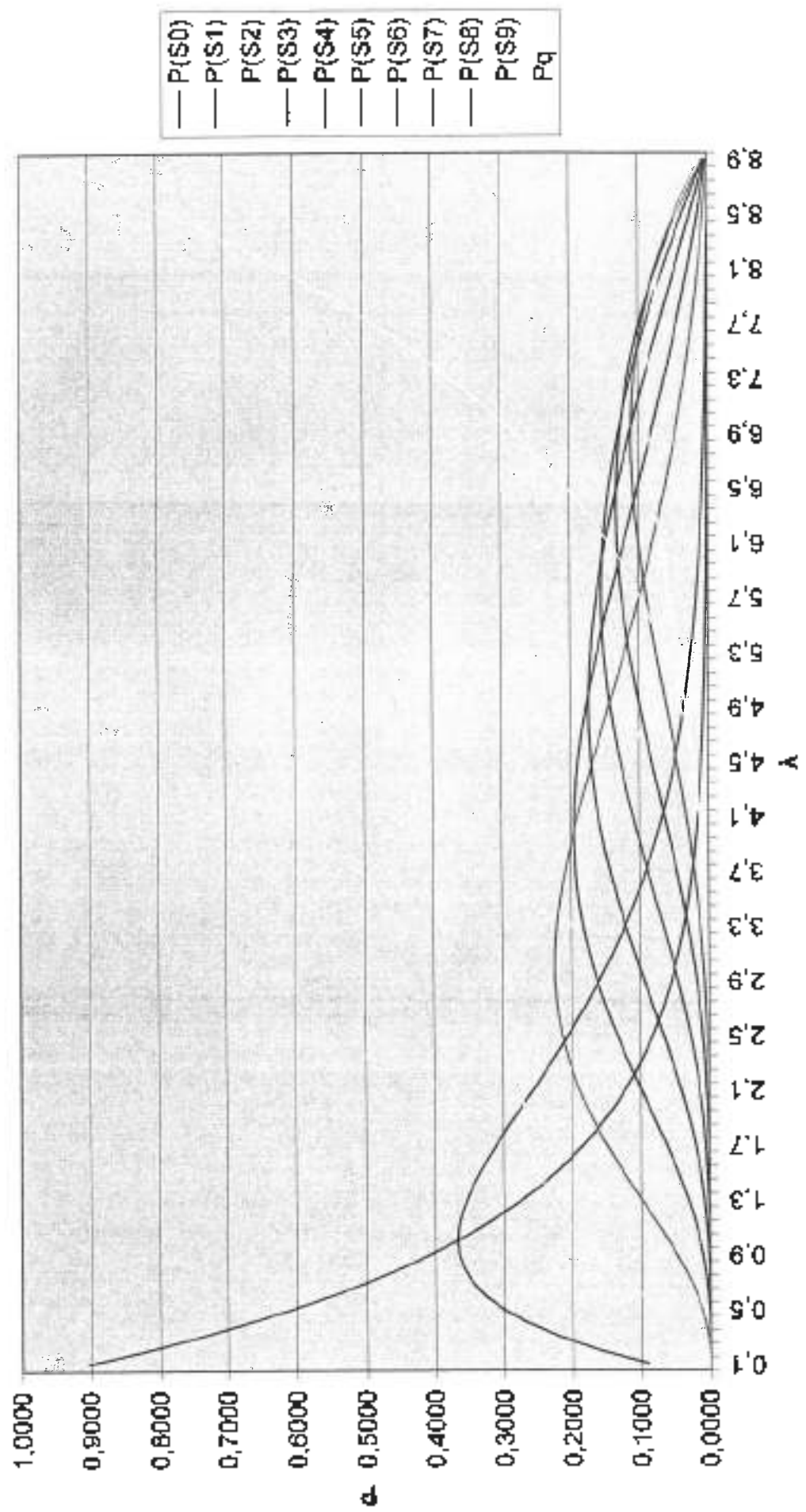
MM7



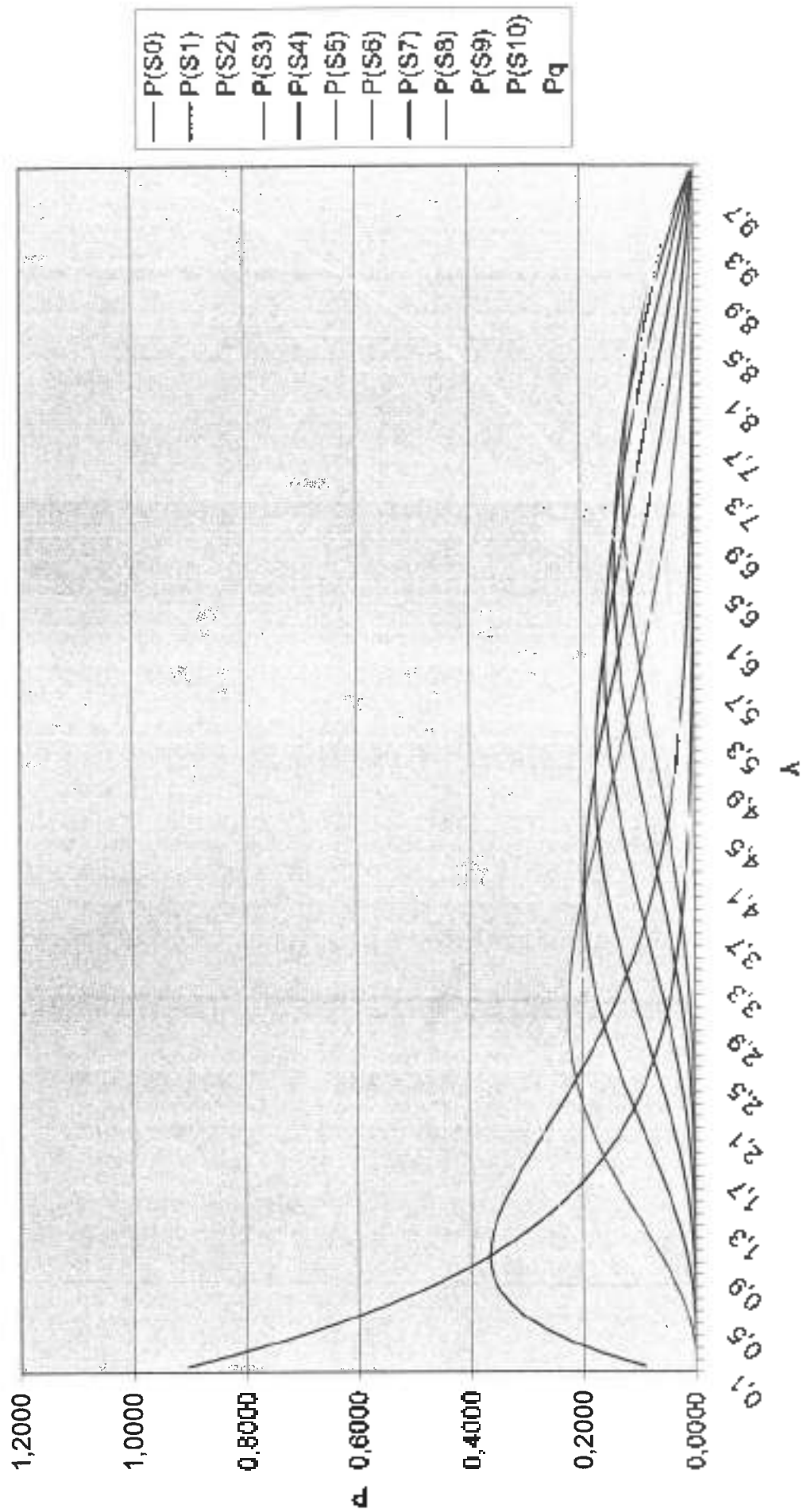
MM18



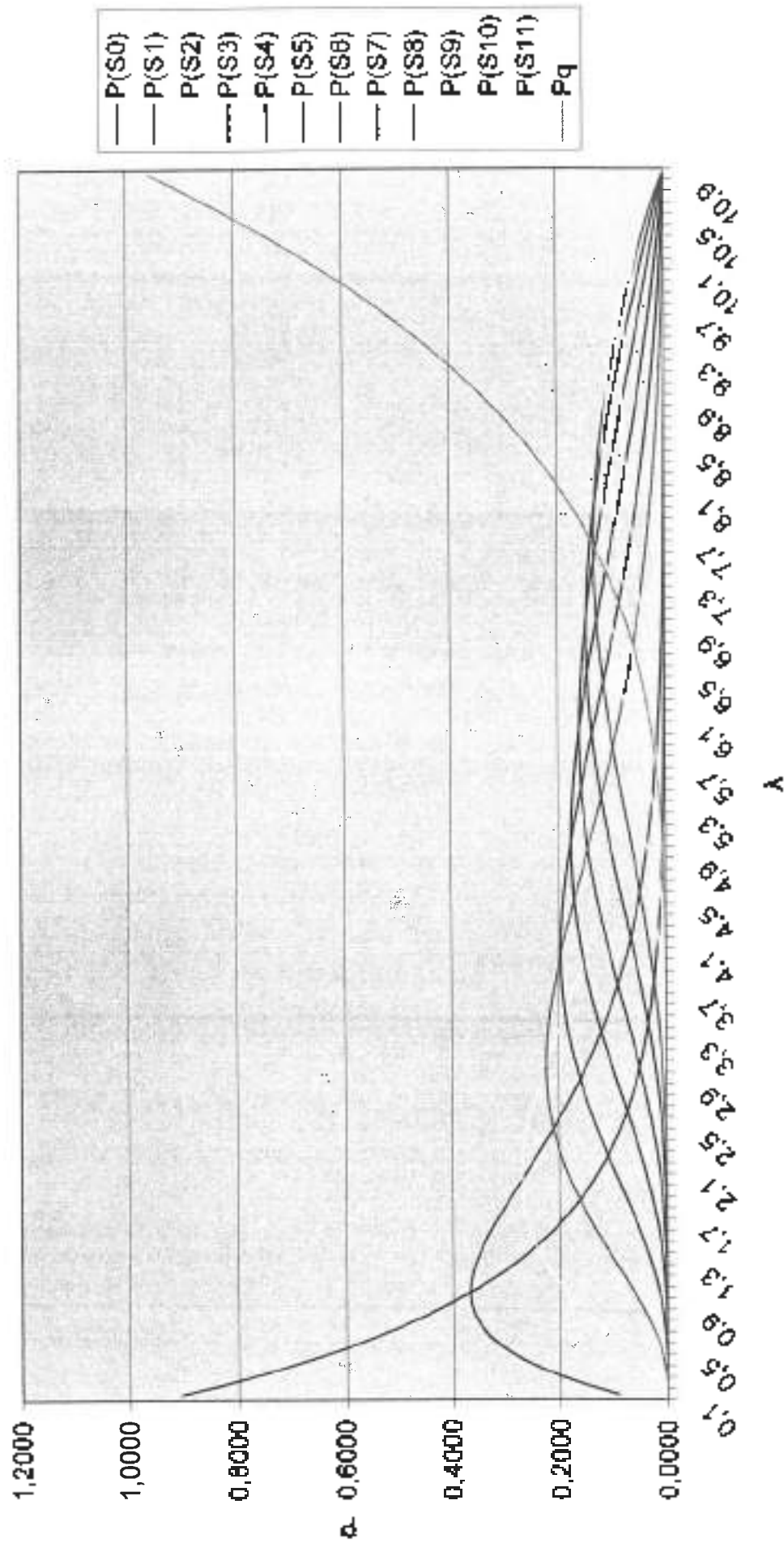
MM9



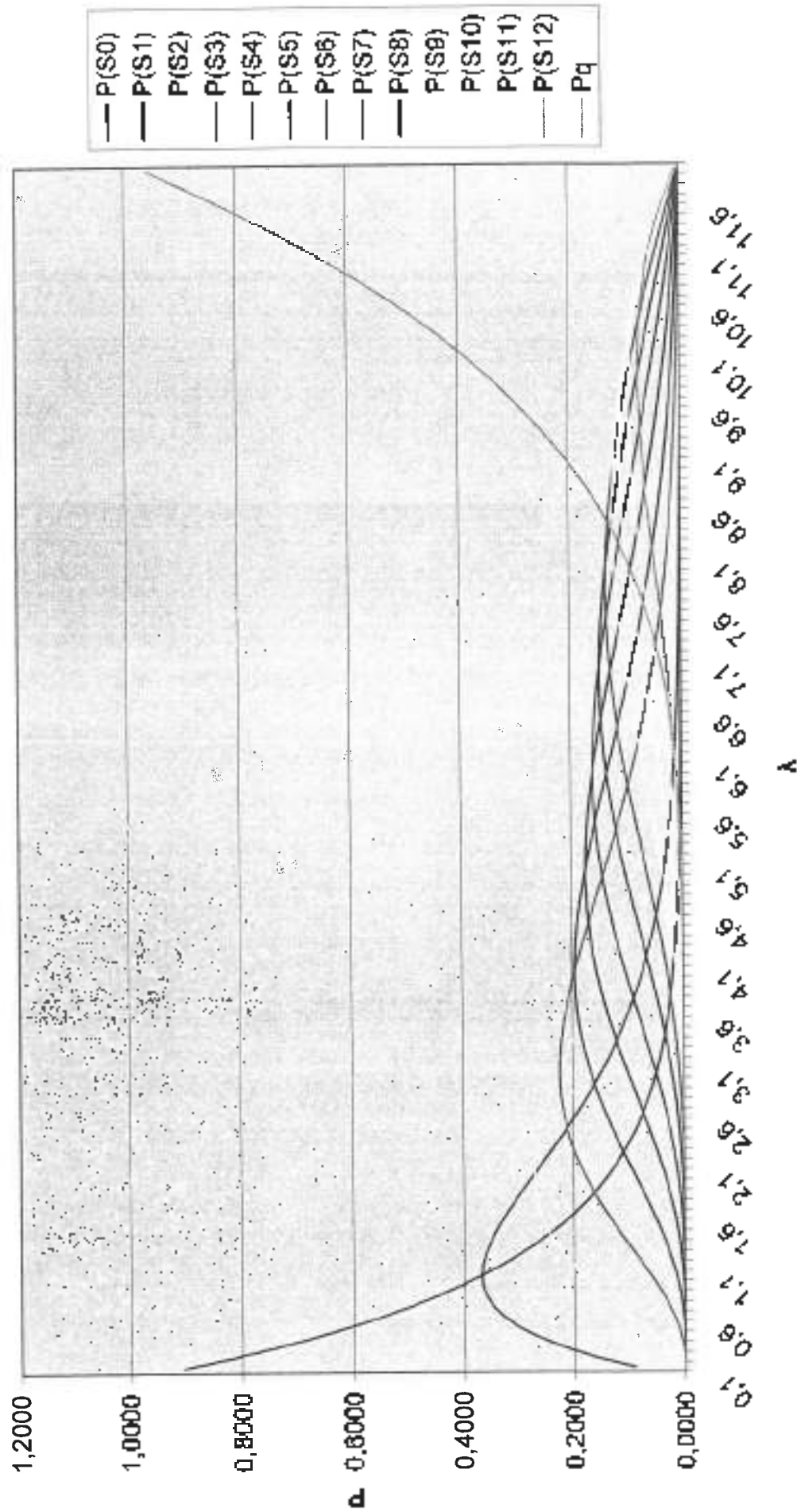
MM10



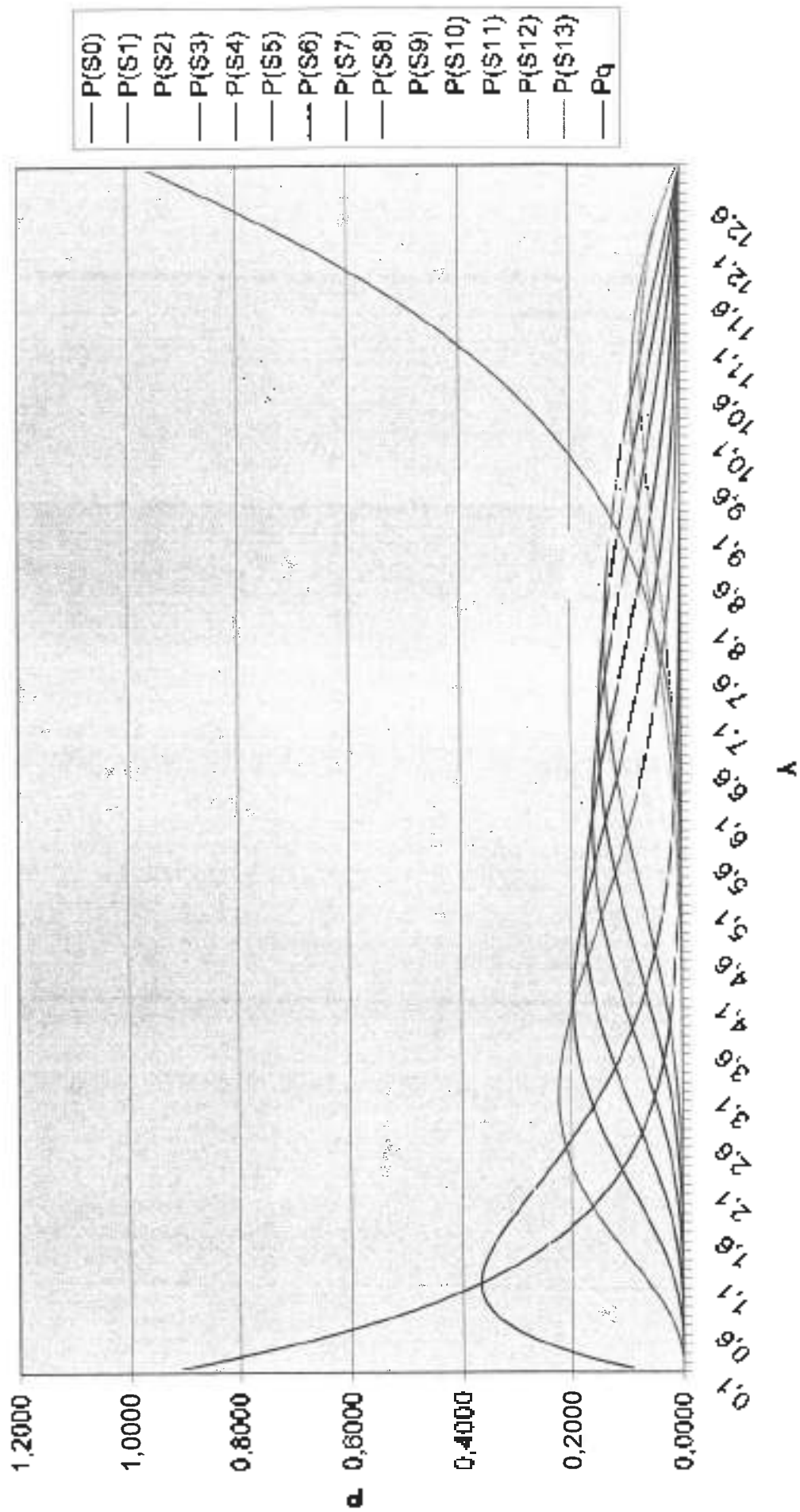
MM11

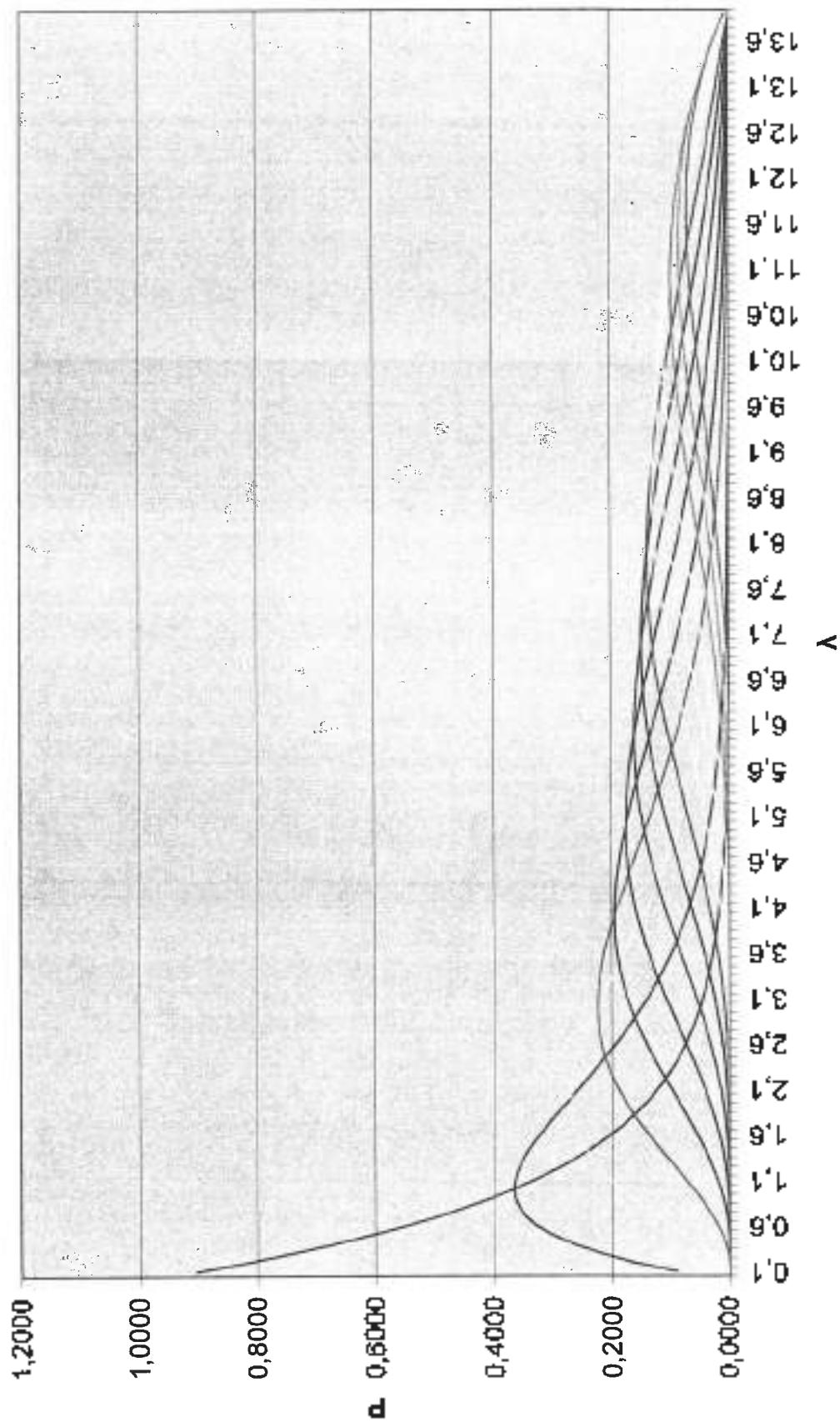


MM12

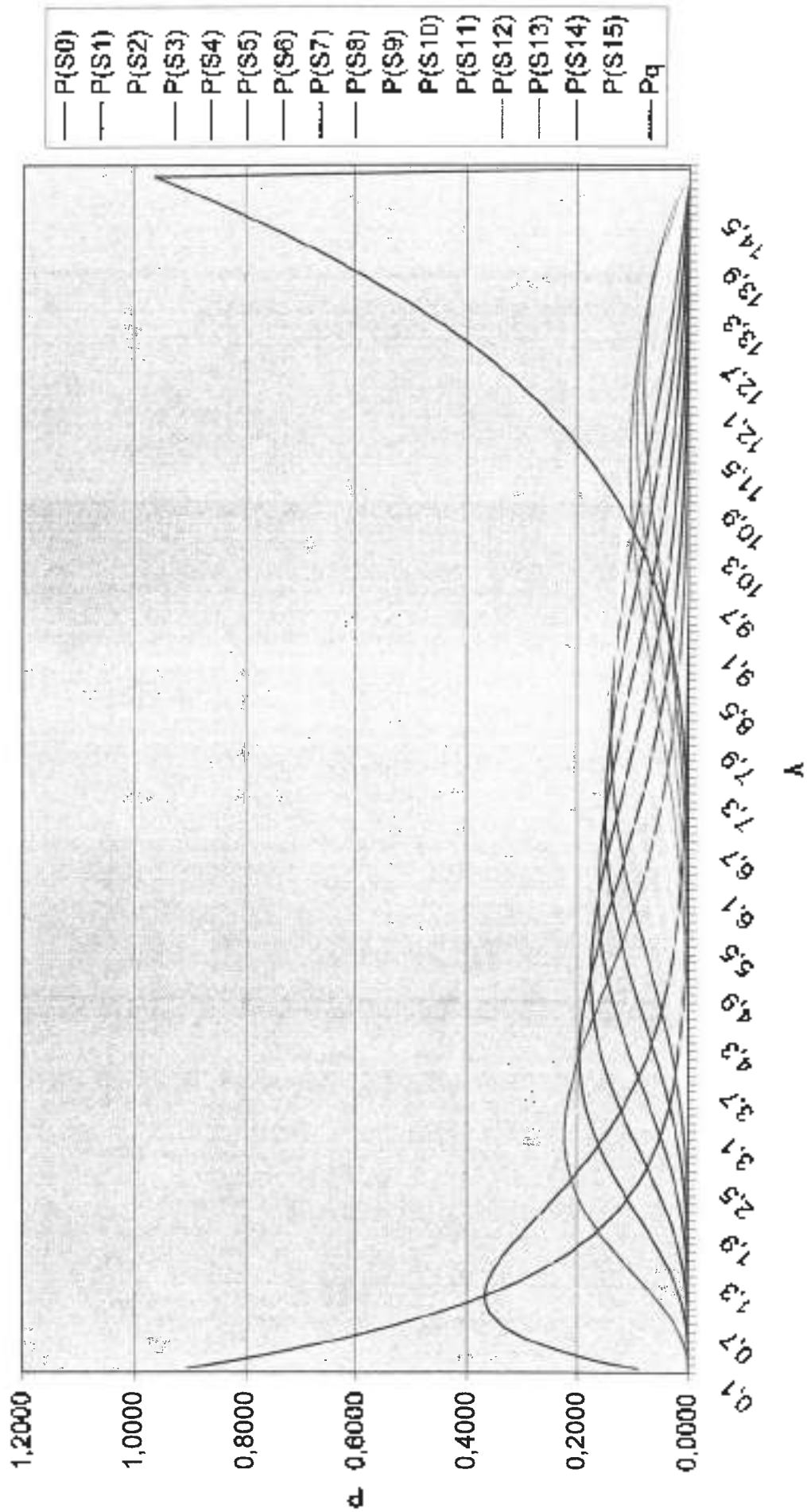


MM13

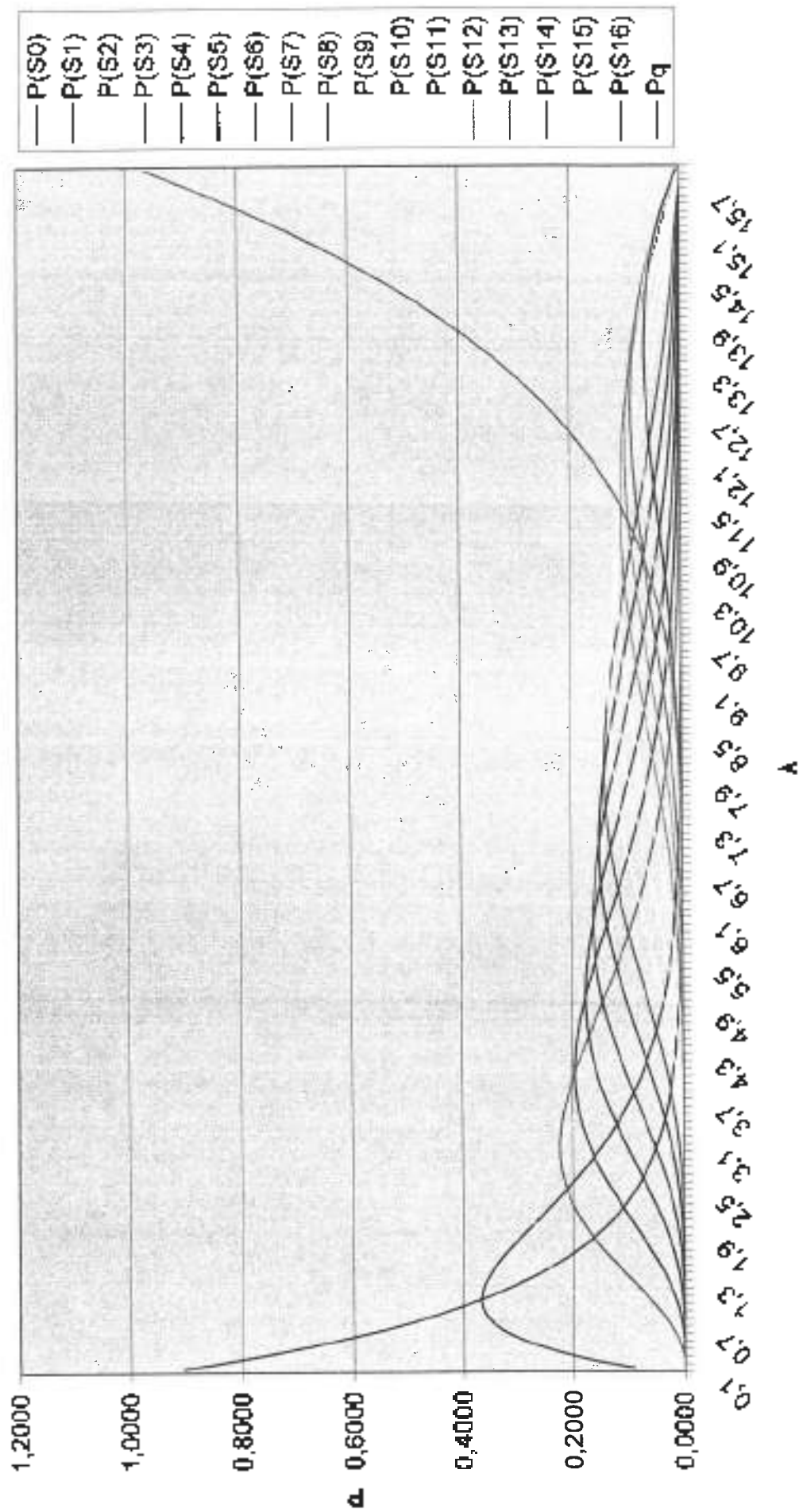




MM15



MNI16



MM17

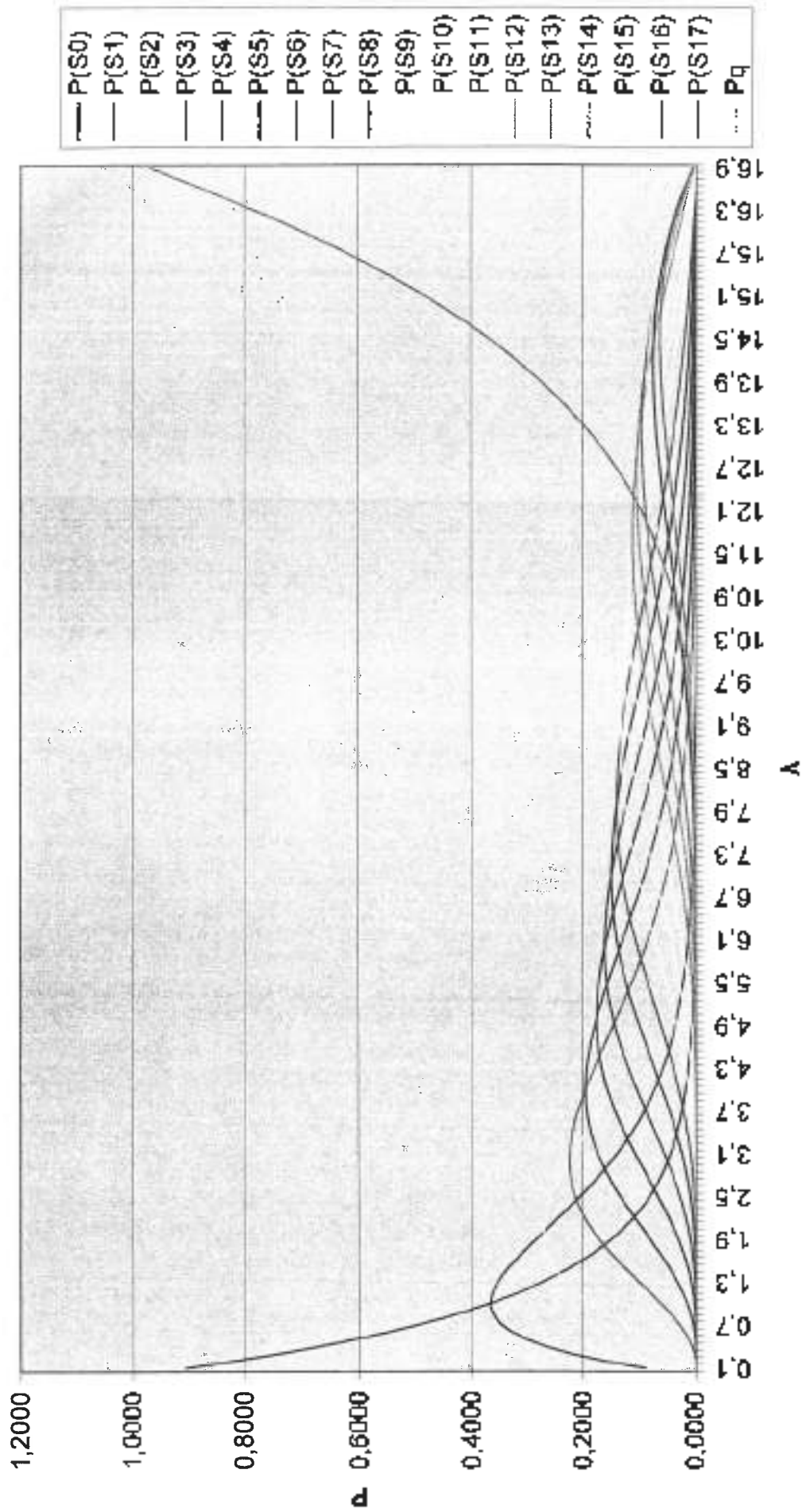
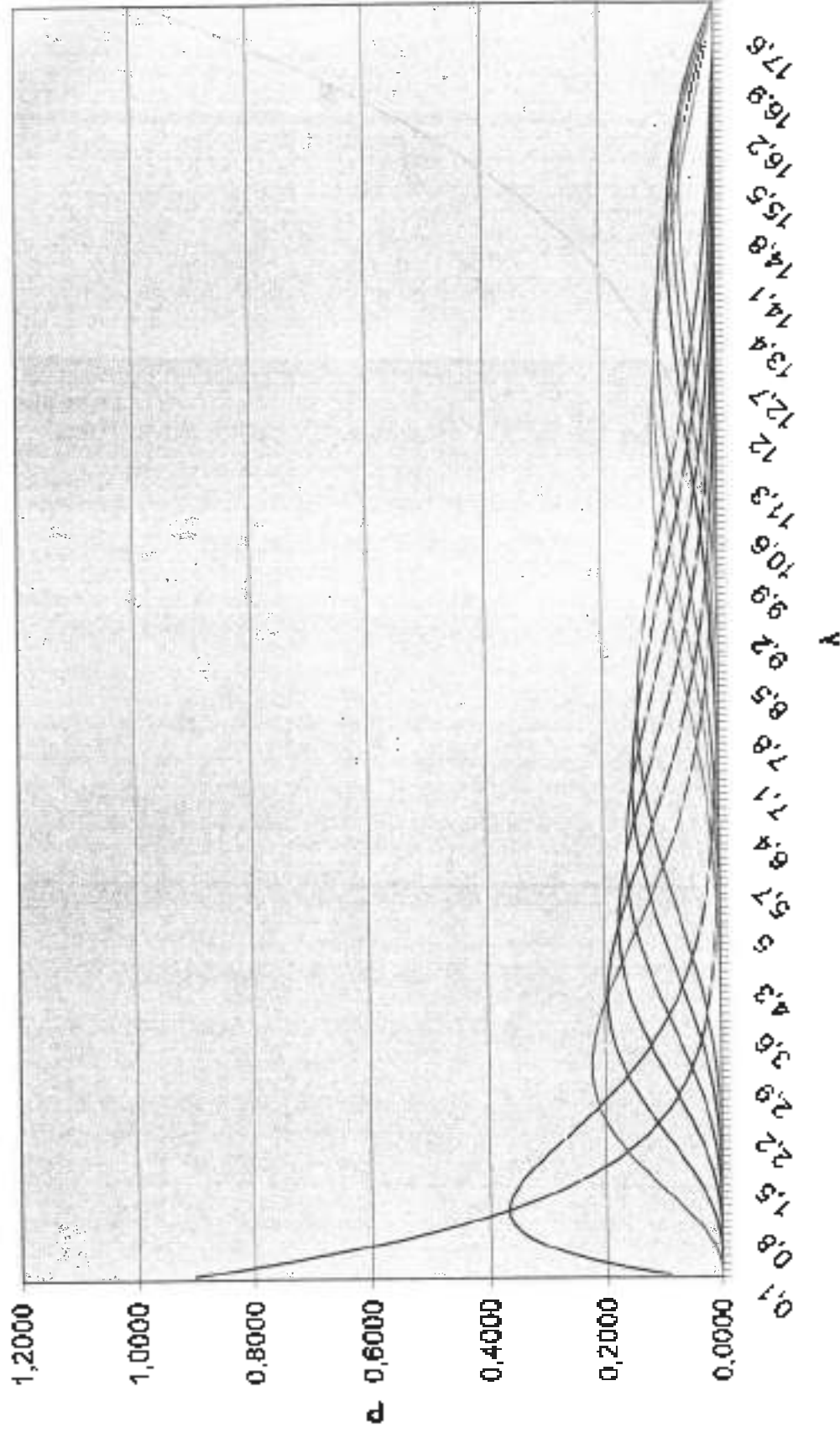
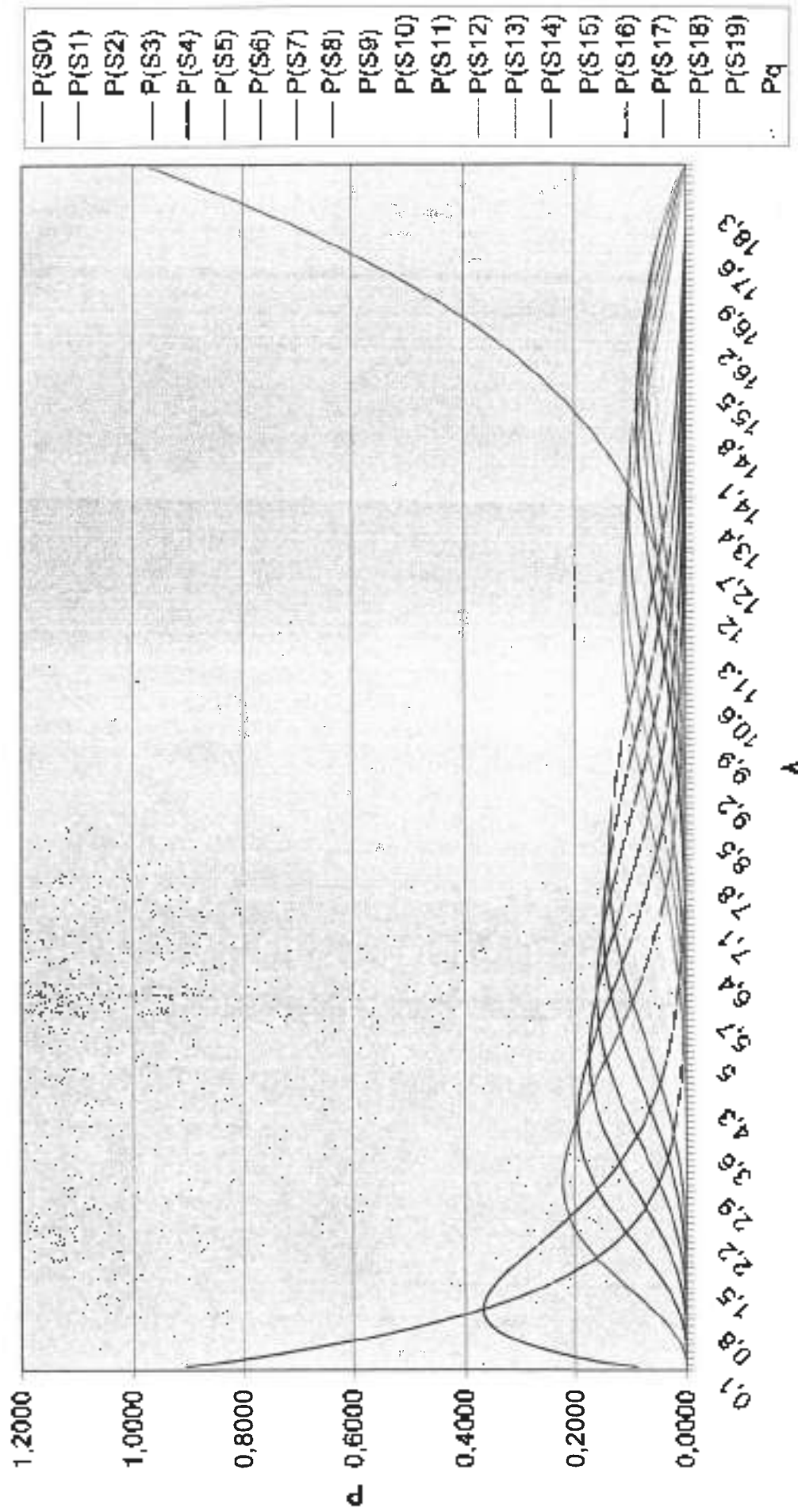


Figure 1 is a line graph showing the evolution of the probability distribution $P(S)$ over time t . The x-axis represents time t from 0.1 to 17.6. The y-axis represents the probability $P(S)$ from 0.0000 to 1.2000. Multiple curves are plotted, each corresponding to a different value of S (from S_0 to S_{18}). The curves show a peak that shifts and changes shape as time increases.



MM19



MM20

