



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗΣ ΥΠΟΔΟΜΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σχεδιασμός αυτόνομων λεωφορείων σε επίπεδο δικτύου με δυνατότητα αλλαγής γραμμών



ΒΑΣΙΛΕΙΑΔΗΣ ΤΗΛΕΜΑΧΟΣ-ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

Επιβλέπων: Γκιοτσαλίνης Κωνσταντίνος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2025

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Γκιοτσαλίτη Κωνσταντίνο, Καθηγητή της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π, για την ανάθεση της εργασίας, την καθοδήγηση και την συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την βοήθεια, την υποστήριξη, την ανοχή, αλλά και τη συντροφιά τους σε αυτά τα μοναδικά φοιτητικά χρόνια.

Αθήνα, Μάρτιος 2025,
Βασιλειάδης Τηλέμαχος-Παναγιώτης

Σχεδιασμός αυτόνομων λεωφορείων σε επίπεδο δίκτυο με δυνατότητα αλλαγής γραμμών

Βασιλειάδης Τηλέμαχος-Παναγιώτης

Επιβλέπων: Γκιотσαλίτης Κωνσταντίνος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Σύνοψη

Η αυξανόμενη αστικοποίηση προκαλεί έντονα προβλήματα στην καθημερινότητα των πολιτών, όπως συμφόρηση, περιβαλλοντική υποβάθμιση και κυκλοφοριακή αστάθεια. Η αυτόνομη οδήγηση προσφέρει λύσεις σε αυτά τα ζητήματα, μειώνοντας τη συμφόρηση, τα ατυχήματα και το λειτουργικό κόστος. Ειδικά τα αυτόνομα λεωφορεία, μέσω της δυνατότητας αλλαγής γραμμής (interlining), μπορούν να ανταποκριθούν σε αυξημένη ζήτηση ή προβλήματα σε άλλες γραμμές, βελτιώνοντας την αποτελεσματικότητα του συγκοινωνιακού συστήματος και την εξυπηρέτηση των επιβατών. Στόχος της παρούσας μελέτης είναι η ανάπτυξη ενός μοντέλου ελαχιστοποίησης του συνολικού κόστους και μείωσης της αναμονής των επιβατών για αυτόνομα λεωφορειακά συστήματα με χρήση της τακτικής εναλλαγής γραμμών. Το μοντέλο συνιστά ένα μη γραμμικό πρόβλημα μικτού ακεραίου προγραμματισμού, το οποίο θα μετατραπεί σε γραμμικό, προσαρμόζοντας καταλλήλως τις απαραίτητες μαθηματικές σχέσεις, με σκοπό την επίτευξη της βέλτιστης λύσης. Τα αποτελέσματα αναδεικνύουν τη χρησιμότητα της στρατηγικής των γραμμών εναλλαγής, καθώς και τις διαφορετικές δυνατότητες που παρέχει το μοντέλο στον διαχειριστή του κυκλοφοριακού συστήματος.

Λέξεις κλειδιά: δημόσια συγκοινωνία, αυτονομία, εναλλαγή γραμμής, προγραμματισμός αυτόνομων λεωφορείων, πρόβλημα ελαχιστοποίησης, τακτικός σχεδιασμός, γραμμικοποίηση, γραμμικό πρόβλημα μικτού ακεραίου

Design of autonomous buses at the network level with interlining capability

Vasiliadis Tilemachos-Panagiotis

Supervisor: Gkiotsalitis Konstantinos, Professor at NTUA

Abstract

The increasing urbanization is causing significant problems in citizens' daily lives, such as congestion, environmental degradation, and traffic instability. Autonomous driving offers solutions to these issues by reducing congestion, accidents, and operational costs. Specifically, autonomous buses, with the ability to change routes (interlining), can respond to increased demand or problems on other routes, improving the efficiency of the transportation system and passenger service. The goal of this study is to develop a model for minimizing total cost and reducing passenger waiting time for autonomous bus systems using the interlining strategy. The model is a nonlinear mixed-integer programming problem, which will be transformed into a linear one by appropriately adjusting the necessary mathematical relations, aiming for the optimal solution. The results highlight the usefulness of the interlining strategy and the various capabilities the model provides to the traffic system operator.

Keywords: public transport, autonomous bus, interlining, scheduling of autonomous buses, minimization problem, tactical planning, linearization, mixed-integer linear problem

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	9
2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	12
2.1. Εισαγωγή	12
2.2. Πρόβλημα χρονοδρομολόγησης αυτόνομων λεωφορείων	12
2.3. Πρόβλημα χρονοδρομολόγησης λεωφορείων με δυνατότητα αλλαγής γραμμών	14
2.4. Συμπεράσματα βιβλιογραφίας	18
3. Μοντελοποίηση του προβλήματος.....	19
4. Εφαρμογή σε ιδεατό δίκτυο	24
5. Εφαρμογή σε πραγματικό δίκτυο.....	30
5.1. Παράδειγμα 1 ^ο :.....	40
5.2. Παράδειγμα 2 ^ο (διαφορετικά σεντ βαρυτήτων):	42
5.3. Παράδειγμα 3 ^ο (διαφορετικός αριθμός στόλου):.....	45
5.4. Παράδειγμα 4 ^ο (διαφορετικό άνωτατο όριο λειτουργικής εξυπηρέτησης προς όφελος των επιβατών Θ):.....	46
6. Συμπεράσματα	47
7. Βιβλιογραφία.....	49
Παράρτημα: Μητρώα ζήτησης πραγματικών γραμμών και κώδικας Python.....	52

Ευρετήριο Πινάκων και Εικόνων

Πίνακας 1: Σύνοψη σχετικών εργασιών	17
Πίνακας 2: Νομογράφημα προβλήματος χρονοδρομολόγησης αυτόνομων λεωφορείων	20
Πίνακας 3: Πίνακας ζήτησης γραμμής L1	26
Πίνακας 4: Πίνακας ζήτησης γραμμής L2	26
Πίνακας 5: Πίνακας ζήτησης γραμμής L3	26
Πίνακας 6: Πίνακας ζήτησης γραμμής L4	26
Πίνακας 7: Αποτελέσματα μη αξιοποίησης γραμμών εναλλαγής	27
Πίνακας 8: Αποτελέσματα αξιοποίησης μιας γραμμής εναλλαγής	28
Πίνακας 9: Αποτελέσματα αξιοποίησης δύο γραμμών εναλλαγής	29
Πίνακας 10: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής L1	31
Πίνακας 11: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής L2 (1ο μέρος)	32
Πίνακας 12: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής L2 (2ο μέρος)	33
Πίνακας 13: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής L3	34
Πίνακας 14: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής εναλλαγής L4	37
Πίνακας 15: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής εναλλαγής L5	38
Πίνακας 16: Αποτελέσματα μη αξιοποίησης γραμμών εναλλαγής	40
Πίνακας 17: Αποτελέσματα αξιοποίησης μιας γραμμής εναλλαγής	40
Πίνακας 18: Αποτελέσματα αξιοποίησης δύο γραμμών εναλλαγής	41
Πίνακας 19: Πίνακας αποτελεσμάτων με έμφαση στη μείωση του λειτουργικού κόστους	42
Πίνακας 20: Πίνακας αποτελεσμάτων με παράλληλη έμφαση στη τακτική εξυπηρέτηση και στη μείωση λειτουργικού κόστους, χωρίς σημαντικό περιορισμό για ανάθεση λεωφορείων	43
Πίνακας 21: Πίνακας αποτελεσμάτων με περιορισμό στην ανάθεση επιπλέον λεωφορείων	44
Πίνακας 22: Πίνακας αποτελεσμάτων με συνολικό στόλο $\gamma=15$ λεωφορεία	45
Πίνακας 23: Πίνακας αποτελεσμάτων με συνολικό στόλο $\gamma=25$ λεωφορεία	45
Πίνακας 24: Πίνακας αποτελεσμάτων για ανώτατο όριο εξυπηρέτησης $\Theta=0,1$	46
Εικόνα 1: Σκαρίφημα ιδεατού δικτύου	25
Εικόνα 2: Χάρτης επιπέδου δικτύου παραδείγματος	39

1. Εισαγωγή

Την τελευταία δεκαετία η αυτόνομη οδήγηση είναι μια τεχνολογία που βρίσκεται στην αιχμή των εξελίξεων για την αυτοκίνηση, αλλά και γενικά για την συγκοινωνιακή ανάπτυξη. Αυτό συμβαίνει καθώς, έχει παρατηρηθεί ολοένα και αυξανόμενη παγκόσμια αστικοποίηση, σε βαθμό που αρχίζει να αποτελεί σημαντικό πρόβλημα για την καθημερινή ζωή των ανθρώπων. Η μεγαλύτερη συγκέντρωση πληθυσμού στις πόλεις οδηγεί σε περισσότερη χρήση φυσικών πόρων, δημιουργία περιβαλλοντικών προβλημάτων και αύξηση των επιπέδων διαταραχής της δημόσιας τάξης (Yin et al., 2015). Ως αποτέλεσμα της γενικής αύξησης του πληθυσμού στις πόλεις, προβλέπεται και η αύξηση των ενεργών ΙΧ μέσα σε αυτές. Για παράδειγμα σε έρευνα που έγινε στην Τουρκία το 2012 και με βάση τα έτη 2001-2007, είχε προβλεφθεί ότι το 2030 θα υπάρχουν παραπάνω από διπλάσια οχήματα σε σχέση με το 2010 (Solmaz & Çeldkten, 2012). Ο αυξανόμενος αριθμός των οχημάτων θα οδηγήσει σε περισσότερη κυκλοφοριακή συμφόρηση, που ήδη αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα της καθημερινότητας, το οποίο όλο και γιγαντώνεται. Το γεγονός αυτό έχει αναγκάσει τους ανθρώπους να ψάξουν λύσεις με τις οποίες θα μπορούν να βελτιώσουν τις συνθήκες διαβίωσης μέσα στις πόλεις. Ένας από τους τομείς που χρήζουν βελτίωσης και είναι άμεσα συνδεδεμένος με τη λειτουργία και παραγωγικότητα μιας πόλης, είναι οι μεταφορές και η μετακίνηση.

Όσον αφορά τους χρήστες ιδιωτικών οχημάτων, σύμφωνα με την έρευνα των Fagnant & Kockelman (2015), τα ατυχήματα που προκαλούνται από ανθρώπινους παράγοντες, όπως η υπερβολική ταχύτητα, το αλκοόλ και η απόσπαση προσοχής των οδηγών, καταλαμβάνουν το 93% των συνολικών οδικών ατυχημάτων. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι με τη πάροδο των ετών, όσο αυξάνονται τα οχήματα, τόσο θα αυξάνονται και τα οδικά ατυχήματα.

Η αυτονομία είναι ικανή να δώσει τις απαραίτητες λύσεις στα παραπάνω προβλήματα, αφαιρώντας, ως έναν βαθμό, τον ανθρώπινο παράγοντα και βελτιστοποιώντας τα συγκοινωνιακά συστήματα. Γι' αυτό το λόγο, ελέγχονται οι δυνατότητες της μετάβασης σε μεγαλύτερα επίπεδα αυτονομίας των οχημάτων και ειδικά των λεωφορείων.

Συγκεκριμένα, υπάρχουν ολοένα και περισσότερο πιλοτικά προγράμματα στην Ευρώπη, αλλά και στο κόσμο, που αφορούν τη λειτουργία αυτόνομων λεωφορείων και λεωφορειακών γραμμών με το ενδιαφέρον να αυξάνεται συνεχώς. Πολλά από αυτά τα προγράμματα στην Ευρώπη στοχεύουν στην σχεδόν άμεση ενσωμάτωση των αυτόνομων λεωφορείων στο δημόσιο συγκοινωνιακό σύστημα, ενώ άλλα έχουν σκοπό να δοκιμάσουν αυτή τη νέα τεχνολογία σε πραγματικές ή τεχνητές συνθήκες λόγω αυστηρών νομοθεσιών, καθώς και να προσδιορίσουν την αλληλεπίδραση και την αποδοχή τους από το επιβατικό κοινό. Το τελευταίο εμφανίζεται κυρίως σε περιοχές εκτός Ευρώπης.

Μερικά παραδείγματα τέτοιων πιλοτικών προγραμμάτων είναι στο Fribourg και στη Sion στην Ελβετία, η οποία θεωρείται και η πιο προηγμένη χώρα πάνω σε αυτό το κομμάτι, καθώς έχει ήδη καταφέρει να εντάξει αυτόνομα λεωφορεία στις δημόσιες

μεταφορές της με τακτικά δρομολόγια. Άλλες ενδεικτικές περιοχές στις οποίες έχει δοκιμαστεί αυτή η νέα τεχνολογία είναι το Βερολίνο, το Bad Birnbach και το Renningen στη Γερμανία, το Παρίσι, η Τουλούζη και η Λιόν στη Γαλλία, και το Wageningen στην Ολλανδία (Ainsalu et al., 2018). Επίσης, εκτενής αναφορά γίνεται και στις περιπτώσεις πιλοτικών στο Ελσίνκι στην Φινλανδία, στο Τάλιν στην Εσθονία και στο Kongsberg στη Νορβηγία (Müür & Karo, 2023).

Σε αυτή την έρευνα, θα μελετηθούν τα αυτόνομα λεωφορεία και οι καινούριες δυνατότητες που προσφέρουν στο συγκοινωνιακό δίκτυο καθώς και θα αναπτυχθεί ένα μοντέλο με το οποίο θα προβλέπεται αλλαγή γραμμής ενός συγκεκριμένου αριθμού λεωφορείων, έτσι ώστε να εξυπηρετηθεί μια παραπλήσια και αρκετά πιο φορτισμένη γραμμή.

Γενικά, τα αυτόνομα λεωφορεία προσφέρουν μια σειρά πλεονεκτημάτων στην αντίστοιχη λεωφορειακή γραμμή που εξυπηρετούν:

- Πιο χρονικά σταθερή διακύμανση και πιο ακριβής έλεγχος δρομολογίων, αφού δεν υπάρχει ανθρώπινη παρέμβαση και άρα δεν είναι παράγοντας πλέον η διαφορετικότητα στο στυλ οδήγησης μεταξύ ξεχωριστών οδηγών (Cao & (Avi) Ceder, 2019).
- Μείωση του κόστους λειτουργίας μιας λεωφορειακής γραμμής. Ένα μεγάλο ποσοστό χρημάτων συντήρησης των γραμμών, αντιστοιχεί στους χειριστές των λεωφορείων. Εκτός αυτού, προβλέπεται η μείωση των χρημάτων για τα καύσιμα των οχημάτων, είτε λόγω του ότι αυτά θα είναι κατά κύριο λόγο ηλεκτρικά, είτε επειδή ένα προγραμματισμένο μηχανήμα μπορεί να πετύχει ευκολότερα μια πιο «οικονομική» οδήγηση, σε σχέση με έναν άνθρωπο (Nagy & Horváth, 2020).
- Σε συνέχεια του προηγούμενου, η μη ύπαρξη ενός οδηγού σημαίνει και μη ύπαρξη «νεκρού χρόνου» ενός λεωφορείου. Ένας οδηγός χρειάζεται συχνά διαλείμματα ανάμεσα στα δρομολόγια. Κάτι τέτοιο αφαιρείται με την ύπαρξη ενός αυτόνομου λεωφορείου που μπορεί να δουλεύει αδιάκοπα. Αυτό οδηγεί σε μείωση λειτουργικού κόστους, αφού λιγότερα λεωφορεία μπορούν να εξυπηρετούν μια γραμμή. Για παράδειγμα, μια μελέτη από τους Nagy & Horváth στην πόλη Eger στην Ουγγαρία, δείχνει ότι τα αυτόνομα λεωφορεία έχουν τη δυνατότητα να μειώσουν τον απαιτούμενο στόλο από 37 σε 32-33 λεωφορεία (εξοικονομώντας τουλάχιστον 4 λεωφορεία) για να παρέχουν την ίδια υπηρεσία (Nagy & Horváth, 2020).
- Τα αυτόνομα λεωφορεία μπορούν να αυξήσουν τη συχνότητα των δρομολογίων χωρίς να αυξήσουν τα συνολικά έξοδα λειτουργίας. Οι επιβάτες συχνά προτιμούν μικρότερες χρονοαποστάσεις ανάμεσα σε 2 λεωφορεία έτσι ώστε να μην χρειάζεται να περιμένουν αρκετή ώρα στη στάση. Η ύπαρξη πιο μικρών αλλά αυτόνομων λεωφορείων, πιθανώς μειώνει τα έξοδα λειτουργίας και ταυτόχρονα μειώνει την μέση χρονοαπόσταση μεταξύ λεωφορείων της ίδιας γραμμής, αυξάνοντας την θελκτικότητα χρήσης τους από τους επιβάτες (Nagy & Horváth, 2020).

Ακόμη, ένα επιπλέον ερώτημα που τίθεται όσον αφορά τα αυτόνομα λεωφορεία και το οποίο αναφέρθηκε και παραπάνω, είναι η ενδεχόμενη ή μη προτίμησή τους από το επιβατικό κοινό. Όπως διαπιστώνεται στην έρευνα των Mouratidis & Cobeña

Serrano (2021), τα αποτελέσματα είναι πολύ ικανοποιητικά και πως οι επιβάτες, σε μεγάλο βαθμό, θα προτιμήσουν την αυτόνομη μετακίνηση, εάν τους προσφερθεί.

Ωστόσο, για να γίνει εφικτή η λύση των αυτόνομων λεωφορείων και για να αξιοποιηθούν σε πλήρες βαθμό, πρέπει πρωτίστως να καλύπτονται συγκεκριμένες προδιαγραφές όσον αφορά τις υποδομές που υπάρχουν στις πόλεις που αυτά θα εφαρμοστούν. Αυτές οι υποδομές δεν είναι απαραίτητο να υφίστανται σε όλη τη περιοχή εφαρμογής, οπότε χρειάζεται να επιλεγθούν καθορισμένες διαδρομές στις οποίες θα μπορούν να καλύπτονται οι απαραίτητες ανάγκες. Γι' αυτό, στην εργασία των Beckmann et al. (2025) πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με εμπειρογνώμονες ώστε να αναζητηθούν και να μελετηθούν αυτές οι προδιαγραφές για το καθορισμό των διαδρομών, όπως και ταξινομήθηκαν με βάση τη σημαντικότητά τους.

Το επόμενο θέμα που θα αναλυθεί είναι η δυνατότητα αυτών των λεωφορείων να αλλάξουν γραμμή (interlining), με στόχο να εκμεταλλευτούμε, όσο το δυνατόν περισσότερο, συγκεκριμένα προνόμια που μας δίνονται λόγω της αυτονομίας των λεωφορείων.

Η δυνατότητα αλλαγής γραμμής είναι μια ικανότητα λεωφορείων να αλλάξουν γραμμή και να εξυπηρετήσουν μια άλλη, στην οποία για κάποιο λόγο η υφιστάμενη κατάσταση σε έναν τομέα της γραμμής, είναι περισσότερο φορτισμένη (πχ. πρόβλημα με ένα λεωφορείο του στόλου, πιθανό τροχαίο/μηχανική βλάβη ή μεγάλη προσωρινή επιβατική ζήτηση). (Gkiotsalitis et al., 2019a)

Οι περισσότερες λεωφορειακές γραμμές έχουν προγραμματιστεί με κύριο στόχο να ικανοποιούν το φόρτο αιχμής ενός τομέα τους, έστω και οριακά, για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Συγκεκριμένα, οι δύο πιο διαδεδομένες μέθοδοι είναι αυτές του Μέγιστου Σημείου Φόρτισης (Maximum Loading Point Method), η οποία λαμβάνει υπόψη της μόνο το φόρτο της δυσμενέστερης στάσης και η Μέθοδος Προφίλ Φόρτισης γραμμής (Load Profile Method), η οποία εξισώνει και τις αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών στάσεων και προσπαθεί να εξισορροπήσει λίγο το σύστημα για να το κάνει πιο οικονομικό (Gkiotsalitis, 2022). Αυτό σημαίνει ότι στο υπόλοιπο κομμάτι της γραμμής, η λειτουργικότητα μπορεί να είναι υποβέλτιστη, αφού ο αριθμός των αναγκαίων λεωφορείων είναι πολύ χαμηλότερος από τον υφιστάμενο στόλο για εκείνη τη περίοδο. Με τη μέθοδο της αλλαγής γραμμών, ένα λεωφορείο μιας άλλης γραμμής μπορεί να είναι διαθέσιμο να εξυπηρετήσει αυτό το φορτισμένο κομμάτι της παραπλήσιας, με αποτέλεσμα τη μείωση του στόλου και την οικονομικότερη διαχείριση αυτού.

Η συγκεκριμένη μέθοδος, συνήθως, δεν είναι εφικτή με τα σημερινά ανθρωποκίνητα λεωφορεία για νομικούς λόγους, αλλά και λόγους ικανότητας, αφού ο οδηγός δεν είναι σε θέση να γνωρίζει και να εκτελεί δρομολόγια διαφορετικών γραμμών ταυτόχρονα. Τα αυτόνομα λεωφορεία έχουν την ευελιξία και μπορούν να προγραμματιστούν για να δώσουν τη λύση σε αυτό το πρόβλημα άμεσα.

2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

2.1. Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, ο σκοπός είναι να αναζητηθούν παρόμοιες έρευνες με σκοπό την μελέτη και αξιολόγηση των μεθοδολογιών που σχετίζονται με τη παρούσα διπλωματική εργασία.

2.2. Πρόβλημα χρονοδρομολόγησης αυτόνομων λεωφορείων

Η ανάλυση ξεκινά με το θέμα της χρήσης αυτόνομων οχημάτων όπου ο Ryosuke Abe (2019) επιχειρεί να ποσοτικοποιήσει τα ενδεχόμενα πλεονεκτήματα αυτόνομων λεωφορείων και ταξί στο συγκοινωνιακό σύστημα της Ιαπωνίας. Αρχικά, θέτει κατάλληλες παραδοχές για την αυτόνομη οδήγηση, όπως οι επιπτώσεις στο κόστος των οχημάτων, το μειωμένο κόστος εργασίας και το μειωμένο άγχος για τους οδηγούς ιδιωτικών οχημάτων. Στη συνέχεια, υπολογίζει το λειτουργικό κόστος των αυτόνομων λεωφορείων και ταξί, καθώς και το κόστος ταξιδιού για αυτόνομα και συμβατικά οχήματα σε διάφορες συνθήκες δικτύου. Παρατηρείται ότι, η εισαγωγή των αυτόνομων οχημάτων στο συγκοινωνιακό δίκτυο αναμένεται να αποφέρει οφέλη όπως μείωση του συνολικού κόστους, καθώς και βελτίωση της προσβασιμότητας της δημόσιας συγκοινωνίας λόγω του μειωμένου κόστους ταξιδιού.

Μια παρόμοια προσέγγιση ακολουθούν και οι Nagy & Horváth (2020) στη μελέτη τους που αφορά τις επιπτώσεις ένταξης αυτόνομων λεωφορείων στο συγκοινωνιακό σύστημα μιας Ουγγρικής πόλης των 50 χιλιάδων κατοίκων. Συμπεραίνουν, ότι με την αντικατάσταση των ανθρωποκίνητων λεωφορείων με αυτόνομα, σημειώνεται οικονομικότερη και αποτελεσματικότερη διαχείριση του στόλου, αφού μειώνεται ο αναγκαίος αριθμός των απαιτούμενων οχημάτων για την κάλυψη της ίδιας ζήτησης (από 37 στα 32), καθώς και μικρότερο λειτουργικό κόστος (519.000-708.000 ευρώ κέρδος, δηλαδή 17-24% κέρδος για το συγκεκριμένο σύστημα). Σε μεταγενέστερή τους εργασία (Nagy & Horváth, 2021) εξετάζουν και δύο μεγαλύτερες πόλεις και συμπεραίνουν ότι όσο πιο φορτισμένο είναι ένα συγκοινωνιακό δίκτυο, τόσο περισσότερα οικονομικά κέρδη μπορούν να προκύψουν.

Το παραπάνω θέμα έχει προσεγγιστεί και στην εργασία των Hatzenbühler et al. (2020), στην οποία όμως μελετάται και η μεταβατική φάση, στην οποία τα αυτόνομα λεωφορεία εισάγονται σταδιακά, επιλέγοντας τις κατάλληλες λεωφορειακές γραμμές τις οποίες θα εξυπηρετούν. Διερευνάται τόσο η ταυτόχρονη όσο και η διαδοχική ανάπτυξή τους, σε πολλαπλές γραμμές και αναπτύσσεται ένα δυναμικό πλαίσιο μοντελοποίησης, στο οποίο λαμβάνεται υπόψιν οι προσαρμοστικές επιλογές διαδρομής των χρηστών. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται ένα αναλυτικό μοντέλο για το προσδιορισμό των αρχικών λύσεων, με κύριες παραμέτρους τη συχνότητα εξυπηρέτησης και τη χωρητικότητα του οχήματος, και στη συνέχεια οι παραπάνω

παράμετροι γίνονται μεταβλητές για να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση σε κάθε λεωφορειακή γραμμή συμπεριλαμβανομένου των δυναμικών αλλαγών που μπορεί να προκύψουν με τη σταδιακή μετάβαση στην αυτονομία. Παρατηρείται ότι η υπηρεσία των αυτόνομων λεωφορείων είναι ικανή να προσελκύσει περισσότερους επιβάτες, χάρη στη βελτιωμένη παροχή των υπηρεσιών της.

Διαφορετική προσέγγιση ακολουθεί η εργασία των Tian et al. (2022) όπου αναλύεται αυτή η «μεταβατική φάση», με ένα μη γραμμικό μοντέλο μικτού ακεραίου (Mixed-integer non-linear), το οποίο έχει ως στόχο να καθορίσει τη βέλτιστη στρατηγική ανάπτυξη που θα ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος. Παρουσιάζεται ένα πλαίσιο μαθηματικής μοντελοποίησης πολλαπλών σταδίων για τη βελτιστοποίηση της στρατηγικής ανάπτυξης και του τρόπου ένταξης των αυτόνομων λεωφορείων στις ήδη υπάρχουσες λεωφορειακές γραμμές. Λαμβάνεται υπόψιν ένα μοντέλο διάχυσης (diffusion model) για την πρόβλεψη της εξέλιξης του ποσοστού αποδοχής του επιβατικού κοινού προς τα αυτόνομα λεωφορεία. Ο στόχος της εργασίας είναι να προσδιοριστεί η βέλτιστη στρατηγική ανάπτυξη, ελαχιστοποιώντας το κόστος μετακίνησης και επιλύεται με μια μέθοδο δύο φάσεων που συνδυάζει έναν αλγόριθμο αναζήτησης, η οποία επιλύεται με τη βοήθεια Γενετικού Αλγορίθμου, και με μια μέθοδο διπλής προβολής (double projection method). Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν τα οφέλη των αυτόνομων οχημάτων και τη σημασία που πρέπει να δοθεί στην υιοθέτηση και εξοικείωση των επιβατών.

Στη συνέχεια, από τους Zhuang Dai, Xiaoyue Cathy Liu, Xi Chen και Xiaolei Ma (Dai et al., 2020) μελετάται η βελτιστοποίηση ενός μικτού συγκοινωνιακού συστήματος (συμβατικών και αυτόνομων λεωφορείων) με έμφαση στη χρονοδρομολόγηση και την χωρητικότητα του. Τονίζουν ότι με την έλευση της τεχνολογίας συνδεδεμένων και αυτόνομων οχημάτων και την εισαγωγή του αυτόνομου μικρού λεωφορείου (minibus/shuttle), ο κοινός σχεδιασμός της χωρητικότητας του λεωφορείου και η dispatch headway υπόσχεται περαιτέρω βελτίωση της απόδοσης του συστήματος με ταυτόχρονη μείωση του λειτουργικού κόστους και του κόστους επιβατών. Μοντελοποιούν το παραπάνω πρόβλημα ως ένα μη γραμμικό προγραμματιστικό μοντέλο μικτού ακεραίου (mixed integer), το οποίο λύνεται χρησιμοποιώντας μια δυναμική στοχαστική προσέγγιση και τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η μείωση του λειτουργικού κόστους και του κόστους αναμονής των επιβατών είναι αρκετά ικανοποιητική.

Κατόπιν, εξετάζεται το πρόβλημα της χρονοδρομολόγησης αυτόνομων λεωφορείων σε λεωφορειακά συγκοινωνιακά συστήματα πλήρους αυτονομίας, σε συνδυασμό με διάφορες τακτικές που χρησιμοποιούνται και με τα υφιστάμενα συμβατικά οχήματα.

Για παράδειγμα, οι Cao & Avi Ceder (2019) προτείνουν μια νέα μεθοδολογία με στόχο τον καθορισμό ενός βελτιστοποιημένου χρονοδιαγράμματος συγκοινωνιακής μεταφοράς ενσωματωμένο με τον προγραμματισμό οχημάτων, ενσωματώνοντας τη στρατηγική παράλειψης στάσεων (skip-stop) με βάση τη ζήτηση επιβατών σε πραγματικό χρόνο. Η ανάλυσή τους βασίζεται στη γραφική ιδέα μιας ελλειμματικής συνάρτησης (Deficit Function) και λαμβάνει υπόψη τους περιορισμούς χωρητικότητας του οχήματος. Επιλύεται με τη χρήση Γενετικού Αλγορίθμου και μιας μεθόδου επανάληψης με δυαδικές μεταβλητές με σκοπό την επίτευξη

αποτελεσματικότερων λύσεων. Παρατηρείται μείωση περίπου 2% στον συνολικό χρόνο ταξιδιού των επιβατών και μείωση περίπου 8% του στόλου σχετικά με λύσεις που δεν λαμβάνουν υπόψιν την στρατηγική παράλειψης στάσεων.

Οι K. Gkiotsalitis, M. Schmidt και E. van der Hurk (Gkiotsalitis et al., 2022) διερευνούν τη βέλτιστη ρύθμιση της συχνότητας υπογραμμών (SFS) σε δρομολόγια αυτόνομων λεωφορείων υπό αβέβαιη ζήτηση, όπου υπογραμμή (subline) είναι ένα υποσύνολο των ιδίων συνεχόμενων στάσεων μιας ολόκληρης λεωφορειακής γραμμής. Παρουσιάζουν ένα μοντέλο ρύθμισης συχνότητας που θέτει αυτόνομα μίνι λεωφορεία σε υπογραμμές προκειμένου να εκμεταλλευτούν όσο το δυνατόν περισσότερο τους διαθέσιμους πόρους και να ελαχιστοποιήσουν το λειτουργικό κόστος και το κόστος του χρόνου αναμονής των επιβατών. Το μοντέλο, το οποίο αρχικά διατυπώνεται ως ένα μη γραμμικό μοντέλο μικτού ακεραίου, γραμμικοποιείται ώστε να προκύψει η μοναδική βέλτιστη λύση. Η έρευνα βασίζεται σε υφιστάμενη γραμμή αυτόνομων λεωφορείων δεκατεσσάρων στάσεων στην πόλη Eberbach της Γερμανίας, καθώς και σε μία φανταστική γραμμή είκοσι στάσεων, για διαφορετικά σενάρια επιβατικής ζήτησης. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν μείωση του λειτουργικού κόστους από 10% έως 40%, ανάλογα με τη διακύμανση της επιβατικής ζήτησης.

Τέλος, η εργασία των Guo et al., (2023) αντιμετωπίζει τις προκλήσεις της αποτελεσματικής διαχείρισης αυτόνομων λεωφορείων χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση κυλιόμενου ορίζοντα. Συνδυάζει τις προβλέψεις ζήτησης, την προσαρμογή σχεδίων και τη δυναμική ανάθεση για τη βελτιστοποίηση της δρομολόγησης και του προγραμματισμού σε πραγματικό χρόνο. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως μικτό ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα (MILP) για τη δημιουργία αρχικών σχεδίων, τα οποία στη συνέχεια ενημερώνονται με βάση τα δεδομένα που προκύπτουν σε πραγματικό χρόνο και την προβλεπόμενη ζήτηση. Η προσέγγιση επιτυγχάνει την αναβάθμιση της λειτουργικής αποδοτικότητας, τη μείωση των χρόνων αναμονής και τη βελτίωση της ποιότητας υπηρεσιών για τους επιβάτες, ενώ προσαρμόζεται σε μεταβαλλόμενα πρότυπα ζήτησης σε αστικά περιβάλλοντα.

2.3. Πρόβλημα χρονοδρομολόγησης λεωφορείων με δυνατότητα αλλαγής γραμμών

Η βιβλιογραφία σχετικά με το πρόβλημα της χρονοδρομολόγησης λεωφορείων με δυνατότητα αλλαγής γραμμών είναι περιορισμένη, με τις σημαντικότερες έρευνες να περιλαμβάνουν τις ακόλουθες τρεις μελέτες.

Στην εργασία των Zahedi et al. (2022) εισάγεται και αξιολογείται η έννοια της δυναμικής αλλαγής γραμμής των λεωφορείων και εξετάζονται συστηματικά οι επιπτώσεις της στην αξιοπιστία των υπηρεσιών. Το πρόβλημα της διαχείρισης αποστολών (dispatching) μοντελοποιείται ως πρόβλημα βελτιστοποίησης και

αξιολογείται μέσω προσομοίωσης υπό διαφορετικές συνθήκες λειτουργίας. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η δυνατότητα αλλαγής γραμμής μπορεί να βελτιώσει την αξιοπιστία των δρομολογίων, αυξάνοντας τις έγκαιρες αναχωρήσεις και μειώνοντας τη μεταβλητότητα του χρόνου άφιξης. Επιπλέον, όταν όλα τα λεωφορεία διαθέτουν αυτή τη δυνατότητα, η απόδοση του συστήματος βελτιώνεται ακόμη περισσότερο, επιτρέποντας τη συχνότερη δρομολόγηση.

Έπειτα, η έρευνα των K. Gkiotsalitis, Z. Wu και O. Cats (Gkiotsalitis et al., 2019a) εξετάζει και μια επιπλέον στρατηγική. Αναλυτικότερα, προτείνεται μια μέθοδος βασισμένη σε κανόνες για τη συστηματική δημιουργία και ενσωμάτωση εναλλακτικών επιλογών επένδυσης, όπως γραμμές short-line και interline, στο πρόβλημα της συχνότητας και της κατανομής πόρων, με στόχο τη μείωση του χρόνου αναμονής των επιβατών στις στάσεις, αλλά και μείωση του λειτουργικού κόστους. Αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς προσεγγίζεται ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς, με τη χρήση βαρών (penalties), που επιβαρύνουν δυσανάλογα τη μη ικανοποίηση των περιορισμών του αρχικού προβλήματος. Στη συνέχεια επιλύεται με έναν μετα-ευρετικό Γενετικό Αλγόριθμο (Genetic Algorithm).

Σε μια πιο πρόσφατη εργασία, εξετάστηκε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που ενσωματώνει το χρονοδιάγραμμα συγχρονισμού και τον προγραμματισμό λεωφορείων επικαλυπτόμενων γραμμών. Στο πλαίσιο αυτό, προτείνεται ένα διαντικειμενικό μαθηματικό μοντέλο, το οποίο, πέρα από τη μείωση του απαιτούμενου στόλου λεωφορείων, στοχεύει στη βελτίωση της συχνότητας των δρομολογίων, διατηρώντας παράλληλα ομαλή ροή στα σημεία συγχρονισμού. Για την επίλυση του προβλήματος, χρησιμοποιείται ένας αλγόριθμος με ε-περιορισμούς, ο οποίος εξασφαλίζει την εύρεση βέλτιστων λύσεων Pareto, επιτρέποντας την ανάλυση του συσχετισμού μεταξύ επιπέδου εξυπηρέτησης και λειτουργικού κόστους. Τα ευρήματα καταδεικνύουν ότι η ενσωματωμένη αυτή προσέγγιση ενισχύει την αποτελεσματικότητα των υπηρεσιών, μειώνει τον απαιτούμενο στόλο και τις αποκλίσεις δρομολογίων, ενώ συμβάλλει στη βελτίωση της λειτουργικής ευελιξίας και στη μείωση του κόστους λειτουργίας (Ibarra-Rojas et al., n.d.).

Σε αντίθεση με τις προαναφερθείσες μελέτες, οι επόμενες έρευνες εστιάζουν αποκλειστικά στη χρονοδρομολόγηση μέσω της στρατηγικής των υπογραμμών (short-line), χωρίς να ενσωματώνουν την προσέγγιση της αλλαγής γραμμών (interline). Παρόλα αυτά, η συγκεκριμένη στρατηγική συνιστά έναν παρόμοιο μηχανισμό βελτιστοποίησης των συστημάτων δημόσιων συγκοινωνιών, γεγονός που καθιστά σκόπιμη την παρουσίαση σχετικών παραδειγμάτων.

Στην έρευνα των Tirachini et al. (2011), αναπτύσσεται ένα μοντέλο υπογραμμής χρησιμοποιώντας πληροφορίες για τη ζήτηση από σταθμό σε σταθμό σε μια ενιαία γραμμή λεωφορείου, με στόχο την αύξηση της συχνότητας εξυπηρέτησης στα πιο επιβαρυμένα τμήματα της. Στη συνέχεια, πραγματοποιούνται εφαρμογές σε πραγματικούς διαδρόμους μεταφορών που παρουσιάζουν διαφορετικά προφίλ ζήτησης, υπολογίζοντας τις βέλτιστες τιμές για τις μεταβλητές σχεδιασμού και τα αντίστοιχα οφέλη για κάθε περίπτωση. Συμπεραίνεται ότι, η στρατηγική της σύντομης στροφής μπορεί να αποφέρει οφέλη τόσο για τους χρήστες, όσο και για τους

υπεύθυνους της εκάστοτε λεωφορειακής γραμμής, μειώνοντας το συνολικό λειτουργικό κόστος και παρουσιάζοντας καλύτερες συνθήκες στους επιβάτες, με πιο τακτικά δρομολόγια στις περισσότερες φορτωμένες περιοχές της γραμμής.

Συμπληρωματικά, η μελέτη των Cortés et al. (2011) προτείνει ένα εκτεταμένο μοντέλο, το οποίο συνδυάζει τη στρατηγική υπογραμμών με το πρόβλημα των νεκρών διαδρομών (deadheading), διαμορφώνοντας μια ολοκληρωμένη στρατηγική διαχείρισης μιας ενιαίας λεωφορειακής γραμμής. Στην προσέγγιση αυτή, οι βασικές μεταβλητές βελτιστοποίησης περιλαμβάνουν τη συχνότητα δρομολογίων εντός και εκτός των περιοχών αυξημένης ζήτησης, τη χωρητικότητα των οχημάτων, καθώς και τους ενδιάμεσους σταθμούς όπου εφαρμόζεται η υπογραμμή και χαρακτηρίζονται από συνεχή και διακριτή φύση. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ενσωματωμένη αυτή στρατηγική μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλές περιπτώσεις με μικτό προφίλ ζήτησης, όπου παρατηρούνται ανισορροπίες εντός και μεταξύ των δύο κατευθύνσεων μιας συγκεκριμένης γραμμής, και πως η στρατηγική υπογραμμών μπορεί να αποφέρει πολλά οφέλη όσον αφορά τη μείωση του συνολικού κόστους.

Αντίστοιχα, στην εργασία των H. Zhang et al. (2017), μελετάται η κατάσταση μιας λεωφορειακής γραμμής σε πραγματικό χρόνο και προτείνονται λύσεις, όπως οι τακτικές παράλειψης στάσης (skip-stop), υπογραμμών και αναμονής σε στάση, με σκοπό την εξισορρόπηση της επιβατικής ζήτησης κατά μήκος της λεωφορειακής γραμμής, συναρτήσει της ελαχιστοποίησης του λειτουργικού και επιβατικού κόστους. Το μοντέλο λαμβάνει υπόψη τυπικές διακυμάνσεις της επιβατικής ζήτησης, καθώς και τη στοχαστική φύση του χρόνου διαδρομής των λεωφορείων, προσδιορίζοντας τους σταθμούς που πρέπει να παραλείπονται, τα σημεία όπου πρέπει να εφαρμόζεται η στρατηγική των υπογραμμών, καθώς και τον βέλτιστο χρόνο αναμονής στους σταθμούς επιστροφής. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι η στρατηγική περιορισμένων στάσεων και των υπογραμμών μπορούν να μειώσουν το λειτουργικό κόστος και τον καθαρό χρόνο μετακίνησης των επιβατών. Ωστόσο, αυτό συνοδεύεται από αύξηση του χρόνου αναμονής στις στάσεις.

Τέλος, άξια αναφοράς είναι και η εργασία W. Zhang et al. (2021), η οποία επικεντρώνεται στη χρήση της στρατηγικής υπογραμμών σε δίκτυα ηλεκτρικών λεωφορείων. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα απαιτητική προσέγγιση, λόγω των περιορισμών αυτονομίας και του μεγάλου χρόνου φόρτισης των οχημάτων. Στην έρευνα αυτή, η σχέση μεταξύ αυτονομίας, χρόνου λειτουργίας και στρατηγικής short-turning μοντελοποιείται μέσω ενός μικροοικονομικού μοντέλου, το οποίο βελτιστοποιεί τις συχνότητες φόρτισης και δρομολόγησης τόσο για το σύνολο της γραμμής όσο και για την υπογραμμή. Τα αριθμητικά αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι η στρατηγική των υπογραμμών προσφέρει σημαντικά πλεονεκτήματα, ιδίως σε περιπτώσεις όπου η υψηλή επιβατική ζήτηση επικεντρώνεται σε συγκεκριμένη περιοχή της γραμμής, ενώ είναι πιο αποδοτική σε σενάρια με μικρότερους χρόνους λειτουργίας, ώστε να αποφεύγεται η ανάγκη ενδιάμεσης φόρτισης των οχημάτων.

Παρακάτω ακολουθεί ένας περιληπτικός πίνακας με τις σημαντικότερες έρευνες όσον αφορά το θέμα της εργασίας αυτής:

Πίνακας 1: Σύνοψη σχετικών εργασιών

Ερευνητική εργασία	Στόχοι	Μεταβλητές	Τύπος μαθηματικού μοντέλου	Μέθοδος Επίλυσης (ακριβής, ευρετική, μεταευρετική)	Αυτονομία	Interlining	Short-line
(Cao & (Avi) Ceder, 2019)	Βελτιστοποίηση χρονοδιαγράμματος με τακτική παράλειψης στάσης (skip-stop)	Μεταβλητές απόφασης παράλειψης στάσης	Ελλειμματική συνάρτηση (Deficit Function)	Μεταευρετική (Γενετικός Αλγόριθμος), Binary Variable Iteration	•		
(Gkiotsalitis et al., 2022)	Ελαχιστοποίηση του λειτουργικού κόστους	Μεταβλητή απόφασης ανάθεσης short-line	Γραμμικό μικτού ακεραίου	Ακριβής λύση (Gurobi)	•		•
(Tian et al., 2022)	Ελαχιστοποίηση του κόστους μετάβασης στην αυτονομία	Μεταβλητή απόφασης μετατροπής συμβατικής γραμμής σε αυτόνομη	Μη γραμμικό μικτού ακεραίου	Μεταευρετική (Γενετικός Αλγόριθμος)	•		
(Gkiotsalitis et al., 2019a)	Ελαχιστοποίηση του λειτουργικού κόστους	Μεταβλητές απόφασης ανάθεσης short-line ή interline γραμμής	Μη γραμμικό μικτού ακεραίου	Μεταευρετική (Γενετικός Αλγόριθμος)		•	•
(Zahedi et al., 2022)	Εύρεση στρατηγικής δυναμικής αλλαγής γραμμών	Μεταβλητές απόφασης ανάθεσης διαδρομής	Ελλειμματική συνάρτηση & Γραμμικό μικτού ακεραίου	Προσομοίωση		•	
(Tirachini et al., 2011)	Ελαχιστοποίηση λειτουργικού κόστους και κόστους επιβατών	Συχνότητα, χωρητικότητα, στάσεις	Μη γραμμικό συνεχές	Ακριβής λύση (Αναλυτική λύση)			•
(H. Zhang et al., 2017)	Ελαχιστοποίηση λειτουργικού κόστους	Μεταβλητές απόφασης ανάθεσης διαδρομής	Μη γραμμικό αέριο	Ακριβής λύση (Εξαντλητικός αλγόριθμος)			•
(Cortés et al., 2011)	Βελτιστοποίηση χρονοδιαγράμματος	Απόφασης ανάθεσης short-turning στάσεων, χωρητικότητα, συχνότητες	Μη γραμμικό συνεχές	Ακριβής Λύση (Αναλυτική Λύση)			•

(Guo et al., 2023)	Ελαχιστοποίησης λειτουργικού κόστους και μείωση χρόνου αναμονής επιβατών	Μεταβλητές απόφασης	Γραμμικό μικτού ακεραίου	Ακριβής Λύση (CPLEX)	•		
(Ibarra-Rojas et al., n.d.)	Ελαχιστοποίησης λειτουργικού κόστους και μείωση χρόνου αναμονής επιβατών	Συνεχείς και διακριτές μεταβλητές απόφασης	Γραμμικό μικτού ακεραίου	Αλγόριθμος ε-περιορισμών για εύρεση βέλτιστων Pareto λύσεων		•	

2.4. Συμπεράσματα βιβλιογραφίας

Οι προαναφερθείσες μελέτες, στο πρώτο σκέλος της βιβλιογραφίας, εστιάζουν στη χρονοδρομολόγηση αυτόνομων λεωφορείων, εξετάζοντας διαφορετικές μεθόδους και τον αντίκτυπό τους στην κυκλοφορία. Παράλληλα, αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο η αυτονομία των οχημάτων μεταβάλλει τα υπάρχοντα δεδομένα, τόσο σε κοινωνικό όσο και σε μηχανικό-λειτουργικό επίπεδο.

Στο δεύτερο σκέλος, διερευνάται η δυνατότητα των ανθρωποκίνητων λεωφορείων να αλλάζουν γραμμές ή να εκτελούν υπογραμμές κατά τη διάρκεια του δρομολογίου, με στόχο τη βελτιστοποίηση του κυκλοφοριακού συστήματος και την αποτελεσματική διαχείριση της ζήτησης στις επιβαρυσμένες περιοχές του δικτύου.

Σε αυτή την εργασία θα μελετηθεί ο συνδυασμός των δύο παραπάνω σκελών, δηλαδή η δυνατότητα αυτόνομων λεωφορείων να αλλάζουν γραμμές. Το συγκεκριμένο θέμα, είναι μια μίξη κυρίως των εργασιών (Gkiotsalitis et al., 2022) και (Gkiotsalitis et al., 2019a; Zahedi et al., 2022), δηλαδή εν μέρει της χρονοδρομολόγησης αυτόνομων λεωφορείων σε όλο το μήκος της λεωφορειακής γραμμής και σε υπογραμμές αυτής, καθώς και της χρονοδρομολόγησης ανθρωποκίνητων λεωφορείων με δυνατότητα αλλαγής γραμμών, προσαρμόζοντας τη στρατηγική αυτή σε ένα αυτόνομο περιβάλλον λειτουργίας.

Συγκεκριμένα, θα ακολουθηθεί ο τρόπος μοντελοποίησης του προβλήματος της εργασίας των (Gkiotsalitis et al., 2019b), εντάσσοντας την σε ένα αυτόνομο περιβάλλον και στη συνέχεια θα πραγματοποιηθεί η γραμμικοποίηση του μοντέλου με στόχο την ακριβής επίλυση και την εύρεση της βέλτιστης λύσης του συστήματος.

3. Μοντελοποίηση του προβλήματος

Για τη δημιουργία του μοντέλου της εργασίας αυτής, θα χρησιμοποιηθεί κατά κύριο λόγο το γενικό πλαίσιο της εργασίας του (Gkiotsalitis et al., 2019a), που αφορά την αλλαγή γραμμών συμβατικών λεωφορείων.

Αρχικά, το πρώτο πρόβλημα που αντιμετωπίζεται, είναι ο καθορισμός των στάσεων (σημεία αλλαγής) στον οποίο θα είναι δυνατή η αλλαγή γραμμής από ένα αυτόνομο λεωφορείο. Υπάρχουν δύο μέθοδοι για να προσεγγιστεί αυτό το θέμα.

Ο ένας τρόπος, ο οποίος χρησιμοποιείται και στην εργασία (Cortés et al., 2011), είναι να προσδιορίζονται αυτά τα σημεία αλλαγής ως λύση της αντικειμενικής συνάρτησης, με τη χρήση μεταβλητών απόφασης. Με λίγα λόγια, το μοντέλο «καθορίζει» το αν μια στάση θα είναι και σημείο αλλαγής, με δυαδικό τρόπο (0 και 1). Στο δεύτερο τρόπο τα σημεία αλλαγής προκαθορίζονται αναλόγως την μεταβολή της επιβατικής ζήτησης μεταξύ δύο διαδοχικών στάσεων. Αναλυτικότερα, όταν μεταξύ δύο διαδοχικών στάσεων παρουσιάζεται μια αλλαγή ζήτησης μεγαλύτερη από $\zeta\%$, τότε σημαίνει ότι ο φόρτος είτε γίνεται απότομα μεγάλος ή μικρός. Αν αποτελεί αύξηση, τότε είναι ο «προορισμός» των λεωφορείων που εκτελούν αλλαγή γραμμής, ενώ αν αποτελεί μείωση, η «αφετηρία».

Στη συγκεκριμένη εργασία, θα χρησιμοποιηθεί ο δεύτερος τρόπος και τα σημεία αλλαγής θα καθοριστούν αναλόγως με το φόρτο που θα δωθεί σαν δεδομένο του προβλήματος. Συγκεκριμένα, οι εναλλαγές θα πραγματοποιούνται περίπου στις στάσεις που ο φόρτος γίνεται απότομα μεγάλος και μικρός, αναλόγως και με τη τοποθεσία. Σημειώνεται ότι στα σημεία εναλλαγής πραγματοποιείται ολική εκκένωση των λεωφορείων παρόλο που δύναται να υπάρχουν ζευγάρια ζήτησης προέλευσης-προορισμού που να μπορούν εξυπηρετηθούν μετά το πέρας εκτέλεσης της τεχνητής γραμμής. Θεωρείται ότι το κάθε λεωφορείο εκτελεί κυκλικές διαδρομές, δηλαδή η αφετηρία του είναι και το τέρμα της λεωφορειακής γραμμής.

Στη συνέχεια, πρέπει να απαντηθούν κάποια βασικά ερωτήματα. Πρώτος στόχος των λεωφορειακών γραμμών πρέπει να είναι η γρήγορη και συνεπής εξυπηρέτηση των επιβατών. Αυτό μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα τα λεωφορεία να προβούν σε μεγάλες, συχνές και μη οικονομικές (απο πλευράς λειτουργικού κόστους) διαδρομές. Επίσης, θα αποτελούσε βελτίωση για τον βαθμό εξυπηρέτησης μιας λεωφορειακής γραμμής το να χρησιμοποιηθούν όσα περισσότερα λεωφορεία γίνεται, κάτι το οποίο επιβαρύνει εξίσου το λειτουργικό κόστος. Ως αποτέλεσμα, σκοπός είναι να δημιουργηθεί ένα μοντέλο που θα λαμβάνει όλα τα παραπάνω υπόψιν του και θα εξισορροπεί το λειτουργικό κόστος με το βαθμό εξυπηρέτησης.

Παρακάτω εισάγονται οι τρεις πίνακες με τα Σύνολα, τις παραμέτρους και τις μεταβλητές που αποτελούν το νομογράφημα της εργασίας:

Πίνακας 2: Νομογράφημα προβλήματος χρονοδρομολόγησης αυτόνομων λεωφορείων

Σύνολα:	
L_0	Σύνολο των αρχικών-πραγματικών γραμμών
L	Σύνολο των συνολικών γραμμών (πραγματικών-τεχνητών)
S	Σύνολο των στάσεων του δικτύου
S_l	Σύνολο των στάσεων της γραμμής $l \in L$ σε σειρά
Q	Σύνολο από το οποίο επιλέγεται ο αριθμός των λεωφορείων που θα κατανεμηθεί στην πραγματική λεωφορειακή γραμμή $l \in L_0$
Q'	Σύνολο από το οποίο επιλέγεται ο αριθμός των λεωφορείων που θα κατανεμηθεί στην τεχνητή λεωφορειακή γραμμή $l \in (L - L_0)$
F	Σύνολο από το οποίο επιλέγεται η συχνότητα διέλευσης κάθε λεωφορειακής γραμμής $l \in L$
Παράμετροι:	
r_l	Ο συνολικός χρόνος ταξιδιού κάθε λεωφορειακής γραμμής
τ	Ο χρόνος σχεδιασμού (σε ώρες)
$b_{l_0,l,j}$	Επιβατική ζήτηση μεταξύ των ζεύγων στάσεων αφετηρίας-προορισμού i,j για κάθε αρχική γραμμή
ψ	Ποσοστό που δηλώνει το κατώτατο όριο για τον αριθμό των λεωφορείων που πρέπει να κατανεμηθούν στις αρχικές γραμμές
$\delta_{l,l_0,l,j}$	Ψευδο-μεταβλητή η οποία παίρνει τη τιμή 1 αν το ζεύγος στάσεων i,j εξυπηρετείτε, αλλιώς τη τιμή 0, για κάθε $l \in L$
γ	Ο συνολικός αριθμός του στόλου των λεωφορείων
η	Ο συνολικός αριθμός των τεχνητών γραμμών που μπορεί να είναι λειτουργικές ταυτόχρονα στο δίκτυο
θ	Άνω όριο που εξασφαλίζει τη λειτουργική εξυπηρέτηση προς όφελος των επιβατών
Μεταβλητές:	
n_l	Αριθμός των λεωφορείων ώστε η γραμμή $l \in L$ να είναι λειτουργική
h	Χρονοαπόσταση των λεωφορείων για κάθε $l \in L$
e	Διαδική τιμή (0 ή 1), όπου η τιμή 1 σημαίνει ότι τουλάχιστον 1 λεωφορείο έχει ανατεθεί σε μία γραμμή $l \in (L - L_0)$

z	Διαδικές τιμές (0 ή 1), χρησιμοποιείται για την γραμμικοποίηση του μοντέλου και λαμβάνει τη τιμή 1 για την αντίστοιχη επιλεγμένη συχνότητα μιας γραμμής $l \in L$
---	---

Στη συνέχεια ακολουθούν οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα χρονοδρομολόγησης αυτόνομων λεωφορείων με δυνατότητα αλλαγής γραμμών.

$$\left(\sum_{l \in L} n_l \right) - \gamma \leq 0 \quad (1)$$

$$\psi \gamma - \left(\sum_{l \in L_o} n_l \right) \leq 0 \quad (2)$$

$$\frac{\sum_{l_o \in L_o} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \frac{b_{l_o, i, j}}{2} \left(\sum_{l \in L} \delta_{l, l_o, i, j} \cdot \frac{n_l}{r_l} \right)^{-1}}{\sum_{l_o \in L_o} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} (b_{l_o, i, j})} - \Theta \leq 0 \quad (3)$$

$$\eta - \sum_{l \in L - L_o} e_l \geq 0 \quad (4)$$

$$n_l \in Q, \forall l \in L_o \quad (5)$$

$$n_l \in Q', \forall l \in L - L_o \quad (6)$$

Ο περιορισμός (1) εξασφαλίζει ότι ο αριθμός των λεωφορείων που θα ανατεθούν στο συγκοινωνιακό δίκτυο δε θα ξεπερνάει το συνολικό αριθμό των διαθέσιμων λεωφορείων του στόλου.

Ο περιορισμός (2) εισάγει τη παράμετρο ψ (%), η οποία είναι ένα ποσοστό που εξασφαλίζει ότι στις αρχικές προγραμματισμένες γραμμές θα διασφαλίζεται το ελάχιστο επίπεδο εξυπηρέτησης, αναθέτοντας τον ελάχιστο αριθμό λεωφορείων. Αυτό συμβαίνει επειδή πολλές φορές οι χειριστές λεωφορείων έχουν υποχρέωση να εξασφαλίσουν τη λειτουργία ενός συγκεκριμένου αριθμού λεωφορείων σε κάθε γραμμή. Επίσης, φροντίζει στο να μην υποτιμηθούν οι αρχικές πραγματικές γραμμές, οι οποίες ακόμα και με την εισαγωγή προσωρινών τεχνητών γραμμών, επιβάλλεται να θεωρούνται ως κύριες και πιο σημαντικές.

Στο περιορισμό (3) ο αριθμητής αποτελεί το σύνολο του κόστους αναμονής των επιβατών στη στάση για κάθε ζεύγος άφιξης-προορισμού. Εισάγεται η παράμετρος Θ , η οποία αποτελεί ένα άνω όριο του μέσου χρόνου παραμονής των επιβατών στη στάση, το οποίο εξασφαλίζει ότι το μοντέλο δε θα μειώσει το λειτουργικό κόστος σε βαθμό που ο μέσος χρόνος αναμονής αυξηθεί υπέρμετρα και ως αποτέλεσμα, να διακυβευθεί το επίπεδο εξυπηρέτησης.

Η εξίσωση (4) περιορίζει τον αριθμό των τεχνητών γραμμών που θα θέσει σε λειτουργία το μοντέλο, αφού το άθροισμα των e_i δε μπορεί να ξεπεράσει την δοσμένη παράμετρο η .

Ο περιορισμός (5) και ο περιορισμός (6) εξασφαλίζουν ότι ο αριθμός των λεωφορείων θα επιλεγεί από τα διακριτά σύνολα Q (για τις αρχικές γραμμές) και Q' (για τις τεχνητές γραμμές).

Τα παραπάνω οδηγούν στην αντικειμενική συνάρτηση (7):

$$\min = \beta_1 \left(\sum_{l_o \in L} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \frac{b_{l_o, i, j}}{2} \left(\sum_{l \in L} \delta_{l, l_o, i, j} \cdot \frac{n_l}{r_l} \right)^{-1} \right) + \beta_2 \left(\sum_{l \in L} n_l r_l \left(\frac{\tau}{r_l} \right) \right) + \beta_3 \left(\sum_{l \in L} n_l \right) \quad (7)$$

Η μοντελοποίηση του προβλήματος της κατανομής των λεωφορείων του διαθέσιμου στόλου γίνεται με στόχο τη μείωση των χρόνων αναμονής των επιβατών στις στάσεις του συγκοινωνιακού συστήματος και την ελαχιστοποίηση του λειτουργικού κόστους. Για τον προσδιορισμό του λειτουργικού κόστους λαμβάνονται υπόψη οι χρόνοι λειτουργίας των οχημάτων και εισάγεται ένα κόστος το οποίο ζημιώνει το μοντέλο για κάθε επιπλέον όχημα που κατανέμεται στο δίκτυο. Για να μετατραπούν οι παραπάνω έννοιες σε χρηματικές αξίες, στην αντικειμενική συνάρτηση θεσπίζονται τρεις συντελεστές βαρύτητας ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$).

Το παραπάνω μοντέλο αποτελεί ένα μη γραμμικό μοντέλο μικτού ακεραίου (mixed-integer non-linear) αφού στον περιορισμό (3) και στην αντικειμενική συνάρτηση (7), η μεταβλητή n_l είναι υψωμένη σε αρνητική δύναμη. Για την επίλυσή του, χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν μεταερευτικοί τρόποι οι οποίοι οδηγούν σε αποτελέσματα τα οποία μπορεί να μην είναι ολικά βέλτιστα, αφού εξαρτώνται άμεσα από τις διάφορες παραμέτρους που θα θέσει ο χρήστης. Συμπερασματικά, είναι αρκετά δύσκολο να βρεθεί η ακριβής λύση του συστήματος.

Στη συγκεκριμένη εργασία, το μοντέλο γραμμικοποιείται, με στόχο την εύρεση της βέλτιστης λύσης του προβλήματος. Αυτό καθίσταται δυνατόν επιβάλλοντας στο μοντέλο να επιλέξει συχνότητες για κάθε λεωφορειακή γραμμή από ένα σύνολο διακριτών ακέραιων συχνοτήτων F. Στην καθημερινότητα, οι λεωφορειακές γραμμές λειτουργούν με ωριαίες συχνότητες από 1 έως 30, δηλαδή εκτελούνται από 1 έως (σπάνια) 30 δρομολόγια την ώρα. Έτσι, το διακριτό σύνολο τιμών F θα περιέχει τις τιμές $F = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$. Στη συνέχεια εισαγάγεται η μεταβλητή z , η οποία έχει δυαδικό χαρακτήρα. Για κάθε πιθανή συχνότητα από το σύνολο F αντιστοιχεί ένα z , το οποίο λαμβάνει τη τιμή 1 στη μία και μοναδική συχνότητα που θα επιλεχθεί από το μοντέλο, για κάθε $l \in L$. Έτσι, εισάγουμε τους παρακάτω περιορισμούς.

$$\sum_{f_k \in F} z_{l, f_k} \cdot f_k = \frac{n_l}{r_l}, \forall l \in L \quad (8)$$

$$\sum_{f_k \in F} z_{l, f_k} = 1, \forall l \in L \quad (9)$$

$$h_l = \sum_{f_k \in F - \{0\}} \frac{z_{l, f_k}}{f_k}, \forall l \in L \quad (10)$$

Ο περιορισμός (8) τονίζει ότι η συχνότητα f_k είναι το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμού των λεωφορείων δια το χρόνο κύκλου μιας λεωφορειακής γραμμής.

Με την εφαρμογή του περιορισμού (9) το σύνολο των τιμών $z_{l,fk}$ θα είναι ίσο με 1 για κάθε λεωφορειακή γραμμή, αφού το z παίρνει τη τιμή 1 όταν η γραμμή $l \in L$ λειτουργεί με συχνότητα $f_k \in F$ και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση.

Ο περιορισμός (10) προσδιορίζει την χρονοαπόσταση, η οποία είναι ίση με το άθροισμα των z διά την επιλεγμένη συχνότητα της λεωφορειακής γραμμής. Επειδή το άθροισμα των z για καθε λεωφορειακή γραμμή είναι 1 (εφόσον η γραμμή λειτουργεί με τουλάχιστον ένα λεωφορείο), τότε ο αριθμητής παίρνει τη τιμή 1 και διαιρείται με την αντίστοιχη συχνότητα.

Έτσι, ο περιορισμός (3) μετατρέπεται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\frac{\sum_{l_o \in L_o} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \frac{b_{l_o,i,j}}{2} \left(\sum_{l \in L} \delta_{l,l_o,i,j} \cdot h_l \right)}{\sum_{l_o \in L_o} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} (b_{l_o,i,j})} - \Theta \leq 0 \quad (11)$$

Και η αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min = \beta_1 \left(\sum_{l_o \in L} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \frac{b_{l_o,i,j}}{2} \left(\sum_{l \in L} \delta_{l,l_o,i,j} \cdot h_l \right) \right) + \beta_2 \left(\sum_{l \in L} n_l r_l \left(\frac{\tau}{r_l} \right) \right) + \beta_3 \left(\sum_{l \in L} n_l \right) \quad (12)$$

όπου και στις δύο εξισώσεις αντικαταστήθηκε ο όρος r_l/n_l με την χρονοαπόσταση h_l και πλέον έχουμε ένα γραμμικό μοντέλο μικτού ακεραίου (mixed-integer linear) το οποίο μπορεί να επιλυθεί με ακριβή τρόπο.

4. Εφαρμογή σε ιδεατό δίκτυο

Η εφαρμογή του μοντέλου σχεδιάζεται αρχικά σε ένα ιδεατό δίκτυο στο οποίο θεωρούνται συνολικά 6 λεωφορειακές γραμμές ($L=\{1,2,3,4,5,6\}$) από τις οποίες οι 4 είναι πραγματικές ($L_0=\{1,2,3,4\}$) και οι 2 είναι τεχνητές ($L-L_0=\{5,6\}$), δηλαδή γραμμές στις οποίες πραγματοποιείται αλλαγή γραμμής. Οι συνολικές στάσεις είναι 21 ($S=\{1,2,3,\dots,20,21\}$), οι οποίες θεωρούνται λίγες για 4 πραγματικές λεωφορειακές γραμμές, ωστόσο ο αριθμός αυτός θα βοηθήσει να αναδειχτούν με σαφήνεια τα αποτελέσματα και χωρίς μεγάλη πολυπλοκότητα. Κάθε λεωφορειακή γραμμή (πραγματική και τεχνητή) αποτελείται από 5 ή 6 στάσεις και πραγματοποιεί κυκλική διαδρομή με κοινή αφετηρία και τερματικό σταθμό. Οι χρόνοι κύκλου έχουν θεωρηθεί αντίστοιχα $r = \{0.5, 0.6, 0.6, 0.7, 0.6, 0.8\}$ σε ώρες, ενώ οι χρόνοι των τεχνητών γραμμών θα θεωρηθούν ίσοι ή και μεγαλύτεροι από τους χρόνους των πραγματικών, καθώς εμπεριέχουν και χρόνο νεκρής διαδρομής (deadheading), δηλαδή διαδρομής όπου το λεωφορείο απλά μετακινείται στη νέα του θέση χωρίς εξυπηρετεί το επιβατικό κοινό.

Παρακάτω αναγράφονται αναλυτικά οι στάσεις που αντιστοιχούν σε κάθε λεωφορειακή γραμμή καθώς και ένα σχεδιάγραμμα για μεγαλύτερη σαφήνεια τόσο στη διάταξη του δικτύου, όσο και στις αναλυτικές χρονοαποστάσεις μεταξύ των στάσεων:

Γραμμή L_1 : $S_1-S_2-S_3-S_4-S_5$ (σύνολο 5 στάσεις με χρόνο κύκλου 0,5 ώρες)

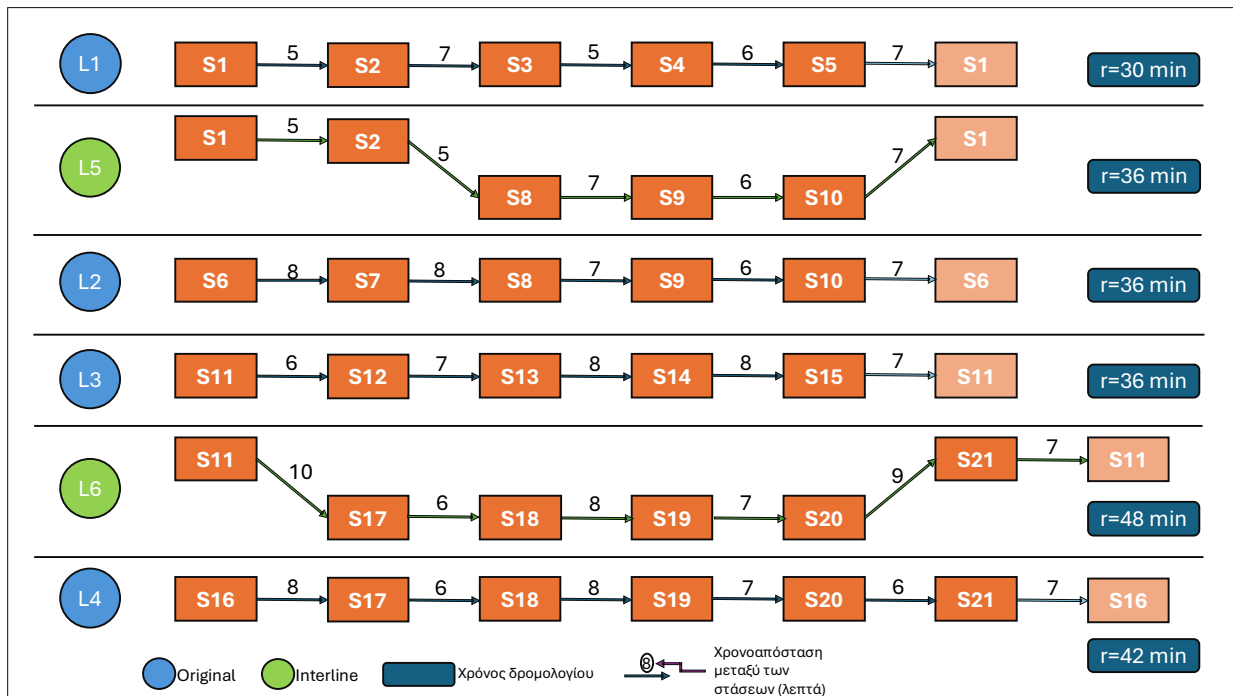
Γραμμή L_2 : $S_6-S_7-S_8-S_9-S_{10}$ (σύνολο 5 στάσεις με χρόνο κύκλου 0,6 ώρες)

Γραμμή L_3 : $S_{11}-S_{12}-S_{13}-S_{14}-S_{15}$ (σύνολο 5 στάσεις με χρόνο κύκλου 0,6 ώρες)

Γραμμή L_4 : $S_{16}-S_{17}-S_{18}-S_{19}-S_{20}-S_{21}$ (σύνολο 6 στάσεις με χρόνο κύκλου 0,7 ώρες)

Γραμμή L_5 : $S_1-S_2-S_8-S_9-S_{10}$ (σύνολο 5 στάσεις με χρόνο κύκλου 0,6 ώρες)

Γραμμή L_6 : $S_{11}-S_{17}-S_{18}-S_{19}-S_{20}-S_{15}$ (σύνολο 6 στάσεις με χρόνο κύκλου 0,8 ώρες)



Εικόνα 1: Σκαρίφημα ιδεατού δικτύου

Για τις αρχικές πραγματικές γραμμές θεωρούνται ότι είναι δυνατόν να ανατεθούν το ελάχιστο 1 λεωφορείο και μέγιστο 8 λεωφορείων σε κάθε γραμμή (σύνολο Q), ενώ για τις τεχνητές γραμμές, μέγιστο 5 λεωφορείων και ελάχιστο 0 (σύνολο Q'), ώστε να εξασφαλιστεί ακόμα περισσότερο ότι το πρόγραμμα δεν θα υποβαθμίσει τις πραγματικές γραμμές σε μεγάλο βαθμό. Επίσης, ο διατεθημένος στόλος αποτελείται από $\gamma=25$ λεωφορεία.

Ως χρόνο προγραμματισμού θα ανατεθεί η τιμή $t=1$ ώρα για την απλούστευση του προγράμματος, οπότε και οι τιμές της ζήτησης μεταξύ των ζευγαριών προέλευσης-προορισμού θα είναι ωριαίες.

Το η θα είναι ίσο με 2,1 και 0 αναλόγως το πόσες τεχνητές γραμμές θα επιτραπούν στο πρόγραμμα να λάβει υπόψη (2, 1, 0 αντίστοιχα). Το ελάχιστο ποσοστό των συνολικών λεωφορείων που πρέπει να ανατεθούν στις αρχικές πραγματικές γραμμές θεωρείται ίσο με $\psi=0,1$ το οποίο είναι μικρό, αλλά δίνει την άνεση να εξεταστούν πολλές πιθανές λύσεις σε πλαίσια ενός ιδεατού δικτύου.

Η παράμετρος Θ ορίζεται στη τιμή $\Theta=1$ για να μην προτιμήσει το πρόγραμμα να ελαχιστοποιήσει τα αποτελέσματα σε βαθμό που θα κάνει δυσλειτουργική την εξυπηρέτηση των επιβατών. Τα βάρη β_1 , β_2 , β_3 έχουν επιλεγεί ως 1, 50 και 100 αντίστοιχα, συνδυασμός που προσδίδει μια βασική προτεραιότητα στην τακτική και γρήγορη εξυπηρέτηση των επιβατών και μετέπειτα ισάζια βαρύτητα στις άλλες δύο πτυχές, δηλαδή στη ζημιά λόγω χρόνου λειτουργίας οχημάτων και στην ζημιά λόγω επιπλέον αναθέτησης και ενεργοποίησης λεωφορείων στο επίπεδο δίκτυο.

Όσον αφορά τον πίνακα ζήτησης, αυτός αναπτύσσεται ως ένα τρισδιάστατο μητρώο $4 \times 21 \times 21$, καθώς έχουμε 4 αρχικές γραμμές που αποτελούνται από 21 στάσεις

συνολικά. Προκαθορισμένες τιμές ζήτησης θα έχουν οι αρχικές γραμμές για τα ζεύγη προέλευσης-προορισμού των στάσεων που εξυπηρετούν, και τα υπόλοιπα στοιχεία θα είναι μηδενικά (λ.χ. το στοιχείο που αντιστοιχεί σε ζήτηση από τη στάση S4 της γραμμής L₁ προς τη στάση S21 της γραμμής L₄). Παρακάτω ακολουθούν οι πίνακες ωριαίας ζήτησης μεταξύ των ζευγαριών προέλευσης-προορισμού για κάθε μία από τις πραγματικές γραμμές:

Πίνακας 3: Πίνακας ζήτησης γραμμής L1

π\π	S1	S2	S3	S4	S5
S1	0	8	12	7	5
S2	4	0	7	9	8
S3	7	5	0	9	12
S4	9	9	6	0	5
S5	8	10	9	5	0

Πίνακας 4: Πίνακας ζήτησης γραμμής L2

π\π	S6	S7	S8	S9	S10
S6	0	7	12	8	7
S7	6	0	6	12	10
S8	50	20	0	45	65
S9	60	12	7	0	40
S10	10	10	7	6	0

Πίνακας 5: Πίνακας ζήτησης γραμμής L3

π\π	S11	S12	S13	S14	S15
S11	0	9	12	7	5
S12	5	0	7	10	10
S13	6	5	0	10	12
S14	10	9	4	0	10
S15	9	10	8	4	0

Πίνακας 6: Πίνακας ζήτησης γραμμής L4

π\π	S16	S17	S18	S19	S20	S21
S16	0	8	11	9	6	4
S17	4	0	50	68	65	10
S18	9	7	0	40	58	20
S19	9	7	5	0	30	12
S20	10	7	7	6	0	8
S21	6	10	8	7	5	0

Η διαμόρφωση της ζήτησης βασίζεται στην υπόθεση ότι η προσέλευση επιβατών αυξάνεται σε συγκεκριμένες στάσεις του δικτύου για διάφορους λόγους. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, παρατηρείται σημαντική αύξηση της ζήτησης κοντά στις στάσεις S8 και S9 της γραμμής 2, καθώς και στις στάσεις S17, S18 και S19 της γραμμής 4. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε διάφορες αιτίες, όπως η διεξαγωγή πιθανών εκδηλώσεων ή κάποια απροσδόκητη αλλαγή σε άλλο μαζικό μέσο μεταφοράς του συγκοινωνιακού συστήματος (πχ. κλειστός σταθμός μετρό).

Το πρόγραμμα θα εφαρμοστεί για 3 περιπτώσεις προβλημάτων και θα συγκριθούν τα αποτελέσματα μεταξύ των τριών:

- Καμία γραμμή εναλλαγής
- 1 γραμμή εναλλαγής
- 2 γραμμές εναλλαγής

Το παραπάνω μοντέλο επιλύεται στο πρόγραμμα βελτιστοποίησης Gurobi 10.0.2 σε Python 3.10 με τη μέθοδο διακλάδωσης και οριοθέτησης (branch and bound). Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι ευρέως χρησιμοποιούμενη σε πολλά προβλήματα διακριτών (και μη) μεταβλητών, καθώς είναι μια γενικής-χρήσης στρατηγική αναζήτησης για συνολική βελτιστοποίηση. Τα δύο βασικά γνωρίσματα αυτής είναι τα εξής:

Διακλάδωση (Branching): Ο αλγόριθμος λύνει το “χαλαρωμένο” γραμμικό πρόβλημα (αγνοώντας τους ακέραιους περιορισμούς) και αναγνωρίζει μια μεταβλητή την οποία “διακλαδώνει”, δηλαδή δημιουργεί δύο νέα υποπροβλήματα επιβάλλοντας πρόσθετους περιορισμούς σε αυτή τη μεταβλητή.

Οριοθέτηση (Bounding): Σε κάθε υποπρόβλημα που προκύπτει μέσω της διαδικασίας διακλάδωσης, ο αλγόριθμος επιλύει εκ νέου το αντίστοιχο χαλαρωμένο γραμμικό πρόβλημα. Στην παρούσα μελέτη, η οποία αφορά ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, η διαδικασία αυτή οδηγεί στον καθορισμό ενός άνω ορίου, μέσω της επίλυσης του χαλαρωμένου υποπροβλήματος γραμμικής μορφής. Το άνωτατο, αυτό, όριο αποτελεί σημαντικό παράγοντα, καθώς επιτρέπει την αξιολόγηση της ανάγκης για περαιτέρω διερεύνηση ενός συγκεκριμένου κλάδου ή την απόρριψή του, εφόσον διαπιστωθεί ότι δεν μπορεί να αποδώσει καλύτερη λύση από την ήδη εντοπισμένη.

Τα πειράματα του παρόντος κεφαλαίου (αλλά και του επόμενου σε πραγματικό δίκτυο) εκτελέστηκαν σε ένα συμβατικό μοντέλο επεξεργαστή Intel(R) Core(TM) i5-10400F CPU @ 2.90GHz με κριτήριο τερματισμού της επίλυσης την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

Πίνακας 7: Αποτελέσματα μη αξιοποίησης γραμμών εναλλαγής

Καμία γραμμή εναλλαγής				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,5	6	12	0,0834

L2	0,6	6	10	0,1
L3	0,6	6	10	0,1
L4	0,7	7	10	0,1
L5	0,6	0	0	0
L6	0,8	0	0	0

Σύνολο Λεωφορείων	25	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	-2864
------------------------------	----	---	-------

Από τα παραπάνω αποτελέσματα διαπιστώνεται μια σχετικά ομοιόμορφη κατανομή των οχημάτων στις λεωφορειακές γραμμές. Συγκεκριμένα, στη γραμμή L4 έχει ανατεθεί ένα επιπλέον λεωφορείο, λαμβάνοντας υπόψη τόσο τον αυξημένο φόρτο επιβατών, όσο και το μεγαλύτερο χρόνο εκτέλεσης δρομολογίου. Επιπλέον, το μοντέλο χρησιμοποιεί όλα τα διαθέσιμα λεωφορεία του στόλου, γεγονός που υποδηλώνει ότι οι προτεραιότητες που έχουν τεθεί δίνουν έμφαση στην ικανοποίηση της ζήτησης επιβατών, σε σχέση με τη μείωση του λειτουργικού κόστους.

Πίνακας 8: Αποτελέσματα αξιοποίησης μιας γραμμής εναλλαγής

Μία γραμμή εναλλαγής				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,5	3	12	0,0834
L2	0,6	6	10	0,1
L3	0,6	6	10	0,1
L4	0,7	7	10	0,1
L5	0,6	3	5	0,2
L6	0,8	0	0	0

Σύνολο Λεωφορείων	25	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	-3157
------------------------------	----	---	-------

Το μοντέλο δίνει προτεραιότητα στη βελτίωση της εξυπηρέτησης στις γραμμές L1 και L2, καθώς επιλέγει να διαθέσει 3 λεωφορεία στην τεχνητή γραμμή L5, η οποία εξυπηρετεί εν μέρει τις γραμμές L1 και L2. Αυτό δικαιολογεί τη μείωση κατά 3 λεωφορείων στη γραμμή L1, ενώ η γραμμή L2 παραμένει ανεπηρέαστη, καθώς διατηρεί υψηλό φόρτο επιβατών και δεν υπάρχει λόγος για μείωση της εξυπηρέτησής της. Επιπλέον, η μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης κατά -293 υποδηλώνει βελτίωση.

Πίνακας 9: Αποτελέσματα αξιοποίησης δύο γραμμών εναλλαγής

Δύο γραμμές εναλλαγής				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,5	2	4	0,25
L2	0,6	6	10	0,1
L3	0,6	3	5	0,2
L4	0,7	7	10	0,1
L5	0,6	3	5	0,2
L6	0,8	4	5	0,2
Σύνολο Λεωφορείων	25	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης		-3378

Στην περίπτωση των δύο γραμμών εναλλαγής, το πρόγραμμα επιλέγει να διαθέσει 4 οχήματα στη γραμμή L6, τα οποία αφαιρούνται από τις γραμμές L1 και L3 (1 και 3 λεωφορεία αντίστοιχα). Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση με μία γραμμή εναλλαγής, το πρόγραμμα "μεταφέρει" 3 λεωφορεία από την πραγματική γραμμή L4 στην τεχνητή γραμμή L6. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι επιλέγεται επίσης να μειωθεί η εξυπηρέτηση στη γραμμή L1, και κατά συνέπεια στο σύνολο L1-L2-L5, με στόχο τη βελτίωση της εξυπηρέτησης της γραμμής L6 και άρα του συνόλου L3-L4-L6. Αυτή η ενέργεια επιφέρει συνολική βελτιστοποίηση του συστήματος, όπως αποδεικνύεται από τη μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης στην τιμή -3378, σε σύγκριση με την τιμή του προηγούμενου παραδείγματος (-3157).

Παρατηρείται ότι και στα τρία παραδείγματα, όλα τα λεωφορεία κινούνται με συνεχή ροή, ανεξαρτήτως αν εξυπηρετούν πραγματική ή τεχνητή γραμμή. Με λίγα λόγια, δε σταματούν για χρόνο μεγαλύτερο από αυτόν που απαιτείται για την αποβίβαση και επιβίβαση των επιβατών και δεν είναι απαραίτητο να προβλεφθεί χρόνος στάθμευσης, γεγονός που καθίσταται εφικτό λόγω της αυτονομίας του συγκεκριμένου ιδεατού συστήματος.

5. Εφαρμογή σε πραγματικό δίκτυο

Για την εφαρμογή αυτή θα χρησιμοποιηθούν 3 πραγματικές γραμμές στη περιοχή του Αγίου Δημητρίου, Δάφνης και Ηλιούπολης. Οι γραμμές αυτές είναι η 201, η 237 και η 112 και θεωρούνται σαν L1, L2, L3 αντίστοιχα. Οι γραμμές αυτές είναι κυκλικές και έχουν σαν «άκρο» τον σταθμό μετρό της Δάφνης (στάση «Σταθμός Δάφνης») κάτι που σημαίνει ότι εξυπηρετούν κοντινές περιοχές και δεν είναι εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτό θα βοηθήσει στο να καθοριστούν πιο εύκολα τα σημεία εναλλαγής, χωρίς να υπάρχει υπερβολικός χρόνος νεκρής διαδρομής (deadheading).

Αρχικά, για τον υπολογισμό του συνολικού χρόνου δρομολογίου της κάθε μιας από τις γραμμές, χρησιμοποιείται σε πρώτη φάση ο μετρητής απόστασης στο Google Maps και στη συνέχεια με θεώρηση μιας μέσης ταχύτητας κίνησης των λεωφορείων σε αστικό δίκτυο, αλλά και ενός μέσου χρόνου αποβίβασης/επιβίβασης, προσδιορίζεται ο συνολικός χρόνος. Συγκεκριμένα, γίνεται πρώτα εύρεση της απόστασης μεταξύ των διαδοχικών στάσεων και στη συνέχεια αθροίζονται ώστε να βρεθεί η συνολική, η οποία διαιρείται με τη μέση ταχύτητα προσθέτοντας το χρόνο αποβίβασης/επιβίβασης για κάθε στάση. Θεωρείται μέση ταχύτητα των λεωφορείων τα 20 χλμ/ώρα καθώς τα λεωφορεία κυκλοφορούν σε δρόμους με ανώτατο όριο τα 50 χλμ/ώρα (κατοικημένες περιοχές) και επειδή στην Ευρώπη τα πιλοτικά προγράμματα που έχουν τεθεί σε ισχύ σπάνια ξεπερνούν τα 21 χλμ/ώρα (Boersma et al., n.d.). Ο χρόνος αποβίβασης/επιβίβασης στη πραγματικότητα είναι άμεσα εξαρτημένος από την επιβατική ζήτηση της εκάστοτε στάσης, όπως και από τη διάταξη αλλά και τη πληρότητα του αυτόνομου λεωφορείου (Su et al., 2019), (Sun et al., 2014). Στη παρούσα εργασία, προς απλοποίηση του μοντέλου, θα θεωρηθεί ως 30 δευτερόλεπτα για κάθε στάση, τιμή που θεωρείται μια μέση τιμή για τη ζήτηση που θα ανατεθεί στο πραγματικό επίπεδο δίκτυο.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι στάσεις των τριών πραγματικών γραμμών, καθώς και οι υπολογισμένες χρονοαποστάσεις μεταξύ τους, οι οποίες περιλαμβάνουν τον χρόνο επιβίβασης και αποβίβασης για κάθε στάση. Επιπλέον, υπολογίζεται το συνολικό άθροισμα των επιμέρους χρονοαποστάσεων, το οποίο αντιστοιχεί στον συνολικό χρόνο δρομολογίου. Ο χρόνος αρχικά εκφράζεται σε λεπτά, στη συνέχεια μετατρέπεται σε ώρες και στρογγυλοποιείται στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο, πριν ενσωματωθεί στο μοντέλο. Στην περίπτωση της γραμμής L2, ο υπολογισμένος χρόνος υπερβαίνει τη μία ώρα κατά 17,5 δευτερόλεπτα, όμως, λόγω της στρογγυλοποίησης, θεωρείται ίσος με μία ώρα ακριβώς. Σε περίπτωση που ο συνολικός χρόνος δρομολογίου ήταν σημαντικά μεγαλύτερος της μίας ώρας, το μοντέλο θα έπρεπε να προσαρμοστεί κατάλληλα, λαμβάνοντας υπόψη αυξημένο χρόνο επαναφοράς τ.

Πίνακας 10: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής L1

[illegible]

Πίνακας 11: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής L2 (1ο μέρος)

237 (L2)							
S	Όνομα	Απόσταση (m)	Χρόνοαπόσταση (min)	S	Όνομα	Απόσταση (m)	Χρόνοαπόσταση (min)
30	Άνω Ηλιούπολη			15	Στ. Δάφνης		
		311	0,933			307	0,921
31	1η Μακεδονίας			16	Πευκάκια		
		265	0,795			358	1,074
32	2η Μακεδονίας			17	Πλ. Ηρώων		
		214	0,642			210	0,63
33	3η Μακεδονίας			48	Μαρκέα		
		301	0,903			215	0,645
34	Παιδική Χαρά			49	Λυκούργου		
		240	0,72			370	1,11
35	Παλ. Τέρμα			50	Αγ. Κων/νος		
		165	0,495			165	0,495
36	Αεροπορία			51	Πλ. Κανάρια		
		390	1,17			373	1,119
37	Πλαστήρα			52	Λότσου		
		280	0,84			213	0,639
38	Παράθυρα			53	Νησάκι		
		413	1,239			290	0,87
39	Παναγίτσα			54	Αστυνομία		
		232	0,696			215	0,645
40	Ταχυδρομείο			55	Ταχυδρομείο		
		279	0,837			254	0,762
41	Σχολεία			56	Πλ. Εθν. Αντιστάσεως		
		229	0,687			475	1,425
42	Νησάκι			57	Παράθυρα		
		251	0,753			292	0,876
43	Λότσου			58	Πλ. Πλαστήρα		
		321	0,963			418	1,254
44	Πλ. Κανάρια			59	Αεροπορία		
		343	1,029			245	0,735
45	Αγ. Κων/νος			60	Παλ. Τέρμα		
		219	0,657			202	0,606
46	Λυκούργου			61	Παιδική Χαρά		
		161	0,483			369	1,107
47	Μαρκέα			62	Πλ. Πολυτεχνείου		
		317	0,951			230	0,69
13	Πλ. Ηρώων			63	Δωδεκανήσου		
		273	0,819			233	0,699
14	Γυμν. Ακαδημία			64	Θεσσαλίας		
		410	1,23			115	0,345
15	Στ. Δάφνης			65	Θράκης		

Πίνακας 12: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής L2 (2ο μέρος)

237 (L2)			
S	Όνομα	Απόσταση (m)	Χρόνοαπόσταση (min)
65	Θράκης		
		141	0,423
66	Μακεδονία		
		292	0,876
67	Κεφαλληνίας		
		220	0,66
68	2ας Μεραρχίας		
		188	0,564
69	Αστυνομικά		
		212	0,636
70	Δαμασκηνού		
		215	0,645
30	Άνω Ηλιούπολη		
	Σύνολο διαδρομής (λεπτά)		60,293
	Σύνολο διαδρομής (ώρες)		1,00

Πίνακας 13: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής L3

112 (L3)							
S	Όνομα	Απόσταση (m)	Χρόνοαπόσταση (min)	S	Όνομα	Απόσταση (m)	Χρόνοαπόσταση (min)
71	Αγ. Δημητρίου			15	Στ. Δάφνης		
		445	1,335			397	1,191
72	Αγ. Κωνσταντίνος			88	Φόρος		
		493	1,479			396	1,188
73	Μακρυγιάννη			89	Παναγίτσα		
		255	0,765			403	1,209
74	Παπαδήμα			90	Παλ. Τέρμα		
		275	0,825			327	0,981
75	Πλουταρχου			91	Σοφοκλέους		
		311	0,933			130	0,39
76	Τρικόλων			92	Αμαλίας		
		333	0,999			251	0,753
77	Πρεβέζης			93	Εθν. Μακάριου		
		273	0,819			288	0,864
78	Ρούμελη			94	Κολοκοτρώνη		
		275	0,825			394	1,182
79	Αμφιλοχία			95	Δράμας		
		497	1,491			293	0,879
80	Πλ. Αγ. Βασιλείου			96	Εύρωτα		
		277	0,831			223	0,669
81	Ζαίμη			97	Αγ. Αθανασίου		
		319	0,957			236	0,708
82	Πριάμου			98	Σουλίου		
		248	0,744			330	0,99
83	3η Παπάγου			99	Μαντά		
		303	0,909			228	0,684
84	2η Παπάγου			100	Παπανικολάου		
		315	0,945			116	0,348
85	Παναγίτσα			101	Μακρυγιάννη		
		295	0,885			206	0,618
86	Αστέρας			102	Μπότσαρη		
		171	0,513			195	0,585
87	Αντιόπης			103	Ασπροπόταμου		
		295	0,885			226	0,678
15	Στ. Δάφνης			104	Μουσών		
						286	0,858
				71	Αγ. Δημήτριος		
					Σύνολο διαδρομής (λεπτά)		48,415
					Σύνολο διαδρομής (ώρες)		0,81

Πρώτο βήμα της ανάλυσης αποτελεί ο καθορισμός του μητρώου ζήτησης για τις τρεις πραγματικές λεωφορειακές γραμμές. Παρότι οι γραμμές έχουν κυκλική μορφή, καθεμία περιλαμβάνει δύο διακριτές κατευθύνσεις, με τον σταθμό της Δάφνης να λειτουργεί ως το έτερο άκρο τους. Σημαντικό είναι ότι, παρά τη θέση του ως θεωρητικό τέρμα, στη Δάφνη δεν πραγματοποιείται παρατεταμένη στάθμευση των οχημάτων. Ως αποτέλεσμα, οι ενδιάμεσες στάσεις συνήθως σχηματίζουν ζεύγη στις δύο κατευθύνσεις της κάθε γραμμής και συνεπώς, η επιβατική ζήτηση θα πρέπει να εξεταστεί ξεχωριστά για κάθε κατεύθυνση. Με δεδομένο ότι ο σταθμός της Δάφνης αντιμετωπίζεται ως τερματικός, θεωρείται ότι όλα τα λεωφορεία εκκενώνονται πλήρως κατά την άφιξή τους σε αυτόν.

Το επόμενο βήμα είναι ο καθορισμός ενός υπερβολικά φορτισμένου τμήματος μιας εκ των παραπάνω λεωφορειακών γραμμών. Επιλέγεται το τμήμα μεταξύ της στάσης S51 (Πλ. Κανάρια) και S56 (Πλ. Εθν. Αντιστάσεως) της γραμμής 237 (L2), στο οποίο θα υπάρξει σημαντική αύξηση της επιβατικής κίνησης. Το συγκεκριμένο τμήμα δεν επιλέχθηκε τυχαία, καθώς βρίσκεται ανάμεσα στο σταθμό μετρό της Δάφνης, το οποίο αποτελεί μεγάλο κόμβο για το συγκοινωνιακό σύστημα της νότιας περιοχής της Αθήνας (αφού εκτός από σταθμός μετρό, αποτελεί και τερματικό σταθμό πολλές λεωφορειακές γραμμές) και στην κεντρική πλατεία Ηλιούπολης, στην οποία διεξάγονται πολλές εκδηλώσεις κατά τη διάρκεια του χρόνου. Εκατέρωθεν του τμήματος αυτού, η ζήτηση επιστρέφει σταδιακά σε κανονικές τιμές.

Γίνεται η θεώρηση ότι φορτίζεται κυρίως η κατεύθυνση από τον σταθμό Δάφνης (S15) προς την Πλατεία Εθνικής Αντιστάσεως (S56) και όχι τόσο η αντίστοιχα αντίθετη κατεύθυνση (S30 Άνω Ηλιούπολη – S39 Παναγίτσα), παρόλο που και αυτή επιδέχεται μικρής αύξησης. Αυτή η διαφοροποίηση θεωρείται αναμενόμενη, καθώς η πρώτη κατεύθυνση συνδέει έναν σταθμό μετρό με έναν σημαντικό πόλο δραστηριότητας, ενώ η αντίθετη πορεία εξυπηρετεί κυρίως μια πιο αραιοκατοικημένη περιοχή.

Όσον αφορά τη γραμμή L3 (112), είναι λογικό να υπάρξει αυξημένη ζήτηση στη κατεύθυνση η οποία μπορεί να οδηγήσει προς τον πόλο έλξης. Συγκεκριμένα, η κατεύθυνση προς το μετρό της Δάφνης αναμένεται να έχει μεγαλύτερο επιβατικό κοινό καθώς συνδέει έμμεσα το φορτισμένο τμήμα της γραμμής L2 με τη γραμμή L3, μέσω της στάσης S15 (Σταθμός Δάφνης).

Αντιθέτως, στη γραμμή L1 (206) μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν θα υπάρξουν σημαντικές διαφορές στη ζήτηση μεταξύ των δύο κατευθύνσεών της, αφού η απόσταση της γραμμής αυτής με το φορτισμένο τμήμα είναι μικρή και καμία κατεύθυνση δεν οδηγεί στον πόλο απευθείας. Με λίγα λόγια, οι επιβάτες δεν θα εξοικονομούσαν χρόνο χρησιμοποιώντας λεωφορείο. Ωστόσο, θα υπάρχει μια ελαφρώς αυξημένη ζήτηση από το μετρό της Δάφνης (S15) προς την υπόλοιπη γραμμή, λόγω του παραπάνω δεδομένου.

Ο πίνακας ζήτησης των τριών πραγματικών γραμμών με τις 104 στάσεις είναι ένα μητρώο τριών διαστάσεων όπου η πρώτη διάσταση είναι οι 3 γραμμές (z άξονας) και οι άλλες δύο (x,y άξονες) οι 104 στάσεις (3x104x104). Στο παράρτημα παρατίθεται σε 3 διαφορετικές εικόνες, όπου η κάθε μία απεικονίζει την επιβατική ζήτηση για κάθε γραμμή ξεχωριστά.

Στη συνέχεια, πρέπει να καθοριστούν οι πιθανές τεχνητές γραμμές και τα σημεία-στάσεις στα οποία θα πραγματοποιείται εναλλαγή γραμμής.

Στο παράδειγμα, η γραμμή η οποία είναι υπερβολικά φορτισμένη είναι η γραμμή L2, συνεπώς στόχος είναι να δημιουργηθούν τεχνητές γραμμές ώστε να εξυπηρετήσουν το φορτισμένο τμήμα της και να την αποφορτίσουν. Θα δημιουργηθούν δύο πιθανές τεχνητές γραμμές, μία που θα προέρχεται και θα εξυπηρετεί κυρίως τη γραμμή L1 (L4) και μία για τη γραμμή L3 (L5).

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η S15 (σταθμός Δάφνης), αποτελεί κοινή στάση και για τις 3 εξεταζόμενες γραμμές κάτι το οποίο διευκολύνει την εναλλαγή γραμμής στο σημείο αυτό, χωρίς να υπάρξει επιπλέον χρόνος νεκρής διαδρομής και άρα επιπλέον λειτουργικού κόστους. Είναι εύλογο, λοιπόν, το πρώτο σημείο εναλλαγής να είναι αυτό και για τις δύο τεχνητές γραμμές. Το γεγονός αυτό, τις καθιστά ανταγωνιστικές μεταξύ τους, κάτι το οποίο αναμένεται να φανεί στα αποτελέσματα του παραδείγματος, και θα εξεταστεί παρακάτω.

Το δεύτερο σημείο εναλλαγής της γραμμής L4 είναι εύκολο να προσδιοριστεί, καθώς το τέλος του φορτισμένου τμήματος (S56) βρίσκεται κοντά στην αφετηρία της γραμμής L1, που σημαίνει ότι ο χρόνος νεκρής διαδρομής είναι μικρός ανάμεσα σε αυτές τις δύο στάσεις. Άρα η L4 επιλέγεται να εκτελεί το δρομολόγιο S1-S15 της L1, S15-S56 της L2 και το δρομολόγιο νεκρής διαδρομής S56-S1 το οποίο υπολογίστηκε ότι διαρκεί 3,15 λεπτά χρησιμοποιώντας τον μετρητή απόστασης στο Google Maps και μετατρέποντας την απόσταση σε χρονοαπόσταση, όπως προηγουμένως.

Για την L5, ορίζεται και πάλι ως δεύτερο σημείο εναλλαγής την S56, αλλά σε αυτή τη περίπτωση οι δύο γραμμές έχουν μια σημαντική απόσταση μεταξύ τους. Ξανά με χρήση του google maps προσδιορίζεται ότι μια από τις κοντινότερες στάσεις είναι η στάση S98 (Σουλίου) και η χρονοαπόσταση από την S56 υπολογίζεται στα 8,4 λεπτά. Είναι άξιο αναφοράς ότι οποιαδήποτε άλλη στάση μετά την S56 και μέχρι την αφετηρία της L2 δε θα ήταν σοφή επιλογή για στάση εναλλαγής και στις δύο τεχνητές γραμμές, αφού δεν εξυπηρετούν εξίσου φορτισμένες στάσεις και επίσης απομακρύνονται από την αφετηρία της εκάστοτε αρχικής γραμμής από τις οποίες προέρχονται.

Ακολουθούν οι πίνακες 14 και 15 που δείχνουν αναλυτικά τα δρομολόγια των δύο γραμμών εναλλαγής και ο χάρτης με το τελικό λεωφορειακό δίκτυο του παραδειγματός στην εικόνα 2. Οι υπογραμμισμένες στάσεις δηλώνουν τη περιοχή της φορτισμένης L2 που εξυπηρετεί η κάθε μία λεωφορειακή γραμμή:

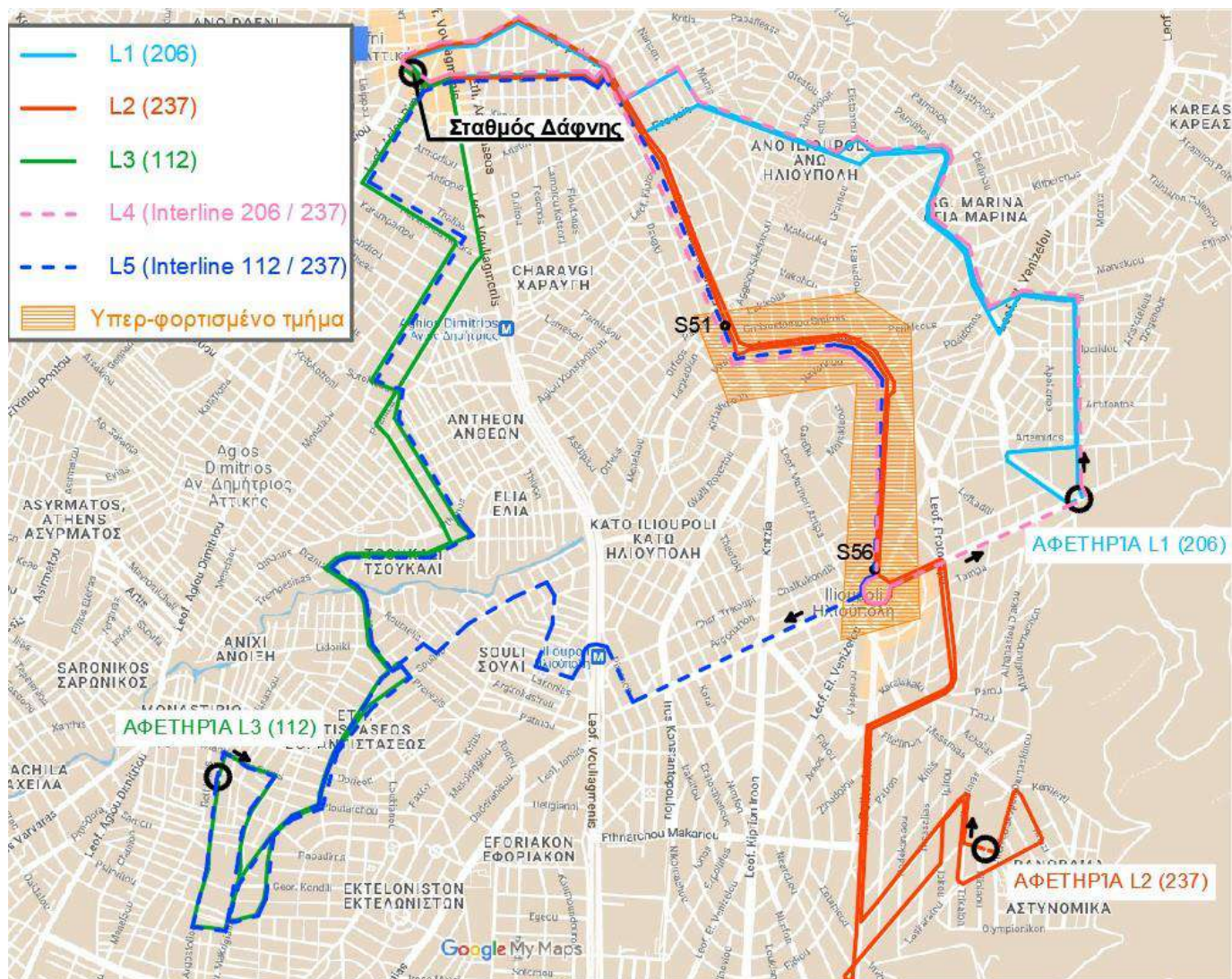
Πίνακας 14: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής εναλλαγής L4

Γραμμή εναλλαγής L4			
S	Όνομα	Απόσταση (m)	Χρόνοαπόσταση (min)
1	Αγ. Μαρίνα		
		305	0,915
2	Μοναστήρι		
		325	0,975
3	Αρχιμήδους		
		268	0,804
4	Νταμάρια		
		247	0,741
5	Χαβιαρίδου		
		180	0,54
6	Παπάγου		
		217	0,651
7	Αγ. Μαρίνα 2		
		256	0,768
8	Γεφυράκι		
		246	0,738
9	Πλ. Ανεξαρτησίας		
		460	1,38
10	Γιώργου		
		285	0,855
11	Γυμνάσιο		
		185	0,555
12	Κρητικού		
		370	1,11
13	Πλ. Ηρώων		
		273	0,819
14	Γυμναστική Ακ.		
		410	1,23
15	Στ. Δάφνης		

S	Όνομα	Απόσταση (m)	Χρόνοαπόσταση (min)
15	Στ. Δάφνης		
		307	0,921
16	Πευκάκια		
		358	1,074
17	Πλ. Ηρώων		
		210	0,63
48	Μαρκέα		
		215	0,645
49	Λυκούργου		
		370	1,11
50	Αγ. Κων/νος		
		165	0,495
51	Πλ. Κανάρια		
		373	1,119
52	Λότσου		
		213	0,639
53	Νησάκι		
		290	0,87
54	Αστυνομία		
		215	0,645
55	Ταχυδρομείο		
		254	0,762
56	Πλ. Εθν. Αντιστάσεως		
		1050	3,15
1	Αγ. Μαρίνα		
	Σύνολο διαδρομής(λεπτά)		37,141
	Σύνολο διαδρομής(ώρες)		0,62

Πίνακας 15: Χρονοαποστάσεις και δρομολόγιο γραμμής εναλλαγής L5

Γραμμή εναλλαγής L5							
S	Όνομα	Απόσταση (m)	Χρόνοαπόσταση (min)	S	Όνομα	Απόσταση (m)	Χρόνοαπόσταση (min)
71	Αγ. Δημητριος			15	Στ. Δάφνης		
		439	1,317			307	0,921
72	Αγ. Κωνσταντινος			16	Πευκάκια		
		493	1,479			358	1,074
73	Μακρυγιάννη			17	Πλ. Ηρώων		
		255	0,765			210	0,63
74	Παπαδήμα			48	Μαρκέα		
		275	0,825			215	0,645
75	Πλουταρχου			49	Λυκούργου		
		311	0,933			370	1,11
76	Τρικάλων			50	Αγ. Κων/νος		
		333	0,999			165	0,495
77	Πρεβέζης			51	Πλ. Κανάρια		
		273	0,819			373	1,119
78	Ρούμελη			52	Λότσου		
		275	0,825			213	0,639
79	Αμφιλοχία			53	Νησάκι		
		497	1,491			290	0,87
80	Πλ. Αγ. Βασιλείου			54	Αστυνομία		
		275	0,825			215	0,645
81	Ζαίμη			55	Ταχυδρομείο		
		317	0,951			254	0,762
82	Πριάμου			56	Πλ. Εθν. Αντιστάσεως		
		248	0,744			2800	8,4
83	3η Παπάγου			98	Σουλίου		
		303	0,909			330	0,99
84	2η Παπάγου			99	Μαντά		
		315	0,945			228	0,684
85	Παναγίτσα			100	Παπανικολάου		
		295	0,885			116	0,348
86	Αστέρας			101	Μακρυγιάννη		
		168	0,504			206	0,618
87	Αντιόπης			102	Μπότσαρη		
		295	0,885			191	0,573
15	Στ. Δάφνης			103	Ασπροπόταμου		
						226	0,678
				104	Μουσών		
						286	0,858
				71	Αγ. Δημήτριος		
					Σύνολο διαδρομής (λεπτά)		56,16
					Σύνολο διαδρομής (ώρες)		0,94



Εικόνα 2: Χάρτης επιπέδου δικτύου παραδείγματος

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εκτελεστούν τέσσερα διαφορετικά παραδείγματα σε αντίθεση με το ένα του προηγούμενου κεφαλαίου. Το κάθε ένα από αυτά θα βοηθήσει στη πλήρη κατανόηση του μοντέλου και θα αναδείξει τις διαφορετικές παραμέτρους που μπορούν να καθοριστούν, αναλόγως και με τους στόχους που επιθυμείται να επιτευχθούν:

1. Παράδειγμα αξιοποίησης καμίας, μίας και δύο τεχνητών γραμμών και σύγκριση των τιμών αντικειμενικής συνάρτησης τους,
2. Παράδειγμα με χρήση διαφορετικών σετ βαρύτητας που θα έχουν διαφορετικούς κύριους στόχους,
3. Παράδειγμα με διαφορετικό αριθμό στόλου (γ),
4. Παράδειγμα με διαφορετικό Θ , δηλαδή άνω όριο που δε πρέπει να ξεπεραστεί για να εξασφαλίζεται ικανοποιητική εξυπηρέτηση του επιβατικού κοινού.

5.1. Παράδειγμα 1^ο:

Σε αντίθεση με την εφαρμογή σε ιδεατό δίκτυο, ο αριθμός διαθέσιμων λεωφορείων ορίζεται ως $\gamma=20$ λόγω μείωσης των πραγματικών γραμμών από 4 σε 3. Επιπλέον, η τιμή αυτή θεωρείται ιδανική ώστε να είναι διακριτά τα διαφορετικά αποτελέσματα που θα προκύψουν στα παρακάτω παραδείγματα. Η τιμή Θ παραμένει ίση με 1 και η τιμή ψ τίθεται ίση με 0,6 ώστε τα λεωφορεία που εξυπηρετούν τις αρχικές γραμμές να είναι δεδομένα περισσότερα από τα αντίστοιχα των τεχνητών γραμμών. Για να υπάρξει μεγαλύτερη ασφάλεια του παραπάνω στόχου, τίθεται ξανά ο μέγιστος αριθμός λεωφορείων που μπορούν να ανατεθούν σε πραγματικές και τεχνητές γραμμές, ίσος με 8 και 5 αντίστοιχα.

Το σετ βαρυτήτων επίσης θα τροποποιηθεί καθώς αλλάζουν τα μεγέθη που αποτελούν την αντικειμενική συνάρτηση. Αναλυτικότερα, η συνολική ζήτηση η οποία συνδέεται με τη βαρύτητα β_1 , αυξάνεται σε μεγάλο βαθμό και ως αποτέλεσμα πρέπει να προσαρμοστούν και τα βάρη β_2 , β_3 με σκοπό να διατηρηθεί, όσο το δυνατόν, η ισορροπημένη στόχευση του προγράμματος. Έτσι, τα β_1 , β_2 και β_3 λαμβάνουν τις τιμές 1, 200 και 1000 αντίστοιχα. Οι χρόνοι δρομολογίου για τις πέντε γραμμές είναι $r_1 = 0,66$, $r_2 = 1,00$, $r_3 = 0,81$, $r_4 = 0,62$ και $r_5 = 0,94$.

Τα παραδείγματα στο ιδεατό δίκτυο (και αργότερα σε πραγματικό δίκτυο) επιλύθηκαν με Gurobi 10.0.0, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους branch-and-bound και dual simplex.

Πίνακας 16: Αποτελέσματα μη αξιοποίησης γραμμών εναλλαγής

Καμία γραμμή εναλλαγής				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,66	1	1	1,000
L2	1,00	8	8	0,125
L3	0,81	8	9	0,111
L4	0,62	0	0	0
L5	0,94	0	0	0
Σύνολο Λεωφορείων	17	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης		-8159,91

Πίνακας 17: Αποτελέσματα αξιοποίησης μιας γραμμής εναλλαγής

Μία γραμμή εναλλαγής				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,66	1	1	1,000

L2	1,00	8	8	0,125
L3	0,81	6	7	0,143
L4	0,62	5	7	0,143
L5	0,94	0	0	0

Σύνολο Λεωφορείων	20	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης		-9553,53
------------------------------	----	---	--	----------

Πίνακας 18: Αποτελέσματα αξιοποίησης δύο γραμμών εναλλαγής

Δύο γραμμές εναλλαγής				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,66	1	1	1,000
L2	1,00	8	8	0,125
L3	0,81	3	3	0,333
L4	0,62	5	7	0,143
L5	0,94	3	3	0,333

Σύνολο Λεωφορείων	20	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης		-9564,11
------------------------------	----	---	--	----------

Στη παραλλαγή που δε χρησιμοποιούνται γραμμές εναλλαγής, το μοντέλο επιλέγει να αναθέσει το μέγιστο δυνατό αριθμό λεωφορείων στις γραμμές L2 και L3 και το ελάχιστο δυνατό στην L1. Το παραπάνω είναι αναμενόμενο, αφού η γραμμή L2 περιέχει το υπερβολικά φορτωμένο τμήμα και είναι δεδομένο για τα σετ βαρυτήτων που έχουν ανατεθεί, ότι αποτελεί προτεραιότητα. Στη συνέχεια, η γραμμή L3 αποτελεί τη γραμμή με το δεύτερο μεγαλύτερο φόρτο, αφού συνδέει έμμεσα τη γραμμή 3 με τη γραμμή 2 και ως αποτέλεσμα λαμβάνει και αυτή 8 λεωφορεία. Η γραμμή L1, παρόλο που αποτελεί τη πιο σύντομη πραγματική γραμμή σε χρόνο δρομολογίου, δέχεται μόλις ένα λεωφορείο, δηλώνοντας πως ο επιβατικός φόρτος που εξυπηρετεί είναι πολύ μικρός συγκριτικά με τις άλλες γραμμές. Το παραπάνω επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι το μοντέλο αναθέτει τρία λιγότερα λεωφορεία από το μέγιστο.

Παρατηρείται σημαντική μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης όταν τεθεί σε ισχύ η χρήση μίας τεχνητής γραμμής (περίπου -14,6%), μεταφέροντας 2 λεωφορεία από τη γραμμή L3 στη τεχνητή γραμμή L4 και προσθέτοντάς της και με τα επιπλέον τρία λεωφορεία που δεν χρησιμοποιούνταν στη προηγούμενη παραλλαγή, που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η γραμμή αυτή είναι αρκετά βοηθητική για το λεωφορειακό σύστημα. Πράγματι αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού η γραμμή 4 χαρακτηρίζεται από τη μικρότερη διαδρομή στο παράδειγμα, που αποδεικνύεται λιγότερη ακόμα και από τη

πραγματική γραμμή από την οποία προέρχεται. Όπως είχε αναφερθεί προηγουμένως, οι δύο τεχνητές γραμμές είναι ανταγωνιστικές μεταξύ τους, αφού εξυπηρετούν ακριβώς το ίδιο επιφορτισμένο κομμάτι της L2. Είναι λογικό λοιπόν, να προκρίνεται η γραμμή L4 λόγω του αισθητά μικρότερου χρόνου δρομολογίου σε σχέση με την L5.

Στην περίπτωση των δύο γραμμών εναλλαγής, παρατηρείται βελτίωση της συνολικής απόδοσης του συστήματος, όπου αν και περιορισμένη, θεωρείται η βέλτιστη λύση βάσει των δεδομένων της εφαρμογής. Η βελτίωση επιτυγχάνεται μέσω της μεταφοράς τριών λεωφορείων από τη γραμμή L3 στη γραμμή L5.

Σε αντίθεση με το παράδειγμα ιδεατού δικτύου, η ροή των λεωφορείων δεν είναι συνεχόμενη, καθώς ολιγόλεπτες σταθμεύσεις παρατηρούνται στις αφετηρίες των λεωφορειακών γραμμών λόγω πιο αναλυτικών χρόνων δρομολογίου.

Η παραπάνω παραλλαγή θα είναι η βάση και το μέτρο σύγκρισης για τα παρακάτω παραδείγματα που ακολουθούν και εστιάζουν σε διαφορετικές πτυχές του μοντέλου. Οι παράμετροι θα είναι οι ίδιες, εκτός από αυτές που τονίζονται ότι μεταβάλλονται. Στους πίνακες, οι υπογραμμισμένες παράμετροι δηλώνουν εκείνες οι οποίες έχουν μεταβληθεί σε σχέση με το βασικό παράδειγμα του πίνακα 12.

5.2. Παράδειγμα 2^ο (διαφορετικά σετ βαρυτήτων):

Στο προηγούμενο παράδειγμα, καθώς και στο κεφάλαιο 4, αναλύθηκε ο τρόπος με τον οποίο το μοντέλο αναθέτει τα οχήματα με βάση έναν ισορροπημένο στόχο, δίνοντας περιορισμένη έμφαση στην τακτική εξυπηρέτηση των επιβατών. Στη συνέχεια, εξετάζεται η συμπεριφορά του μοντέλου υπό διαφορετικές τιμές βαρυτήτων. Σημειώνεται ότι, στο πλαίσιο του συγκεκριμένου παραδείγματος, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν αποτελεί καθοριστικό παράγοντα, καθώς προκύπτει άμεσα από τις επιλεγμένες τιμές των τριών βαρυτήτων. Ωστόσο, έχει ιδιαίτερη σημασία η ανάλυση των διαφοροποιήσεων και των προτεραιοτήτων που το μοντέλο αποδίδει στις λεωφορειακές γραμμές, ανάλογα με την εκάστοτε περίπτωση.

Τα αποτελέσματα της βασικής λύσης των 2 γραμμών εναλλαγών του προηγούμενου παραδείγματος παραθέτονται δίπλα στα παρόντα, μέσα σε παρενθέσεις ώστε να είναι εύκολα συγκρίσιμα.

Α) Έμφαση στη μείωση του λειτουργικού κόστους με μείωση του συνολικού χρόνου λειτουργίας των λεωφορείων

Πίνακας 19: Πίνακας αποτελεσμάτων με έμφαση στη μείωση του λειτουργικού κόστους

$\beta_1=1$, $\beta_2=400$, $\beta_3=1000$				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,66	3(1)	4	0,250
L2	1,00	8(8)	8	0,125

L3	0,81	1(3)	1	0,333
L4	0,62	5(5)	7	0,143
L5	0,94	0(3)	0	0

Σύνολο Λεωφορείων	17	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	-6712,39
------------------------------	----	---	----------

Θέτοντας την παράμετρο $\beta_2=400$, το μοντέλο απομακρύνεται από την ισορροπημένη κατάσταση δίνοντας μεγαλύτερη έμφαση στη μείωση του λειτουργικού κόστους, με αποτέλεσμα την απενεργοποίηση της τεχνητής γραμμής L5, η οποία εξυπηρετεί το πιο επιβαρυμένο τμήμα της γραμμής L2. Συγκεκριμένα, αφαιρούνται τρία λεωφορεία από τη παραπάνω γραμμή, ενώ προστίθενται 2 λεωφορεία στη γραμμή L1 όντας η δεύτερη πιο σύντομη λεωφορειακή γραμμή του δικτύου. Ακόμη, παρατηρείται πως οι γραμμές L2, και L4 παραμένουν αμετάβλητες, δεχόμενες το μέγιστο αριθμό λεωφορείων, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει σημαντική υποβάθμιση του βαθμού εξυπηρέτησης των επιβατών.

Παράλληλα, το μοντέλο δεν αναθέτει όλα τα διαθέσιμα λεωφορεία, αφήνοντας τρία αχρησιμοποίητα κάτι που υποδηλώνει ότι η βαρύτητα β_3 , η οποία συμπληρώνει τη β_2 αυξάνοντας την αντικειμενική συνάρτηση, είναι αρκετά υψηλή και ως αποτέλεσμα διαδραματίζει σημαντικό ρόλο.

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, και κυρίως λόγω προτίμηση της γραμμής L1 εν αντιθέσει της γραμμής L3, το παραπάνω σετ βαρυτήτων θεωρείται κατάλληλο σε περιπτώσεις που κύριος σκοπός αποτελεί η μείωση του λειτουργικού κόστους, υποβαθμίζοντας αισθητά, αλλά όχι ολοκληρωτικά, την τακτική εξυπηρέτηση των επιβατών.

Πίνακας 20: Πίνακας αποτελεσμάτων με παράλληλη έμφαση στη τακτική εξυπηρέτηση και στη μείωση λειτουργικού κόστους, χωρίς σημαντικό περιορισμό για ανάθεση λεωφορείων

$\beta_1=1$, $\beta_2=300$, $\beta_3=900$				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,66	1(1)	1	1,00
L2	1,00	8(8)	8	0,125
L3	0,81	6(3)	7	0,143
L4	0,62	5(5)	7	0,143
L5	0,94	0(3)	0	0

Σύνολο Λεωφορείων	20	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	-9891,53
------------------------------	----	---	----------

Στην προκειμένη περίπτωση, το μοντέλο στοχεύει εξίσου στη μείωση του συνολικού χρόνου λειτουργίας, επιδιώκοντας, στο μέτρο του εφικτού, τη μείωση του λειτουργικού κόστους χωρίς όμως να υπάρχει σημαντικός περιορισμός στη χρήση επιπλέον λεωφορείων, μειώνοντας το βάρος β_3 κατά 100 μονάδες σε σχέση με τη προηγούμενη παραλλαγή. Πράγματι, τα τρία αχρησιμοποίητα λεωφορεία διατίθενται στη γραμμή L3, η οποία είναι πιο σύντομη από την τεχνητή γραμμή L5. Θα μπορούσαν να διατεθούν στη γραμμή L1, εάν η έμφαση δινόταν αποκλειστικά στη μείωση των χρόνων λειτουργίας, ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει, γεγονός που επιβεβαιώνει ότι δεν σημειώνεται υποβάθμιση του βαθμού εξυπηρέτησης. Παρατηρείται ότι η λύση είναι ίδια με αυτή του βασικού παραδείγματος για χρήση μίας γραμμής εναλλαγής, υποδηλώνοντας ότι αποτελεί πιο ισορροπημένη προσέγγιση.

Β) Έμφαση στη μείωση του λειτουργικού κόστους με μείωση του συνολικού αριθμού ανατετημένων λεωφορείων

Πίνακας 21: Πίνακας αποτελεσμάτων με περιορισμό στην ανάθεση επιπλέον λεωφορείων

$\beta_1=1, \beta_2=200, \beta_3=1300$				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,66	1	1	1,00
L2	1,00	8	8	0,125
L3	0,81	3	3	0,333
L4	0,62	0	0	0
L5	0,94	0	0	0
Σύνολο Λεωφορείων	12	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης		-4533,49

Στην παρούσα περίπτωση, αυξάνεται το βάρος β_3 κατά 300 μονάδες σε σχέση με το βασικό παράδειγμα, με σκοπό να ωθηθεί το μοντέλο μακριά από την ισορροπία περιορίζοντας, ως ένα βαθμό, τα διαθέσιμα λεωφορεία και εξασφαλίζοντας μικρότερο συνολικό λειτουργικό κόστος. Ωστόσο, παρατηρείται ότι χρησιμοποιούνται 12 λεωφορεία ο οποίος είναι ο ελάχιστος αριθμός που απαιτείται να διατεθούν στις πραγματικές γραμμές, λόγω της παραμέτρου $\psi=0,6$. Συγκεκριμένα, 8 λεωφορεία κατανέμονται στην επιβαρυμένη γραμμή L2, ενώ μόνο τρία διατίθενται στη γραμμή L3, η οποία είναι η αμέσως επόμενη πιο φορτισμένη γραμμή, και ένα στην L1.

Με λίγα λόγια, ο βαθμός κατά τον οποίο αυξήθηκε η β_3 οδηγεί το μοντέλο να λάβει ακραίες τιμές, οι οποίες δε θεωρούνται ενδεικτικές και υποβαθμίζουν σημαντικά (αλλά όχι εξ ολοκλήρου) την εξυπηρέτηση των επιβατών.

5.3. Παράδειγμα 3^ο (διαφορετικός αριθμός στόλου):

Σε αυτό το παράδειγμα μελετάται ο τρόπος που αντιδρά το μοντέλο σε άλλες δύο διαφορετικές περιπτώσεις, μία που έχει 5 λιγότερα λεωφορεία από το βασικό παράδειγμα και μία που έχει 5 λεωφορεία περισσότερα.

Πίνακας 22: Πίνακας αποτελεσμάτων με συνολικό στόλο $\gamma=15$ λεωφορεία

Αριθμός λεωφορείων $\gamma=15$				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,66	1	1	1,000
L2	1,00	8	8	0,125
L3	0,81	1	1	1,000
L4	0,62	5	7	0,143
L5	0,94	0	0	0
Σύνολο Λεωφορείων	15	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης		-9527,11 (-9.564,11)

Για $\gamma=15$ λεωφορεία δίνεται καθολική έμφαση στις γραμμές L2 και L5 οι οποίες εξυπηρετούν το μεγαλύτερο αριθμό επιβατών και ταυτόχρονα οι πραγματικές γραμμές L1 και L3 λαμβάνουν από ένα λεωφορείο η κάθε μία, που αποτελεί και την ελάχιστη επιτρεπόμενη τιμή.

Πίνακας 23: Πίνακας αποτελεσμάτων με συνολικό στόλο $\gamma=25$ λεωφορεία

Αριθμός λεωφορείων $\gamma=25$				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,66	1(1)	1	1,000
L2	1,00	8(8)	8	0,125
L3	0,81	6(3)	7	0,143
L4	0,62	5(5)	7	0,143
L5	0,94	5(3)	5	0,200
Σύνολο Λεωφορείων	25	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης		-9597,58 (-9.564,11)

Παρατηρείται ότι για $\gamma=25$ λεωφορεία δίνεται προτεραιότητα στη γραμμή L5 (στην οποία μεγιστοποιείται ο αριθμός των λεωφορείων που μπορούν να ανατεθούν) και

στη γραμμή L3, ενώ ο αριθμός των λεωφορείων στη γραμμή L1 παραμένει αμετάβλητος.

Το μοντέλο αξιοποιεί πλήρως όλα τα διαθέσιμα λεωφορεία και στις δύο εξεταζόμενες παραλλαγές. Μάλιστα, όσο περισσότερα οχήματα διατίθενται, τόσο ευνοϊκότερη γίνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία παρουσιάζει μικρή μείωση (-0,4%) για στόλο 25 λεωφορείων. Σύμφωνα με τις καθορισμένες βαρύτητες, το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς το μοντέλο βασίζεται στη μεγιστοποίηση της επιβατικής εξυπηρέτησης. Συνεπώς, ένας μεγαλύτερος διαθέσιμος λεωφορειακός στόλος οδηγεί σε βελτιωμένη συνολική απόδοση του συστήματος.

5.4. Παράδειγμα 4^ο (διαφορετικό άνωτατο όριο λειτουργικής εξυπηρέτησης προς όφελος των επιβατών Θ):

Τέλος, το μοντέλο θα εφαρμοστεί για μία μικρότερη τιμή του Θ σε σχέση με την τιμή που χρησιμοποιείται στο βασικό παράδειγμα (η οποία ήταν $\Theta=1$).

Πίνακας 24: Πίνακας αποτελεσμάτων για ανώτατο όριο εξυπηρέτησης $\Theta=0,1$

$\Theta=0,1$				
Λεωφ. Γραμμή	Χρόνος δρομολογίου (ώρες)	Αριθμός λεωφορείων	Συχνότητα (λεωφορεία/ώρα)	Χρονοαπόσταση (ώρες)
L1	0,66	3(1)	4	0,250
L2	1,00	8(8)	8	0,125
L3	0,81	5(3)	6	0,167
L4	0,62	4(5)	6	0,167
L5	0,94	0(3)	0	0
Σύνολο Λεωφορείων	20	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης		-9230,68 (-9.564,11)

Για $\Theta=0,1$ και άρα μεγαλύτερο περιορισμό ως προς την διατήρηση ενός λειτουργικού επιπέδου μέσης αναμονής κάθε επιβάτη, καταγράφεται μείωση στην συνολική απόδοση του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή, το μοντέλο επιλέγει να μην αναθέσει λεωφορεία στη τεχνητή γραμμή L5 σε σχέση με το βασικό παράδειγμα και παράλληλα, για δεύτερη φορά, αυξάνει τα ανατεθειμένα λεωφορεία που εξυπηρετούν τη πραγματική γραμμή L1 από ένα σε τρία, με σκοπό τη ελαχιστοποίηση του μέσου χρόνου αναμονής των επιβατών της γραμμής αυτής. Το παραπάνω είναι και ο λόγος της αύξησης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης (άνοδος της τάξης του 3,5%), καθώς το σύστημα σαν σύνολο ζημιώνεται με αυτή την επιλογή, αφού η γραμμή L1 είναι η λιγότερο φορτισμένη γραμμή του δικτύου, ενώ εξάγεται το συμπέρασμα ότι για περαιτέρω μείωση του ορίου Θ , θα υπάρξει ακόμη περισσότερη ελάττωση της απόδοσης του δικτύου.

6. Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία είχε ως στόχο τη δημιουργία ενός μοντέλου χρονοδρομολόγησης αυτόνομων λεωφορείων σε ένα δίκτυο στο οποίο έχουν σχεδιαστεί ορισμένες δευτερεύουσες τεχνητές γραμμές, με σκοπό την καλύτερη αξιοποίηση του διατεθειμένου στόλου, χωρίς να αυξάνεται το συνολικό λειτουργικό κόστος και βελτιώνοντας το επίπεδο εξυπηρέτησης των επιβατών. Ωστόσο, το μοντέλο έχει τη δυνατότητα να λάβει διαφορετικούς συνδυασμούς παραμέτρων ανάλογα με το στόχο που πρέπει να επιτευχθεί. Αυτοί οι στόχοι μπορεί να αποτελούν τη βελτίωση του χρόνου εξυπηρέτησης επιβατών, τη μείωση του λειτουργικού κόστους ή τη χρήση περιορισμένου αριθμού οχημάτων.

Το πρόβλημα μοντελοποιήθηκε αρχικά ως ένα μη γραμμικό πρόβλημα μικτού ακεραίου και στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε η γραμμικοποίησή του, μετατρέποντας το σε γραμμικό πρόβλημα μικτού ακεραίου, με σκοπό την εύρεση της συνολικά βέλτιστης λύσης χρησιμοποιώντας ακριβής τρόπο επίλυσης μέσω του λογισμικού gurobi, με τη χρήση της διακλάδωσης και οριοθέτησης (branch and bound).

Αρχικά στην περίπτωση του ιδεατού δικτύου, ελέγχθηκε και πραγματοποιήθηκε ο βασικός στόχος της εργασίας ο οποίος ήταν να μειώσει τη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία απαρτιζόταν από 3 πτυχές, μία που αντικατόπτριζε το βαθμό εξυπηρέτησης προς το επιβατικό κοινό και δύο που σχετίζονταν άμεσα με το λειτουργικό κόστος του δικτύου. Η μείωση αυτή επιτεύχθηκε μέσω της χρήσης μίας και δύο τεχνητών γραμμών εναλλαγής, οι οποίες λειτουργούσαν συμπληρωματικά στο υπάρχον σύστημα. Παρατηρήθηκε ότι η ροή των λεωφορείων είναι συνεχόμενη, χωρίς επιπλέον χρόνο αναμονής σε στάση.

Στη συνέχεια, για το πραγματικό δίκτυο, εφαρμόστηκε το μοντέλο σε τρεις υφιστάμενες γραμμές του λεωφορειακού δικτύου στις περιοχές Δάφνης, Υμηττού, Ηλιούπολης και Αγίου Δημητρίου. Εκτός από τον έλεγχο για τη βελτίωση της συνολικής απόδοσης, πραγματοποιήθηκαν τρεις επιπλέον δοκιμές με διαφορετικές παραλλαγές, προκειμένου να αξιολογηθούν συγκεκριμένες παράμετροι. Τα αποτελέσματα των δοκιμών ανέδειξαν την αξιοπιστία και την ευελιξία του μοντέλου, καθώς παρέχουν τη δυνατότητα προσαρμογής του στις εκάστοτε συνθήκες που απαιτεί η διαχείριση του δικτύου. Παρόλο που στο ιδεατό δίκτυο υπήρχε συνεχής ροή λεωφορείων, στο πραγματικό δίκτυο τα λεωφορεία πραγματοποιούν ολιγόλεπτες στάσεις λόγω μεγαλύτερης πολυπλοκότητας του δικτύου όσον αφορά τους χρόνους δρομολογίων κάθε γραμμής.

Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε σημαντική αύξηση της απόδοσης του συστήματος με τη χρήση μιας τεχνητής γραμμής, ενώ η προσθήκη δεύτερης γραμμής οδήγησε σε μικρότερη βελτίωση. Δεδομένου ότι και οι δύο γραμμές εξυπηρετούν τις ίδιες στάσεις του φορτισμένου τμήματος της L2, λειτουργούν ανταγωνιστικά και άρα, ήταν αναμενόμενο ότι το μοντέλο θα εξαντλήσει πρώτα τα περιθώρια βελτίωσης της πιο κερδοφόρας γραμμής προτού αναθέσει λεωφορεία και στη δεύτερη. Στα

παραδείγματα που εκτελέστηκαν, η L4 αναδείχθηκε σταθερά ως η πιο ελκυστική επιλογή, χάρη στον σημαντικά μικρότερο χρόνο δρομολογίου (κατά 0,32 ώρες). Αντίθετα, η L5, αν και εξυπηρετούσε ελαφρώς μεγαλύτερο επιβατικό φόρτο λόγω της αρχικής L3, δεν προτιμήθηκε. Ο μόνος παράγοντας που θα μπορούσε να την καταστήσει προτιμότερη θα ήταν η αποκλειστική έμφαση στην τακτική εξυπηρέτηση της ζήτησης σε επίπεδο δικτύου.

Συμπερασματικά, η παρούσα έρευνα αποδεικνύει την χρησιμότητα και αποτελεσματικότητα ύπαρξης τεχνητών λεωφορειακών γραμμών με την αξιοποίηση ενός στόλου αποτελούμενου από αυτόνομα λεωφορεία, που μπορούν να δώσουν πολλά οφέλη στο συγκοινωνιακό σύστημα μιας περιοχής.

Παρόλα αυτά, το μοντέλο παρουσιάζει ορισμένους περιορισμούς. Συγκεκριμένα, η ανάθεση οχημάτων πραγματοποιείται σε προκαθορισμένες τεχνητές λεωφορειακές γραμμές, γεγονός που περιορίζει την ευελιξία του συστήματος. Παράλληλα, το μητρώο ζήτησης είναι επίσης προρυθμισμένο, καθώς στη συγκεκριμένη μελέτη καθορίστηκε τυχαία βάσει λογικών κανόνων, ενώ θα μπορούσε να βασίζεται σε πραγματικά δεδομένα για μεγαλύτερη ακρίβεια. Επιπλέον, η εισαγωγή τεχνητών γραμμών αυξάνει την πολυπλοκότητα του δικτύου, γεγονός που θα μπορούσε να δυσχεράνει την κατανόηση των δρομολογίων από τους επιβάτες. Τέλος, οι κυκλικοί χρόνοι των δρομολογίων υπολογίστηκαν με βάση την απόσταση και μια προκαθορισμένη μέση ταχύτητα και μέσο χρόνο αποβίβασης/επιβίβασης, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι κυκλοφοριακές συνθήκες, οι οποίες μεταβάλλονται ανάλογα με τη χρονική στιγμή εκτέλεσης του προγράμματος.

Τα παραπάνω προβλήματα μπορούν να λυθούν ή να βελτιωθούν σε μελλοντικές εργασίες με κάποιες προσθήκες, όπως η ένταξη ενός αλγορίθμου που μελετάει και αναλύει την επιβατική ζήτηση σε πραγματικό χρόνο καθώς και το επίπεδο της κίνησης στους δρόμους, πραγματοποιώντας βραχυπρόθεσμες προβλέψεις. Με βάση τα παραπάνω, θα είναι ικανό να δημιουργήσει διαφορετικές τεχνητές γραμμές, επιλέγοντας τις πιο συμφέρουσες για τις αντίστοιχες παραμέτρους που θα αναθέσει ο διαχειριστής του συστήματος.

Τέλος, εξίσου, σημαντική επέκταση στη παρούσα μελέτη θα αποτελούσε και η προσθήκη παραμέτρου και μεταβλητής που θα εκφράζουν τη συνολική χωρητικότητα των εκάστοτε λεωφορείων, για καλύτερη προσομοίωση της πραγματικότητας, και περιορίζοντας το μοντέλο ώστε να ικανοποιούνται. Το παραπάνω θα προσέφερε και τη δυνατότητα να υπολογιστούν ακριβώς οι χρόνοι επιβίβασης/αποβίβασης για κάθε στάση ξεχωριστά.

7. Βιβλιογραφία

- Abe, R. (2019). Introducing autonomous buses and taxis: Quantifying the potential benefits in Japanese transportation systems. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 126, 94–113. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2019.06.003>
- Ainsalu, J., Arffman, V., Bellone, M., Ellner, M., Haapamäki, T., Haavisto, N., Josefson, E., Ismailogullari, A., Lee, B., Madland, O., Madžulis, R., Mür, J., Mäkinen, S., Nousiainen, V., Pilli-Sihvola, E., Rutanen, E., Sahala, S., Schønfeldt, B., Smolnicki, P. M., ... Åman, M. (2018). State of the Art of Automated Buses. *Sustainability*, 10(9), 3118. <https://doi.org/10.3390/su10093118>
- Beckmann, S., Zadek, H., & Trojahn, S. (2025). Criteria for Route Evaluation of Automated Buses. *Applied Sciences*, 15(4), 1683. <https://doi.org/10.3390/app15041683>
- Boersma, M., Nuñez Velasco, R., Ozturker, P., Zubin, M., Heikoop, I., & Hagenzieker, B. (n.d.). *Automated Buses in Europe An Inventory of Pilots Final Version Automated Buses in Europe An Inventory of Pilots*. <http://repository.tudelft.nl/>
- Cao, Z., & (Avi) Ceder, A. (2019). Autonomous shuttle bus service timetabling and vehicle scheduling using skip-stop tactic. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 102, 370–395. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2019.03.018>
- Cortés, C. E., Jara-Díaz, S., & Tirachini, A. (2011). Integrating short turning and deadheading in the optimization of transit services. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 45(5), 419–434. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2011.02.002>
- Dai, Z., Liu, X. C., Chen, X., & Ma, X. (2020). Joint optimization of scheduling and capacity for mixed traffic with autonomous and human-driven buses: A dynamic programming approach. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 114, 598–619. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2020.03.001>
- Fagnant, D. J., & Kockelman, K. (2015). Preparing a nation for autonomous vehicles: opportunities, barriers and policy recommendations. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 77, 167–181. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2015.04.003>
- Gkiotsalitis, K. (2022). *Public Transport Optimization*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-12444-0>
- Gkiotsalitis, K., Schmidt, M., & van der Hurk, E. (2022). Subline frequency setting for autonomous minibusses under demand uncertainty. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 135, 103492. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2021.103492>

- Gkiotsalitis, K., Wu, Z., & Cats, O. (2019a). A cost-minimization model for bus fleet allocation featuring the tactical generation of short-turning and interlining options. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 98, 14–36. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2018.11.007>
- Gkiotsalitis, K., Wu, Z., & Cats, O. (2019b). A cost-minimization model for bus fleet allocation featuring the tactical generation of short-turning and interlining options. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 98, 14–36. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2018.11.007>
- Guo, R., Liu, X., Bhatnagar, S., & Vallati, M. (2023). Real-time Routing and Scheduling of On-demand Autonomous Customized Bus Systems. *2023 IEEE 26th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, 1536–1541. <https://doi.org/10.1109/ITSC57777.2023.10421983>
- Hatzenbühler, J., Cats, O., & Jenelius, E. (2020). Transitioning towards the deployment of line-based autonomous buses: Consequences for service frequency and vehicle capacity. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 138, 491–507. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2020.06.019>
- Ibarra-Rojas, O. J., Cervantes-Sanmiguel, K. I., Laura Quintanar-Sanchez, D., & Rios-Solis, Y. A. (n.d.). *An integrated bi-objective timetabling and vehicle scheduling problem considering synchronization of groups of lines and interlining*. <https://ssrn.com/abstract=4769001>
- Mouratidis, K., & Cobeña Serrano, V. (2021). Autonomous buses: Intentions to use, passenger experiences, and suggestions for improvement. *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour*, 76, 321–335. <https://doi.org/10.1016/j.trf.2020.12.007>
- Müür, J., & Karo, E. (2023). Learning from public sector innovation pilots: the case of autonomous bus pilots. *Innovation: The European Journal of Social Science Research*, 1–24. <https://doi.org/10.1080/13511610.2023.2286438>
- Nagy, V., & Horváth, B. (2020). The effects of autonomous buses to vehicle scheduling system. *Procedia Computer Science*, 170, 235–240. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.03.035>
- Nagy, V., & Horváth, B. (2021). *Effect of Self-driving Buses on Vehicle Scheduling* (pp. 21–29). https://doi.org/10.1007/978-3-030-61075-3_3
- Solmaz, H., & Çeldkten, Đ. (2012). Estimation of Amount of Pollutants Generated by Vehicles in Turkey Until 2030. In *Gazi University Journal of Science GU J Sci* (Vol. 25, Issue 2).
- Su, B., Andelfinger, P., Eckhoff, D., Cornet, H., Marinkovic, G., Cai, W., & Knoll, A. (2019). *An Agent-Based Model for Evaluating the Boarding and Alighting Efficiency of Autonomous Public Transport Vehicles* (pp. 534–547). https://doi.org/10.1007/978-3-030-22734-0_39

- Sun, L., Tirachini, A., Axhausen, K. W., Erath, A., & Lee, D.-H. (2014). Models of bus boarding and alighting dynamics. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 69, 447–460. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2014.09.007>
- Tian, Q., Wang, D. Z. W., & Lin, Y. H. (2022). Optimal deployment of autonomous buses into a transit service network. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 165, 102865. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2022.102865>
- Tirachini, A., Cortés, C. E., & Jara-Díaz, S. R. (2011). Optimal design and benefits of a short turning strategy for a bus corridor. *Transportation*, 38(1), 169–189. <https://doi.org/10.1007/s11116-010-9287-8>
- Yin, C., Xiong, Z., Chen, H., Wang, J., Cooper, D., & David, B. (2015). A literature survey on smart cities. *Science China Information Sciences*, 58(10), 1–18. <https://doi.org/10.1007/s11432-015-5397-4>
- Zahedi, S., Koutsopoulos, H. N., & Ma, Z. (2022). Dynamic Interlining in Bus Operations. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4089622>
- Zhang, H., Zhao, S., Cao, Y., Liu, H., & Liang, S. (2017). Real-Time Integrated Limited-Stop and Short-Turning Bus Control with Stochastic Travel Time. *Journal of Advanced Transportation*, 2017, 1–9. <https://doi.org/10.1155/2017/2960728>
- Zhang, W., Zhao, H., & Xu, M. (2021). Optimal operating strategy of short turning lines for the battery electric bus system. *Communications in Transportation Research*, 1, 100023. <https://doi.org/10.1016/j.commtr.2021.100023>

Παράρτημα: Μητρώα ζήτησης πραγματικών γραμμών και κώδικας Python

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	0	3	4	3	3	8	2	7	4	4	6	7	6	3	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	5	1	2	8	4	5	8	8	4	5	4	7	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	3	7	8	9	9	8	4	5	5	8	4	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	9	3	9	3	9	5	7	7	9	7	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	4	7	6	9	3	3	3	8	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	6	9	5	9	6	9	3	8	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	3	3	9	4	6	5	5	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	5	5	6	7	8	6	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	9	8	5	7	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	6	5	9	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	8	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	5	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	10	5	6	4	7	12	14	13	6	6	13	11	13
16	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	9	6	7	8	9	12	7	6	12	13	9	11
17	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	11	8	7	11	4	9	12	9	10	9	6
18	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	11	4	5	7	8	4	8	11	6	10
19	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	7	9	5	9	4	7	9	8	10	10
20	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	9	6	7	7	7	3	9	4
21	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	6	7	3	5	6	8	5
22	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	3	5	5	6	4	3
23	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	5	3	5	6
24	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	2	5	2
25	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	4	4	5
26	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3
27	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	2
28	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
29	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Εικόνα 3: Μητρώο ζήτησης γραμμής L1

[illegible]

Εικόνα 4: Μητρώο ζήτησης γραμμής L2

[illegible]

Εικόνα 5: Μητρώο ζήτησης γραμμής L3

Κώδικας Python για το παράδειγμα ιδεατού δικτύου:

```

1 import gurobipy as gp
2 from gurobipy import GRB
3 import numpy as np
4 import math
5
6 model = gp.Model()
7
8 ##### SETS
9
10 Lo = (1,2,3,4) # set of original lines
11 L = (1,2,3,4,5,6) # total bus lines
12 S = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21) # set of stops of the bus network
13
14 Q= (1,2,3,4,5,6,7,8) # number of buses allocated to the original line l for l in Lo
15 Q2= (0,1,2,3,4,5) # number of buses allocated to the virtual line l' for l' in (L-Lo)
16
17 #####S1 = #set denoting the bus stops of line l in a sequential order
18 S1 = (1,2,3,4,5)
19 S2 = (6,7,8,9,10)
20 S3 = (11,12,13,14,15)
21 S4 = (16,17,18,19,20,21)
22 S5 = (1,2,8,9,10) # virtual 1
23 S6 = (11,17,18,19,20,15) # virtual 2
24
25 F=(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30) # set of available frequencies
26

```

```

26
27
28 ##### PARAMETERS
29
30 ## b[lo,i,j] # Matrix: passenger demand between each pair of bus stops i,j for each original line
31
32 B = np.array([
33     [[0,8,12,7,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
34      [4,0,7,9,8,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
35      [7,5,0,9,12,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
36      [9,9,6,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
37      [8,10,9,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
38      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
39      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
40      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
41      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
42      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
43      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
44      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
45      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
46      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
47      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
48      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
49      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
50      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
51      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
52      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
53      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]],
54
55     [[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
56      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
57      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
58      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
59      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
60      [0,0,0,0,0,7,12,8,7,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
61      [0,0,0,0,0,7,0,6,12,10,0,0,0,0,0,0,0,0],
62      [0,0,0,0,0,50,20,0,45,65,0,0,0,0,0,0,0,0],
63      [0,0,0,0,0,60,12,7,0,40,0,0,0,0,0,0,0,0],
64      [0,0,0,0,0,10,10,7,6,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
65      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
66      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
67      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
68      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
69      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
70      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
71      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
72      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
73      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
74      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
75      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]],

```

```
76      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
77      [[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
78      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
79      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
80      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
81      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
82      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
83      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
84      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
85      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
86      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
87      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,9,12,7,5,0,0,0,0],
88      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,5,0,7,10,10,0,0,0,0],
89      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,6,5,0,10,12,0,0,0,0],
90      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,10,9,4,0,10,0,0,0,0],
91      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,9,10,8,4,0,0,0,0,0],
92      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
93      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
94      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
95      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
96      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
97      [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]
```

```
99      [[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
100     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
101     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
102     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
103     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
104     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
105     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
106     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
107     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
108     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
109     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
110     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
111     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
112     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
113     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
114     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,8,11,9,6,4],
115     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,4,0,50,68,65,10]],
116     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,9,7,0,40,58,20]],
117     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,9,7,5,0,30,12]],
118     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,10,7,7,6,0,8]].
119     [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,6,10,8,7,5,0]]))
```

```

121 b = {}
122
123 for rr in range(1,5):
124     for i in range(1,22):
125         for j in range(1,22):
126             b[(rr,i,j)]=8[rr - 1,i - 1,j - 1]
127
128
129 δ = {}
130 for ii in range(1,22):
131     for jj in range(1,22):
132         for llo in range(1,5):
133             for ll in range(1,7):
134                 δ[(ll,llo,ii,jj)]=0
135
136 #LINE 1
137 δ[(1,1,1,2)]=1
138 δ[(1,1,1,3)]=1
139 δ[(1,1,1,4)]=1
140 δ[(1,1,1,5)]=1
141
142 δ[(1,1,2,1)]=1
143 δ[(1,1,2,3)]=1
144 δ[(1,1,2,4)]=1
145 δ[(1,1,2,5)]=1
146
147 δ[(1,1,3,1)]=1
148 δ[(1,1,3,2)]=1
149 δ[(1,1,3,4)]=1
150 δ[(1,1,3,5)]=1
151
152 δ[(1,1,4,1)]=1
153 δ[(1,1,4,2)]=1
154 δ[(1,1,4,3)]=1
155 δ[(1,1,4,5)]=1
156
157 δ[(1,1,5,1)]=1
158 δ[(1,1,5,2)]=1
159 δ[(1,1,5,3)]=1
160 δ[(1,1,5,4)]=1
161
162 #LINE 2
163 δ[(2,2,6,7)]=1
164 δ[(2,2,6,8)]=1
165 δ[(2,2,6,9)]=1
166 δ[(2,2,6,10)]=1
167

```

```

162 #LINE 2
163  $\delta[(2,2,6,7)]=1$ 
164  $\delta[(2,2,6,8)]=1$ 
165  $\delta[(2,2,6,9)]=1$ 
166  $\delta[(2,2,6,10)]=1$ 
167
168  $\delta[(2,2,7,6)]=1$ 
169  $\delta[(2,2,7,8)]=1$ 
170  $\delta[(2,2,7,9)]=1$ 
171  $\delta[(2,2,7,10)]=1$ 
172
173  $\delta[(2,2,8,6)]=1$ 
174  $\delta[(2,2,8,7)]=1$ 
175  $\delta[(2,2,8,9)]=1$ 
176  $\delta[(2,2,8,10)]=1$ 
177
178  $\delta[(2,2,9,6)]=1$ 
179  $\delta[(2,2,9,7)]=1$ 
180  $\delta[(2,2,9,8)]=1$ 
181  $\delta[(2,2,9,10)]=1$ 
182
183  $\delta[(2,2,10,6)]=1$ 
184  $\delta[(2,2,10,7)]=1$ 
185  $\delta[(2,2,10,8)]=1$ 
186  $\delta[(2,2,10,9)]=1$ 
187
188 #LINE 3
189  $\delta[(3,3,11,12)]=1$ 
190  $\delta[(3,3,11,13)]=1$ 
191  $\delta[(3,3,11,14)]=1$ 
192  $\delta[(3,3,11,15)]=1$ 
193
194  $\delta[(3,3,12,11)]=1$ 
195  $\delta[(3,3,12,13)]=1$ 
196  $\delta[(3,3,12,14)]=1$ 
197  $\delta[(3,3,12,15)]=1$ 
198
199  $\delta[(3,3,13,11)]=1$ 
200  $\delta[(3,3,13,12)]=1$ 
201  $\delta[(3,3,13,14)]=1$ 
202  $\delta[(3,3,13,15)]=1$ 
203
204  $\delta[(3,3,14,11)]=1$ 
205  $\delta[(3,3,14,12)]=1$ 
206  $\delta[(3,3,14,13)]=1$ 
207  $\delta[(3,3,14,15)]=1$ 
208
209  $\delta[(3,3,15,11)]=1$ 
210  $\delta[(3,3,15,12)]=1$ 
211  $\delta[(3,3,15,13)]=1$ 
212  $\delta[(3,3,15,14)]=1$ 
213

```

```

213
214 #LINE 4
215  $\delta[(4,4,16,17)]=1$ 
216  $\delta[(4,4,16,18)]=1$ 
217  $\delta[(4,4,16,19)]=1$ 
218  $\delta[(4,4,16,20)]=1$ 
219  $\delta[(4,4,16,21)]=1$ 
220
221  $\delta[(4,4,17,16)]=1$ 
222  $\delta[(4,4,17,18)]=1$ 
223  $\delta[(4,4,17,19)]=1$ 
224  $\delta[(4,4,17,20)]=1$ 
225  $\delta[(4,4,17,21)]=1$ 
226
227  $\delta[(4,4,18,16)]=1$ 
228  $\delta[(4,4,18,17)]=1$ 
229  $\delta[(4,4,18,19)]=1$ 
230  $\delta[(4,4,18,20)]=1$ 
231  $\delta[(4,4,18,21)]=1$ 
232
233  $\delta[(4,4,19,16)]=1$ 
234  $\delta[(4,4,19,17)]=1$ 
235  $\delta[(4,4,19,18)]=1$ 
236  $\delta[(4,4,19,20)]=1$ 
237  $\delta[(4,4,19,21)]=1$ 
238
239  $\delta[(4,4,20,16)]=1$ 
240  $\delta[(4,4,20,17)]=1$ 
241  $\delta[(4,4,20,18)]=1$ 
242  $\delta[(4,4,20,19)]=1$ 
243  $\delta[(4,4,20,21)]=1$ 
244
245  $\delta[(4,4,21,16)]=1$ 
246  $\delta[(4,4,21,17)]=1$ 
247  $\delta[(4,4,21,18)]=1$ 
248  $\delta[(4,4,21,19)]=1$ 
249  $\delta[(4,4,21,20)]=1$ 
250
251 #LINE 5
252  $\delta[(5,1,1,2)]=1$ 
253  $\delta[(5,1,2,8)]=1$  #interlining point (multiplied with 0 demand later)
254  $\delta[(5,2,8,6)]=1$ 
255  $\delta[(5,2,8,9)]=1$ 
256  $\delta[(5,2,8,10)]=1$ 
257  $\delta[(5,2,9,6)]=1$ 
258  $\delta[(5,2,9,10)]=1$ 
259  $\delta[(5,2,10,6)]=1$ 
260  $\delta[(5,2,6,1)]=1$  #interlining point (multiplied with 0 demand later)
261

```

```

262 #LINE 6
263  $\delta[(6,3,11,17)]=1$  #interlining point (multiplied with 0 demand later)
264  $\delta[(6,4,17,18)]=1$ 
265  $\delta[(6,4,17,19)]=1$ 
266  $\delta[(6,4,17,20)]=1$ 
267  $\delta[(6,4,18,19)]=1$ 
268  $\delta[(6,4,18,20)]=1$ 
269  $\delta[(6,4,19,20)]=1$ 
270  $\delta[(6,4,20,15)]=1$  #interlining point (multiplied with 0 demand later)
271  $\delta[(6,3,15,11)]=1$ 
272
273  $r = \{1:0.5, 2:0.6, 3:0.6, 4:0.7, 5:0.6, 6:0.8\}$  # total round trip of line l for l in L in hours
274
275  $\tau = 1$  # planning period in hours (constant)
276
277  $\psi=0.1$  #percentage denoting the lowest bound for the number of buses that should be allocated to the original planned lines
278
279  $\gamma = 25$  # total number of available buses
280
281  $\text{heta} = 2$  #total number of virtual lines that can be operational (at least 1 bus) (=0 and =1 in cases of 0 or 1 virtual lines)
282
283  $\theta = 1$  # upper bound  $\theta$  to ensure appropriate operational service for passengers
284
285 # Weight factors
286  $\beta_1 = 1$ 
287  $\beta_2 = 50$ 
288  $\beta_3 = 100$ 
289
290  $zzzz = 0$ 
291 for lo in Lo:
292     for i in S:
293         for j in S:
294              $zzzz = zzzz + b[lo,i,j]$ 
295  $zzz = 1 / zzzz$ 
296
297 # #### VARIABLES
298
299  $n = \text{model.addVars}(L, \text{vtype}=\text{gp.GRB.INTEGER}, \text{lb}=0, \text{name}='n')$  # number of buses required for operating bus line l in L
300  $h = \text{model.addVars}(L, \text{vtype}=\text{gp.GRB.CONTINUOUS}, \text{name}='h')$  # headway of bus line l
301  $e = \text{model.addVars}(L, \text{vtype}=\text{gp.GRB.BINARY}, \text{name}='e')$  # 1 if at least 1 bus has been assigned to line l for l in L
302  $z = \text{model.addVars}(L, F, \text{vtype}=\text{gp.GRB.BINARY}, \text{name}='z')$ 
303

```

```

313
314 # #### CONSTRAINTS
315
316  $\text{model.addConstr}(\text{sum}(n[l] \text{ for } l \text{ in } L) \leq \gamma)$  #1 checked
317  $\text{model.addConstr}(\psi * \gamma - \text{sum}(n[l] \text{ for } l \text{ in } Lo) \leq 0)$  #2 checked
318  $\text{model.addConstr}(\text{sum}(\text{sum}(\text{sum}((b[lo,i,j]*0.5)*(\text{sum}(\delta[l,lo,i,j]*h[l] \text{ for } l \text{ in } L)) \text{ for } j \text{ in } S) \text{ for } i \text{ in } S) \text{ for } lo \text{ in } Lo)*(zzz) \leq \theta))$  #3 checked
319  $\text{model.addConstr}(\text{heta} \geq \text{sum}(e[l] \text{ for } l \text{ in } L \text{ if } l \text{ not in } Lo))$  #4 checked
320  $\text{model.addConstrs}(e[l]*100000 \geq n[l] \text{ for } l \text{ in } L \text{ if } l \text{ not in } Lo)$ 
321  $\text{model.addConstrs}(e[l] \leq n[l] \text{ for } l \text{ in } L \text{ if } l \text{ not in } Lo)$ 
322  $\text{model.addConstrs}(n[l] \leq 8 \text{ for } l \text{ in } Lo)$  #5 checked
323  $\text{model.addConstrs}(n[l] \geq 1 \text{ for } l \text{ in } Lo)$  #6 checked
324  $\text{model.addConstrs}(n[l] \leq 5 \text{ for } l \text{ in } L \text{ if } l \text{ not in } Lo)$  #7 checked
325  $\text{model.addConstrs}(\text{sum}(z[l,fk]*fk \text{ for } fk \text{ in } F)*r[l] \geq (n[l]) \text{ for } l \text{ in } L)$  #8 checked
326  $\text{model.addConstrs}(\text{sum}(z[l,fk]*fk \text{ for } fk \text{ in } F)*r[l] \leq (n[l]) \text{ for } l \text{ in } L)$  #8 checked
327 #  $\text{model.addConstrs}(h[l] = (1/f[l]) \text{ for } l \text{ in } L)$  #9
328  $\text{model.addConstrs}(h[l] == \text{sum}(z[l,fk]/fk \text{ for } fk \text{ in } F \text{ if } fk \neq 0) \text{ for } l \text{ in } L)$  #9 checked
329  $\text{model.addConstrs}((\text{sum}(z[l,fk] \text{ for } fk \text{ in } F) == 1 \text{ for } l \text{ in } L))$  #10 checked
330

```

```

331 ##### OBJECTIVE FUNCTION
332
333  $\text{obj} = -\beta_1 * \text{sum}(\text{sum}((b[lo,i,j]*0.5)*(\text{sum}(\delta[l,lo,i,j]*n[l]/r[l]) \text{ for } l \text{ in } L)) \text{ for } i \text{ in } S) \text{ for } j \text{ in } S) \text{ for } lo \text{ in } Lo) + \beta_2 * \text{sum}(n[l]*r[l]*(\text{math.floor}(\tau/r[l])))$ 
334
335  $\text{model.setObjective}(\text{obj}, \text{GRB.MINIMIZE})$ 
336
337  $\text{model.optimize}()$ 
338
339 if  $\text{model.status} == \text{GRB.OPTIMAL}$ :
340      $\text{print}(\text{"Optimal solution found!"})$ 
341
342     # Print objective value
343      $\text{print}(\text{"Objective value:"}, \text{model.objVal})$ 
344
345     # Print decision variable values that are non-zero
346     for v in  $\text{model.getVars}()$ :
347          $\text{print}(v.\text{varName}, "=", v.x)$ 
348

```

```

332 l,lo,i,j]*(n[l]/r[l]) for l in L)) for i in S) for j in S) for lo in Lo) + β2*sum(n[l]*r[l]*(math.floor(z/r[l])) for l in L) + β3*sum(n[l] for l in L)
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345 non-zero
346
347
348

```

Κώδικας Python για το παράδειγμα πραγματικού δικτύου:

```

1 import gurobipy as gp
2 from gurobipy import GRB
3 import numpy as np
4 import math
5
6 model = gp.Model()
7
8 ##### SETS
9
10 lo = (1,2,3) # set of original lines
11 l = (1,2,3,4,5) # total bus lines
12 S = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50)
13
14 Q= (1,2,3,4,5,6,7,8) # number of buses allocated to the original line l for l in Lo
15 Q2= (0,1,2,3,4,5) # number of buses allocated to the virtual line l for l in (L-Lo)
16
17 #####S1 = #set denoting the bus stops of line l in a sequential order
18 S1 = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29)
19 S2 = (30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70)
20 S3 = (71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,87,88,89,90,91,92,93,94,95,96,97,98,99,100,101,102,103,104)
21 S4 = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,48,49,50,51,52,53,54,55,56) # virtual 1
22 S5 = (71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,87,88,89,90,91,92,93,94,95,96,97,98,99,100,101,102,103,104) # virtual 2
23
24 F=(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30) # set of available frequencies
25
26

```

```

7
8
9
10
11
12 ,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,87,88,89,90,91,92,93,94,95,96,97,98,99,100,101,102,103,104)
13
14
15
16
17
18
19 12,63,64,65,66,67,68,69,70)
20
21
22 virtual 2
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104) #set of stops of the bus network

```


62

```

345
346
347 b = {}
348 # #print(B[0,0,0])
349 for rr in range(1,4):
350     for i in range(1,105):
351         for j in range(1,105):
352             b[(rr,i,j)]=B[rr - 1,i - 1,j - 1]
353
354
355
356  $\delta$  = {}
357
358 for ii in range(1,105):
359     for jj in range(1,105):
360         for llo in range(1,4):
361             for ll in range(1,6):
362                  $\delta$ [(ll,llo,ii,jj)]=0
363
364 #LINE 1
365  $\delta$ [(1,1,1,2)]=1
366  $\delta$ [(1,1,1,3)]=1
367  $\delta$ [(1,1,1,4)]=1
368  $\delta$ [(1,1,1,5)]=1
369  $\delta$ [(1,1,1,6)]=1
370  $\delta$ [(1,1,1,7)]=1
371  $\delta$ [(1,1,1,8)]=1
372  $\delta$ [(1,1,1,9)]=1
373  $\delta$ [(1,1,1,10)]=1
374  $\delta$ [(1,1,1,11)]=1
375  $\delta$ [(1,1,1,12)]=1
376  $\delta$ [(1,1,1,13)]=1
377  $\delta$ [(1,1,1,14)]=1
378  $\delta$ [(1,1,1,15)]=1
379
380
381  $\delta$ [(1,1,2,3)]=1
382  $\delta$ [(1,1,2,4)]=1
383  $\delta$ [(1,1,2,5)]=1
384  $\delta$ [(1,1,2,6)]=1
385  $\delta$ [(1,1,2,7)]=1
386  $\delta$ [(1,1,2,8)]=1
387  $\delta$ [(1,1,2,9)]=1
388  $\delta$ [(1,1,2,10)]=1
389  $\delta$ [(1,1,2,11)]=1
390  $\delta$ [(1,1,2,12)]=1
391  $\delta$ [(1,1,2,13)]=1
392  $\delta$ [(1,1,2,14)]=1
393  $\delta$ [(1,1,2,15)]=1
394
395
396  $\delta$ [(1,1,3,4)]=1
397  $\delta$ [(1,1,3,5)]=1
398  $\delta$ [(1,1,3,6)]=1
399  $\delta$ [(1,1,3,7)]=1
400  $\delta$ [(1,1,3,8)]=1
401  $\delta$ [(1,1,3,9)]=1
402  $\delta$ [(1,1,3,10)]=1
403  $\delta$ [(1,1,3,11)]=1
404  $\delta$ [(1,1,3,12)]=1

```

```

404  $\delta$ [(1,1,3,12)]=1
405  $\delta$ [(1,1,3,13)]=1
406  $\delta$ [(1,1,3,14)]=1
407  $\delta$ [(1,1,3,15)]=1
408
409  $\delta$ [(1,1,4,5)]=1
410  $\delta$ [(1,1,4,6)]=1
411  $\delta$ [(1,1,4,7)]=1
412  $\delta$ [(1,1,4,8)]=1
413  $\delta$ [(1,1,4,9)]=1
414  $\delta$ [(1,1,4,10)]=1
415  $\delta$ [(1,1,4,11)]=1
416  $\delta$ [(1,1,4,12)]=1
417  $\delta$ [(1,1,4,13)]=1
418  $\delta$ [(1,1,4,14)]=1
419  $\delta$ [(1,1,4,15)]=1
420
421
422  $\delta$ [(1,1,5,6)]=1
423  $\delta$ [(1,1,5,7)]=1
424  $\delta$ [(1,1,5,8)]=1
425  $\delta$ [(1,1,5,9)]=1
426  $\delta$ [(1,1,5,10)]=1
427  $\delta$ [(1,1,5,11)]=1
428  $\delta$ [(1,1,5,12)]=1
429  $\delta$ [(1,1,5,13)]=1
430  $\delta$ [(1,1,5,14)]=1
431  $\delta$ [(1,1,5,15)]=1
432
433  $\delta$ [(1,1,6,7)]=1
434  $\delta$ [(1,1,6,8)]=1
435  $\delta$ [(1,1,6,9)]=1
436  $\delta$ [(1,1,6,10)]=1
437  $\delta$ [(1,1,6,11)]=1
438  $\delta$ [(1,1,6,12)]=1
439  $\delta$ [(1,1,6,13)]=1
440  $\delta$ [(1,1,6,14)]=1
441  $\delta$ [(1,1,6,15)]=1
442
443  $\delta$ [(1,1,7,8)]=1
444  $\delta$ [(1,1,7,9)]=1
445  $\delta$ [(1,1,7,10)]=1
446  $\delta$ [(1,1,7,11)]=1
447  $\delta$ [(1,1,7,12)]=1
448  $\delta$ [(1,1,7,13)]=1
449  $\delta$ [(1,1,7,14)]=1
450  $\delta$ [(1,1,7,15)]=1
451
452  $\delta$ [(1,1,8,9)]=1
453  $\delta$ [(1,1,8,10)]=1
454  $\delta$ [(1,1,8,11)]=1
455  $\delta$ [(1,1,8,12)]=1
456  $\delta$ [(1,1,8,13)]=1
457  $\delta$ [(1,1,8,14)]=1
458  $\delta$ [(1,1,8,15)]=1
459
460  $\delta$ [(1,1,9,10)]=1
461  $\delta$ [(1,1,9,11)]=1
462  $\delta$ [(1,1,9,12)]=1
463  $\delta$ [(1,1,9,13)]=1
464  $\delta$ [(1,1,9,14)]=1

```

465	$\delta[(1,1,9,15)]=1$	525	$\delta[(1,1,17,25)]=1$	585	$\delta[(1,1,22,1)]=1$
466		526	$\delta[(1,1,17,26)]=1$	586	
467	$\delta[(1,1,10,11)]=1$	527	$\delta[(1,1,17,27)]=1$	587	$\delta[(1,1,23,24)]=1$
468	$\delta[(1,1,10,12)]=1$	528	$\delta[(1,1,17,28)]=1$	588	$\delta[(1,1,23,25)]=1$
469	$\delta[(1,1,10,13)]=1$	529	$\delta[(1,1,17,29)]=1$	589	$\delta[(1,1,23,26)]=1$
470	$\delta[(1,1,10,14)]=1$	530	$\delta[(1,1,17,1)]=1$	590	$\delta[(1,1,23,27)]=1$
471	$\delta[(1,1,10,15)]=1$	531		591	$\delta[(1,1,23,28)]=1$
472		532	$\delta[(1,1,18,19)]=1$	592	$\delta[(1,1,23,29)]=1$
473	$\delta[(1,1,11,12)]=1$	533	$\delta[(1,1,18,20)]=1$	593	$\delta[(1,1,23,1)]=1$
474	$\delta[(1,1,11,13)]=1$	534	$\delta[(1,1,18,21)]=1$	594	
475	$\delta[(1,1,11,14)]=1$	535	$\delta[(1,1,18,22)]=1$	595	$\delta[(1,1,24,25)]=1$
476	$\delta[(1,1,11,15)]=1$	536	$\delta[(1,1,18,23)]=1$	596	$\delta[(1,1,24,26)]=1$
477		537	$\delta[(1,1,18,24)]=1$	597	$\delta[(1,1,24,27)]=1$
478	$\delta[(1,1,12,13)]=1$	538	$\delta[(1,1,18,25)]=1$	598	$\delta[(1,1,24,28)]=1$
479	$\delta[(1,1,12,14)]=1$	539	$\delta[(1,1,18,26)]=1$	599	$\delta[(1,1,24,29)]=1$
480	$\delta[(1,1,12,15)]=1$	540	$\delta[(1,1,18,27)]=1$	600	$\delta[(1,1,24,1)]=1$
481		541	$\delta[(1,1,18,28)]=1$	601	
482	$\delta[(1,1,13,14)]=1$	542	$\delta[(1,1,18,29)]=1$	602	$\delta[(1,1,25,26)]=1$
483	$\delta[(1,1,13,15)]=1$	543	$\delta[(1,1,18,1)]=1$	603	$\delta[(1,1,25,27)]=1$
484		544		604	$\delta[(1,1,25,28)]=1$
485	$\delta[(1,1,14,15)]=1$	545	$\delta[(1,1,19,20)]=1$	605	$\delta[(1,1,25,29)]=1$
486		546	$\delta[(1,1,19,21)]=1$	606	$\delta[(1,1,25,1)]=1$
487	$\delta[(1,1,15,16)]=1$	547	$\delta[(1,1,19,22)]=1$	607	
488	$\delta[(1,1,15,17)]=1$	548	$\delta[(1,1,19,23)]=1$	608	$\delta[(1,1,26,27)]=1$
489	$\delta[(1,1,15,18)]=1$	549	$\delta[(1,1,19,24)]=1$	609	$\delta[(1,1,26,28)]=1$
490	$\delta[(1,1,15,19)]=1$	550	$\delta[(1,1,19,25)]=1$	610	$\delta[(1,1,26,29)]=1$
491	$\delta[(1,1,15,20)]=1$	551	$\delta[(1,1,19,26)]=1$	611	$\delta[(1,1,26,1)]=1$
492	$\delta[(1,1,15,21)]=1$	552	$\delta[(1,1,19,27)]=1$	612	
493	$\delta[(1,1,15,22)]=1$	553	$\delta[(1,1,19,28)]=1$	613	$\delta[(1,1,27,28)]=1$
494	$\delta[(1,1,15,23)]=1$	554	$\delta[(1,1,19,29)]=1$	614	$\delta[(1,1,27,29)]=1$
495	$\delta[(1,1,15,24)]=1$	555	$\delta[(1,1,19,1)]=1$	615	$\delta[(1,1,27,1)]=1$
496	$\delta[(1,1,15,25)]=1$	556		616	
497	$\delta[(1,1,15,26)]=1$	557	$\delta[(1,1,20,21)]=1$	617	$\delta[(1,1,28,29)]=1$
498	$\delta[(1,1,15,27)]=1$	558	$\delta[(1,1,20,22)]=1$	618	$\delta[(1,1,28,1)]=1$
499	$\delta[(1,1,15,28)]=1$	559	$\delta[(1,1,20,23)]=1$	619	
500	$\delta[(1,1,15,29)]=1$	560	$\delta[(1,1,20,24)]=1$	620	$\delta[(1,1,29,1)]=1$
501	$\delta[(1,1,15,1)]=1$	561	$\delta[(1,1,20,25)]=1$	621	
502		562	$\delta[(1,1,20,26)]=1$	622	# Line 2
503	$\delta[(1,1,16,17)]=1$	563	$\delta[(1,1,20,27)]=1$	623	
504	$\delta[(1,1,16,18)]=1$	564	$\delta[(1,1,20,28)]=1$	624	$\delta[(2,2,30,31)]=1$
505	$\delta[(1,1,16,19)]=1$	565	$\delta[(1,1,20,29)]=1$	625	$\delta[(2,2,30,32)]=1$
506	$\delta[(1,1,16,20)]=1$	566	$\delta[(1,1,20,1)]=1$	626	$\delta[(2,2,30,33)]=1$
507	$\delta[(1,1,16,21)]=1$	567		627	$\delta[(2,2,30,34)]=1$
508	$\delta[(1,1,16,22)]=1$	568	$\delta[(1,1,21,22)]=1$	628	$\delta[(2,2,30,35)]=1$
509	$\delta[(1,1,16,23)]=1$	569	$\delta[(1,1,21,23)]=1$	629	$\delta[(2,2,30,36)]=1$
510	$\delta[(1,1,16,24)]=1$	570	$\delta[(1,1,21,24)]=1$	630	$\delta[(2,2,30,37)]=1$
511	$\delta[(1,1,16,25)]=1$	571	$\delta[(1,1,21,25)]=1$	631	$\delta[(2,2,30,38)]=1$
512	$\delta[(1,1,16,26)]=1$	572	$\delta[(1,1,21,26)]=1$	632	$\delta[(2,2,30,39)]=1$
513	$\delta[(1,1,16,27)]=1$	573	$\delta[(1,1,21,27)]=1$	633	$\delta[(2,2,30,40)]=1$
514	$\delta[(1,1,16,28)]=1$	574	$\delta[(1,1,21,28)]=1$	634	$\delta[(2,2,30,41)]=1$
515	$\delta[(1,1,16,29)]=1$	575	$\delta[(1,1,21,29)]=1$	635	$\delta[(2,2,30,42)]=1$
516	$\delta[(1,1,16,1)]=1$	576	$\delta[(1,1,21,1)]=1$	636	$\delta[(2,2,30,43)]=1$
517		577		637	$\delta[(2,2,30,44)]=1$
518	$\delta[(1,1,17,18)]=1$	578	$\delta[(1,1,22,23)]=1$	638	$\delta[(2,2,30,45)]=1$
519	$\delta[(1,1,17,19)]=1$	579	$\delta[(1,1,22,24)]=1$	639	$\delta[(2,2,30,46)]=1$
520	$\delta[(1,1,17,20)]=1$	580	$\delta[(1,1,22,25)]=1$	640	$\delta[(2,2,30,47)]=1$
521	$\delta[(1,1,17,21)]=1$	581	$\delta[(1,1,22,26)]=1$	641	$\delta[(2,2,30,13)]=1$
522	$\delta[(1,1,17,22)]=1$	582	$\delta[(1,1,22,27)]=1$	642	$\delta[(2,2,30,14)]=1$
523	$\delta[(1,1,17,23)]=1$	583	$\delta[(1,1,22,28)]=1$	643	$\delta[(2,2,30,15)]=1$
524	$\delta[(1,1,17,24)]=1$	584	$\delta[(1,1,22,29)]=1$	644	

645	$\delta[(2,2,31,32)]=1$				
646	$\delta[(2,2,31,33)]=1$				
647	$\delta[(2,2,31,34)]=1$				
648	$\delta[(2,2,31,35)]=1$	705	$\delta[(2,2,34,38)]=1$		
649	$\delta[(2,2,31,36)]=1$	706	$\delta[(2,2,34,39)]=1$		
650	$\delta[(2,2,31,37)]=1$	707	$\delta[(2,2,34,40)]=1$		
651	$\delta[(2,2,31,38)]=1$	708	$\delta[(2,2,34,41)]=1$	764	$\delta[(2,2,38,39)]=1$
652	$\delta[(2,2,31,39)]=1$	709	$\delta[(2,2,34,42)]=1$	765	$\delta[(2,2,38,40)]=1$
653	$\delta[(2,2,31,40)]=1$	710	$\delta[(2,2,34,43)]=1$	766	$\delta[(2,2,38,41)]=1$
654	$\delta[(2,2,31,41)]=1$	711	$\delta[(2,2,34,44)]=1$	767	$\delta[(2,2,38,42)]=1$
655	$\delta[(2,2,31,42)]=1$	712	$\delta[(2,2,34,45)]=1$	768	$\delta[(2,2,38,43)]=1$
656	$\delta[(2,2,31,43)]=1$	713	$\delta[(2,2,34,46)]=1$	769	$\delta[(2,2,38,44)]=1$
657	$\delta[(2,2,31,44)]=1$	714	$\delta[(2,2,34,47)]=1$	770	$\delta[(2,2,38,45)]=1$
658	$\delta[(2,2,31,45)]=1$	715	$\delta[(2,2,34,13)]=1$	771	$\delta[(2,2,38,46)]=1$
659	$\delta[(2,2,31,46)]=1$	716	$\delta[(2,2,34,14)]=1$	772	$\delta[(2,2,38,47)]=1$
660	$\delta[(2,2,31,47)]=1$	717	$\delta[(2,2,34,15)]=1$	773	$\delta[(2,2,38,13)]=1$
661	$\delta[(2,2,31,13)]=1$	718		774	$\delta[(2,2,38,14)]=1$
662	$\delta[(2,2,31,14)]=1$	719	$\delta[(2,2,35,36)]=1$	775	$\delta[(2,2,38,15)]=1$
663	$\delta[(2,2,31,15)]=1$	720	$\delta[(2,2,35,37)]=1$	776	
664		721	$\delta[(2,2,35,38)]=1$	777	$\delta[(2,2,39,40)]=1$
665	$\delta[(2,2,32,33)]=1$	722	$\delta[(2,2,35,39)]=1$	778	$\delta[(2,2,39,41)]=1$
666	$\delta[(2,2,32,34)]=1$	723	$\delta[(2,2,35,40)]=1$	779	$\delta[(2,2,39,42)]=1$
667	$\delta[(2,2,32,35)]=1$	724	$\delta[(2,2,35,41)]=1$	780	$\delta[(2,2,39,43)]=1$
668	$\delta[(2,2,32,36)]=1$	725	$\delta[(2,2,35,42)]=1$	781	$\delta[(2,2,39,44)]=1$
669	$\delta[(2,2,32,37)]=1$	726	$\delta[(2,2,35,43)]=1$	782	$\delta[(2,2,39,45)]=1$
670	$\delta[(2,2,32,38)]=1$	727	$\delta[(2,2,35,44)]=1$	783	$\delta[(2,2,39,46)]=1$
671	$\delta[(2,2,32,39)]=1$	728	$\delta[(2,2,35,45)]=1$	784	$\delta[(2,2,39,47)]=1$
672	$\delta[(2,2,32,40)]=1$	729	$\delta[(2,2,35,46)]=1$	785	$\delta[(2,2,39,13)]=1$
673	$\delta[(2,2,32,41)]=1$	730	$\delta[(2,2,35,47)]=1$	786	$\delta[(2,2,39,14)]=1$
674	$\delta[(2,2,32,42)]=1$	731	$\delta[(2,2,35,13)]=1$	787	$\delta[(2,2,39,15)]=1$
675	$\delta[(2,2,32,43)]=1$	732	$\delta[(2,2,35,14)]=1$	788	
676	$\delta[(2,2,32,44)]=1$	733	$\delta[(2,2,35,15)]=1$	789	$\delta[(2,2,40,41)]=1$
677	$\delta[(2,2,32,45)]=1$	734		790	$\delta[(2,2,40,42)]=1$
678	$\delta[(2,2,32,46)]=1$	735	$\delta[(2,2,36,37)]=1$	791	$\delta[(2,2,40,43)]=1$
679	$\delta[(2,2,32,47)]=1$	736	$\delta[(2,2,36,38)]=1$	792	$\delta[(2,2,40,44)]=1$
680	$\delta[(2,2,32,13)]=1$	737	$\delta[(2,2,36,39)]=1$	793	$\delta[(2,2,40,45)]=1$
681	$\delta[(2,2,32,14)]=1$	738	$\delta[(2,2,36,40)]=1$	794	$\delta[(2,2,40,46)]=1$
682	$\delta[(2,2,32,15)]=1$	739	$\delta[(2,2,36,41)]=1$	795	$\delta[(2,2,40,47)]=1$
683		740	$\delta[(2,2,36,42)]=1$	796	$\delta[(2,2,40,13)]=1$
684	$\delta[(2,2,33,34)]=1$	741	$\delta[(2,2,36,43)]=1$	797	$\delta[(2,2,40,14)]=1$
685	$\delta[(2,2,33,35)]=1$	742	$\delta[(2,2,36,44)]=1$	798	$\delta[(2,2,40,15)]=1$
686	$\delta[(2,2,33,36)]=1$	743	$\delta[(2,2,36,45)]=1$	799	
687	$\delta[(2,2,33,37)]=1$	744	$\delta[(2,2,36,46)]=1$	800	$\delta[(2,2,41,42)]=1$
688	$\delta[(2,2,33,38)]=1$	745	$\delta[(2,2,36,47)]=1$	801	$\delta[(2,2,41,43)]=1$
689	$\delta[(2,2,33,39)]=1$	746	$\delta[(2,2,36,13)]=1$	802	$\delta[(2,2,41,44)]=1$
690	$\delta[(2,2,33,40)]=1$	747	$\delta[(2,2,36,14)]=1$	803	$\delta[(2,2,41,45)]=1$
691	$\delta[(2,2,33,41)]=1$	748	$\delta[(2,2,36,15)]=1$	804	$\delta[(2,2,41,46)]=1$
692	$\delta[(2,2,33,42)]=1$	749		805	$\delta[(2,2,41,47)]=1$
693	$\delta[(2,2,33,43)]=1$	750	$\delta[(2,2,37,38)]=1$	806	$\delta[(2,2,41,13)]=1$
694	$\delta[(2,2,33,44)]=1$	751	$\delta[(2,2,37,39)]=1$	807	$\delta[(2,2,41,14)]=1$
695	$\delta[(2,2,33,45)]=1$	752	$\delta[(2,2,37,40)]=1$	808	$\delta[(2,2,41,15)]=1$
696	$\delta[(2,2,33,46)]=1$	753	$\delta[(2,2,37,41)]=1$	809	
697	$\delta[(2,2,33,47)]=1$	754	$\delta[(2,2,37,42)]=1$	810	$\delta[(2,2,42,43)]=1$
698	$\delta[(2,2,33,13)]=1$	755	$\delta[(2,2,37,43)]=1$	811	$\delta[(2,2,42,44)]=1$
699	$\delta[(2,2,33,14)]=1$	756	$\delta[(2,2,37,44)]=1$	812	$\delta[(2,2,42,45)]=1$
700	$\delta[(2,2,33,15)]=1$	757	$\delta[(2,2,37,45)]=1$	813	$\delta[(2,2,42,46)]=1$
701		758	$\delta[(2,2,37,46)]=1$	814	$\delta[(2,2,42,47)]=1$
702	$\delta[(2,2,34,35)]=1$	759	$\delta[(2,2,37,47)]=1$	815	$\delta[(2,2,42,13)]=1$
703	$\delta[(2,2,34,36)]=1$	760	$\delta[(2,2,37,13)]=1$	816	$\delta[(2,2,42,14)]=1$
704	$\delta[(2,2,34,37)]=1$	761	$\delta[(2,2,37,14)]=1$	817	$\delta[(2,2,42,15)]=1$
		762	$\delta[(2,2,37,15)]=1$	818	
		763			

819	$\delta[(2,2,43,44)]=1$		939	$\delta[(2,2,48,56)]=1$	
820	$\delta[(2,2,43,45)]=1$	880		$\delta[(2,2,48,57)]=1$	
821	$\delta[(2,2,43,46)]=1$	881	$\delta[(2,2,16,17)]=1$	941	$\delta[(2,2,48,58)]=1$
822	$\delta[(2,2,43,47)]=1$	882	$\delta[(2,2,16,48)]=1$	942	$\delta[(2,2,48,59)]=1$
823	$\delta[(2,2,43,13)]=1$	883	$\delta[(2,2,16,49)]=1$	943	$\delta[(2,2,48,60)]=1$
824	$\delta[(2,2,43,14)]=1$	884	$\delta[(2,2,16,50)]=1$	944	$\delta[(2,2,48,61)]=1$
825	$\delta[(2,2,43,15)]=1$	885	$\delta[(2,2,16,51)]=1$	945	$\delta[(2,2,48,62)]=1$
826		886	$\delta[(2,2,16,52)]=1$	946	$\delta[(2,2,48,63)]=1$
827	$\delta[(2,2,44,45)]=1$	887	$\delta[(2,2,16,53)]=1$	947	$\delta[(2,2,48,64)]=1$
828	$\delta[(2,2,44,46)]=1$	888	$\delta[(2,2,16,54)]=1$	948	$\delta[(2,2,48,65)]=1$
829	$\delta[(2,2,44,47)]=1$	889	$\delta[(2,2,16,55)]=1$	949	$\delta[(2,2,48,66)]=1$
830	$\delta[(2,2,44,13)]=1$	890	$\delta[(2,2,16,56)]=1$	950	$\delta[(2,2,48,67)]=1$
831	$\delta[(2,2,44,14)]=1$	891	$\delta[(2,2,16,57)]=1$	951	$\delta[(2,2,48,68)]=1$
832	$\delta[(2,2,44,15)]=1$	892	$\delta[(2,2,16,58)]=1$	952	$\delta[(2,2,48,69)]=1$
833		893	$\delta[(2,2,16,59)]=1$	953	$\delta[(2,2,48,70)]=1$
834	$\delta[(2,2,45,46)]=1$	894	$\delta[(2,2,16,60)]=1$	954	$\delta[(2,2,48,30)]=1$
835	$\delta[(2,2,45,47)]=1$	895	$\delta[(2,2,16,61)]=1$	955	
836	$\delta[(2,2,45,13)]=1$	896	$\delta[(2,2,16,62)]=1$	956	$\delta[(2,2,49,50)]=1$
837	$\delta[(2,2,45,14)]=1$	897	$\delta[(2,2,16,63)]=1$	957	$\delta[(2,2,49,51)]=1$
838	$\delta[(2,2,45,15)]=1$	898	$\delta[(2,2,16,64)]=1$	958	$\delta[(2,2,49,52)]=1$
839		899	$\delta[(2,2,16,65)]=1$	959	$\delta[(2,2,49,53)]=1$
840	$\delta[(2,2,46,47)]=1$	900	$\delta[(2,2,16,66)]=1$	960	$\delta[(2,2,49,54)]=1$
841	$\delta[(2,2,46,13)]=1$	901	$\delta[(2,2,16,67)]=1$	961	$\delta[(2,2,49,55)]=1$
842	$\delta[(2,2,46,14)]=1$	902	$\delta[(2,2,16,68)]=1$	962	$\delta[(2,2,49,56)]=1$
843	$\delta[(2,2,46,15)]=1$	903	$\delta[(2,2,16,69)]=1$	963	$\delta[(2,2,49,57)]=1$
844		904	$\delta[(2,2,16,70)]=1$	964	$\delta[(2,2,49,58)]=1$
845	$\delta[(2,2,47,13)]=1$	905	$\delta[(2,2,16,30)]=1$	965	$\delta[(2,2,49,59)]=1$
846	$\delta[(2,2,47,14)]=1$	906		966	$\delta[(2,2,49,60)]=1$
847	$\delta[(2,2,47,15)]=1$	907	$\delta[(2,2,17,48)]=1$	967	$\delta[(2,2,49,61)]=1$
848		908	$\delta[(2,2,17,49)]=1$	968	$\delta[(2,2,49,62)]=1$
849	$\delta[(2,2,13,14)]=1$	909	$\delta[(2,2,17,50)]=1$	969	$\delta[(2,2,49,63)]=1$
850	$\delta[(2,2,13,15)]=1$	910	$\delta[(2,2,17,51)]=1$	970	$\delta[(2,2,49,64)]=1$
851		911	$\delta[(2,2,17,52)]=1$	971	$\delta[(2,2,49,65)]=1$
852	$\delta[(2,2,14,15)]=1$	912	$\delta[(2,2,17,53)]=1$	972	$\delta[(2,2,49,66)]=1$
853		913	$\delta[(2,2,17,54)]=1$	973	$\delta[(2,2,49,67)]=1$
854	$\delta[(2,2,15,16)]=1$	914	$\delta[(2,2,17,55)]=1$	974	$\delta[(2,2,49,68)]=1$
855	$\delta[(2,2,15,17)]=1$	915	$\delta[(2,2,17,56)]=1$	975	$\delta[(2,2,49,69)]=1$
856	$\delta[(2,2,15,48)]=1$	916	$\delta[(2,2,17,57)]=1$	976	$\delta[(2,2,49,70)]=1$
857	$\delta[(2,2,15,49)]=1$	917	$\delta[(2,2,17,58)]=1$	977	$\delta[(2,2,49,30)]=1$
858	$\delta[(2,2,15,50)]=1$	918	$\delta[(2,2,17,59)]=1$	978	
859	$\delta[(2,2,15,51)]=1$	919	$\delta[(2,2,17,60)]=1$	979	$\delta[(2,2,50,51)]=1$
860	$\delta[(2,2,15,52)]=1$	920	$\delta[(2,2,17,61)]=1$	980	$\delta[(2,2,50,52)]=1$
861	$\delta[(2,2,15,53)]=1$	921	$\delta[(2,2,17,62)]=1$	981	$\delta[(2,2,50,53)]=1$
862	$\delta[(2,2,15,54)]=1$	922	$\delta[(2,2,17,63)]=1$	982	$\delta[(2,2,50,54)]=1$
863	$\delta[(2,2,15,55)]=1$	923	$\delta[(2,2,17,64)]=1$	983	$\delta[(2,2,50,55)]=1$
864	$\delta[(2,2,15,56)]=1$	924	$\delta[(2,2,17,65)]=1$	984	$\delta[(2,2,50,56)]=1$
865	$\delta[(2,2,15,57)]=1$	925	$\delta[(2,2,17,66)]=1$	985	$\delta[(2,2,50,57)]=1$
866	$\delta[(2,2,15,58)]=1$	926	$\delta[(2,2,17,67)]=1$	986	$\delta[(2,2,50,58)]=1$
867	$\delta[(2,2,15,59)]=1$	927	$\delta[(2,2,17,68)]=1$	987	$\delta[(2,2,50,59)]=1$
868	$\delta[(2,2,15,60)]=1$	928	$\delta[(2,2,17,69)]=1$	988	$\delta[(2,2,50,60)]=1$
869	$\delta[(2,2,15,61)]=1$	929	$\delta[(2,2,17,70)]=1$	989	$\delta[(2,2,50,61)]=1$
870	$\delta[(2,2,15,62)]=1$	930	$\delta[(2,2,17,30)]=1$	990	$\delta[(2,2,50,62)]=1$
871	$\delta[(2,2,15,63)]=1$	931		991	$\delta[(2,2,50,63)]=1$
872	$\delta[(2,2,15,64)]=1$	932	$\delta[(2,2,48,49)]=1$	992	$\delta[(2,2,50,64)]=1$
873	$\delta[(2,2,15,65)]=1$	933	$\delta[(2,2,48,50)]=1$	993	$\delta[(2,2,50,65)]=1$
874	$\delta[(2,2,15,66)]=1$	934	$\delta[(2,2,48,51)]=1$	994	$\delta[(2,2,50,66)]=1$
875	$\delta[(2,2,15,67)]=1$	935	$\delta[(2,2,48,52)]=1$	995	$\delta[(2,2,50,67)]=1$
876	$\delta[(2,2,15,68)]=1$	936	$\delta[(2,2,48,53)]=1$	996	$\delta[(2,2,50,68)]=1$
877	$\delta[(2,2,15,69)]=1$	937	$\delta[(2,2,48,54)]=1$	997	$\delta[(2,2,50,69)]=1$
878	$\delta[(2,2,15,70)]=1$	938	$\delta[(2,2,48,55)]=1$	998	$\delta[(2,2,50,70)]=1$
879	$\delta[(2,2,15,30)]=1$	939	$\delta[(2,2,48,56)]=1$	999	$\delta[(2,2,50,30)]=1$

```

1000
1001  $\delta[(2,2,51,52)]=-1$ 
1002  $\delta[(2,2,51,53)]=-1$ 
1003  $\delta[(2,2,51,54)]=-1$ 
1004  $\delta[(2,2,51,55)]=-1$ 
1005  $\delta[(2,2,51,56)]=-1$ 
1006  $\delta[(2,2,51,57)]=-1$ 
1007  $\delta[(2,2,51,58)]=-1$ 
1008  $\delta[(2,2,51,59)]=-1$ 
1009  $\delta[(2,2,51,60)]=-1$ 
1010  $\delta[(2,2,51,61)]=-1$ 
1011  $\delta[(2,2,51,62)]=-1$ 
1012  $\delta[(2,2,51,63)]=-1$ 
1013  $\delta[(2,2,51,64)]=-1$ 
1014  $\delta[(2,2,51,65)]=-1$ 
1015  $\delta[(2,2,51,66)]=-1$ 
1016  $\delta[(2,2,51,67)]=-1$ 
1017  $\delta[(2,2,51,68)]=-1$ 
1018  $\delta[(2,2,51,69)]=-1$ 
1019  $\delta[(2,2,51,70)]=-1$ 
1020  $\delta[(2,2,51,30)]=-1$ 
1021
1022  $\delta[(2,2,52,53)]=-1$ 
1023  $\delta[(2,2,52,54)]=-1$ 
1024  $\delta[(2,2,52,55)]=-1$ 
1025  $\delta[(2,2,52,56)]=-1$ 
1026  $\delta[(2,2,52,57)]=-1$ 
1027  $\delta[(2,2,52,58)]=-1$ 
1028  $\delta[(2,2,52,59)]=-1$ 
1029  $\delta[(2,2,52,60)]=-1$ 
1030  $\delta[(2,2,52,61)]=-1$ 
1031  $\delta[(2,2,52,62)]=-1$ 
1032  $\delta[(2,2,52,63)]=-1$ 
1033  $\delta[(2,2,52,64)]=-1$ 
1034  $\delta[(2,2,52,65)]=-1$ 
1035  $\delta[(2,2,52,66)]=-1$ 
1036  $\delta[(2,2,52,67)]=-1$ 
1037  $\delta[(2,2,52,68)]=-1$ 
1038  $\delta[(2,2,52,69)]=-1$ 
1039  $\delta[(2,2,52,70)]=-1$ 
1040  $\delta[(2,2,52,30)]=-1$ 
1041
1042  $\delta[(2,2,53,54)]=-1$ 
1043  $\delta[(2,2,53,55)]=-1$ 
1044  $\delta[(2,2,53,56)]=-1$ 
1045  $\delta[(2,2,53,57)]=-1$ 
1046  $\delta[(2,2,53,58)]=-1$ 
1047  $\delta[(2,2,53,59)]=-1$ 
1048  $\delta[(2,2,53,60)]=-1$ 
1049  $\delta[(2,2,53,61)]=-1$ 
1050  $\delta[(2,2,53,62)]=-1$ 
1051  $\delta[(2,2,53,63)]=-1$ 
1052  $\delta[(2,2,53,64)]=-1$ 
1053  $\delta[(2,2,53,65)]=-1$ 
1054  $\delta[(2,2,53,66)]=-1$ 
1055  $\delta[(2,2,53,67)]=-1$ 
1056  $\delta[(2,2,53,68)]=-1$ 
1057  $\delta[(2,2,53,69)]=-1$ 
1058  $\delta[(2,2,53,70)]=-1$ 
1059  $\delta[(2,2,53,30)]=-1$ 

```

1059	$\delta(2,2,53,70) = 1$	1119	$\delta(2,2,57,64) = 1$	1183	$\delta(2,2,62,68) = 1$
1060	$\delta(2,2,53,30) = 1$	1120	$\delta(2,2,57,65) = 1$	1184	$\delta(2,2,62,69) = 1$
1061		1121	$\delta(2,2,57,66) = 1$	1185	$\delta(2,2,62,70) = 1$
1062	$\delta(2,2,54,55) = 1$	1122	$\delta(2,2,57,67) = 1$	1186	$\delta(2,2,62,30) = 1$
1063	$\delta(2,2,54,56) = 1$	1123	$\delta(2,2,57,68) = 1$	1187	
1064	$\delta(2,2,54,57) = 1$	1124	$\delta(2,2,57,69) = 1$	1188	$\delta(2,2,63,64) = 1$
1065	$\delta(2,2,54,58) = 1$	1125	$\delta(2,2,57,70) = 1$	1189	$\delta(2,2,63,65) = 1$
1066	$\delta(2,2,54,59) = 1$	1126	$\delta(2,2,57,30) = 1$	1190	$\delta(2,2,63,66) = 1$
1067	$\delta(2,2,54,60) = 1$	1127		1191	$\delta(2,2,63,67) = 1$
1068	$\delta(2,2,54,61) = 1$	1128	$\delta(2,2,58,59) = 1$	1192	$\delta(2,2,63,68) = 1$
1069	$\delta(2,2,54,62) = 1$	1129	$\delta(2,2,58,60) = 1$	1193	$\delta(2,2,63,69) = 1$
1070	$\delta(2,2,54,63) = 1$	1130	$\delta(2,2,58,61) = 1$	1194	$\delta(2,2,63,70) = 1$
1071	$\delta(2,2,54,64) = 1$	1131	$\delta(2,2,58,62) = 1$	1195	$\delta(2,2,63,30) = 1$
1072	$\delta(2,2,54,65) = 1$	1132	$\delta(2,2,58,63) = 1$	1196	
1073	$\delta(2,2,54,66) = 1$	1133	$\delta(2,2,58,64) = 1$	1197	$\delta(2,2,64,65) = 1$
1074	$\delta(2,2,54,67) = 1$	1134	$\delta(2,2,58,65) = 1$	1198	$\delta(2,2,64,66) = 1$
1075	$\delta(2,2,54,68) = 1$	1135	$\delta(2,2,58,66) = 1$	1199	$\delta(2,2,64,67) = 1$
1076	$\delta(2,2,54,69) = 1$	1136	$\delta(2,2,58,67) = 1$	1200	$\delta(2,2,64,68) = 1$
1077	$\delta(2,2,54,70) = 1$	1137	$\delta(2,2,58,68) = 1$	1201	$\delta(2,2,64,69) = 1$
1078	$\delta(2,2,54,30) = 1$	1138	$\delta(2,2,58,69) = 1$	1202	$\delta(2,2,64,70) = 1$
1079		1139	$\delta(2,2,58,70) = 1$	1203	$\delta(2,2,64,30) = 1$
1080	$\delta(2,2,55,56) = 1$	1140	$\delta(2,2,58,30) = 1$	1204	
1081	$\delta(2,2,55,57) = 1$	1141		1205	$\delta(2,2,65,66) = 1$
1082	$\delta(2,2,55,58) = 1$	1142	$\delta(2,2,59,60) = 1$	1206	$\delta(2,2,65,67) = 1$
1083	$\delta(2,2,55,59) = 1$	1143	$\delta(2,2,59,61) = 1$	1207	$\delta(2,2,65,68) = 1$
1084	$\delta(2,2,55,60) = 1$	1144	$\delta(2,2,59,62) = 1$	1208	$\delta(2,2,65,69) = 1$
1085	$\delta(2,2,55,61) = 1$	1145	$\delta(2,2,59,63) = 1$	1209	$\delta(2,2,65,70) = 1$
1086	$\delta(2,2,55,62) = 1$	1146	$\delta(2,2,59,64) = 1$	1210	$\delta(2,2,65,30) = 1$
1087	$\delta(2,2,55,63) = 1$	1147	$\delta(2,2,59,65) = 1$	1211	
1088	$\delta(2,2,55,64) = 1$	1148	$\delta(2,2,59,66) = 1$	1212	$\delta(2,2,66,67) = 1$
1089	$\delta(2,2,55,65) = 1$	1149	$\delta(2,2,59,67) = 1$	1213	$\delta(2,2,66,68) = 1$
1090	$\delta(2,2,55,66) = 1$	1150	$\delta(2,2,59,68) = 1$	1214	$\delta(2,2,66,69) = 1$
1091	$\delta(2,2,55,67) = 1$	1151	$\delta(2,2,59,69) = 1$	1215	$\delta(2,2,66,70) = 1$
1092	$\delta(2,2,55,68) = 1$	1152	$\delta(2,2,59,70) = 1$	1216	$\delta(2,2,66,30) = 1$
1093	$\delta(2,2,55,69) = 1$	1153	$\delta(2,2,59,30) = 1$	1217	
1094	$\delta(2,2,55,70) = 1$	1154		1218	$\delta(2,2,67,68) = 1$
1095	$\delta(2,2,55,30) = 1$	1155	$\delta(2,2,60,61) = 1$	1219	$\delta(2,2,67,69) = 1$
1096		1156	$\delta(2,2,60,62) = 1$	1220	$\delta(2,2,67,70) = 1$
1097	$\delta(2,2,56,57) = 1$	1157	$\delta(2,2,60,63) = 1$	1221	$\delta(2,2,67,30) = 1$
1098	$\delta(2,2,56,58) = 1$	1158	$\delta(2,2,60,64) = 1$	1222	
1099	$\delta(2,2,56,59) = 1$	1159	$\delta(2,2,60,65) = 1$	1223	$\delta(2,2,68,69) = 1$
1100	$\delta(2,2,56,60) = 1$	1160	$\delta(2,2,60,66) = 1$	1224	$\delta(2,2,68,70) = 1$
1101	$\delta(2,2,56,61) = 1$	1161	$\delta(2,2,60,67) = 1$	1225	$\delta(2,2,68,30) = 1$
1102	$\delta(2,2,56,62) = 1$	1162	$\delta(2,2,60,68) = 1$	1226	
1103	$\delta(2,2,56,63) = 1$	1163	$\delta(2,2,60,69) = 1$	1227	$\delta(2,2,69,70) = 1$
1104	$\delta(2,2,56,64) = 1$	1164	$\delta(2,2,60,70) = 1$	1228	$\delta(2,2,69,30) = 1$
1105	$\delta(2,2,56,65) = 1$	1165	$\delta(2,2,60,30) = 1$	1229	
1106	$\delta(2,2,56,66) = 1$	1166		1230	$\delta(2,2,70,30) = 1$
1107	$\delta(2,2,56,67) = 1$	1167	$\delta(2,2,61,62) = 1$	1231	
1108	$\delta(2,2,56,68) = 1$	1168	$\delta(2,2,61,63) = 1$	1232	#line 3
1109	$\delta(2,2,56,69) = 1$	1169	$\delta(2,2,61,64) = 1$	1233	
1110	$\delta(2,2,56,70) = 1$	1170	$\delta(2,2,61,65) = 1$	1234	$\delta(3,3,71,72) = 1$
1111	$\delta(2,2,56,30) = 1$	1171	$\delta(2,2,61,66) = 1$	1235	$\delta(3,3,71,73) = 1$
1112		1172	$\delta(2,2,61,67) = 1$	1236	$\delta(3,3,71,74) = 1$
1113	$\delta(2,2,57,58) = 1$	1173	$\delta(2,2,61,68) = 1$	1237	$\delta(3,3,71,75) = 1$
1114	$\delta(2,2,57,59) = 1$	1174	$\delta(2,2,61,69) = 1$	1238	$\delta(3,3,71,76) = 1$
1115	$\delta(2,2,57,60) = 1$	1175	$\delta(2,2,61,70) = 1$	1239	$\delta(3,3,71,77) = 1$
1116	$\delta(2,2,57,61) = 1$	1176	$\delta(2,2,61,30) = 1$	1240	$\delta(3,3,71,78) = 1$
1117	$\delta(2,2,57,62) = 1$	1177		1241	$\delta(3,3,71,79) = 1$
1118	$\delta(2,2,57,63) = 1$	1178	$\delta(2,2,62,63) = 1$	1242	$\delta(3,3,71,80) = 1$
1119	$\delta(2,2,57,64) = 1$	1179	$\delta(2,2,62,64) = 1$	1243	$\delta(3,3,71,81) = 1$
1120	$\delta(2,2,57,65) = 1$	1180	$\delta(2,2,62,65) = 1$	1244	$\delta(3,3,71,82) = 1$
1121	$\delta(2,2,57,66) = 1$	1181	$\delta(2,2,62,66) = 1$	1245	$\delta(3,3,71,83) = 1$
1122	$\delta(2,2,57,67) = 1$	1182	$\delta(2,2,62,67) = 1$	1246	$\delta(3,3,71,84) = 1$

69

1619	$\delta((4,1,2,12))=1$	1679	$\delta((4,1,8,9))=1$	1743	$\delta((4,2,17,54))=1$
1620	$\delta((4,1,2,12))=1$	1680	$\delta((4,1,8,10))=1$	1744	$\delta((4,2,17,55))=1$
1621	$\delta((4,1,2,13))=1$	1681	$\delta((4,1,8,11))=1$	1745	$\delta((4,2,17,56))=1$
1622	$\delta((4,1,2,15))=1$	1682	$\delta((4,1,8,12))=1$	1746	
1623		1683	$\delta((4,1,8,13))=1$	1747	$\delta((4,2,48,49))=1$
1624	$\delta((4,1,3,4))=1$	1684	$\delta((4,1,8,14))=1$	1748	$\delta((4,2,48,50))=1$
1625	$\delta((4,1,3,5))=1$	1685	$\delta((4,1,8,15))=1$	1749	$\delta((4,2,48,51))=1$
1626	$\delta((4,1,3,6))=1$	1686		1750	$\delta((4,2,48,52))=1$
1627	$\delta((4,1,3,7))=1$	1687	$\delta((4,1,9,10))=1$	1751	$\delta((4,2,48,53))=1$
1628	$\delta((4,1,3,8))=1$	1688	$\delta((4,1,9,11))=1$	1752	$\delta((4,2,48,54))=1$
1629	$\delta((4,1,3,9))=1$	1689	$\delta((4,1,9,12))=1$	1753	$\delta((4,2,48,55))=1$
1630	$\delta((4,1,3,10))=1$	1690	$\delta((4,1,9,13))=1$	1754	$\delta((4,2,48,56))=1$
1631	$\delta((4,1,3,11))=1$	1691	$\delta((4,1,9,14))=1$	1755	
1632	$\delta((4,1,3,12))=1$	1692	$\delta((4,1,9,15))=1$	1756	$\delta((4,2,48,49))=1$
1633	$\delta((4,1,3,12))=1$	1693		1757	$\delta((4,2,48,50))=1$
1634	$\delta((4,1,3,14))=1$	1694	$\delta((4,1,10,11))=1$	1758	$\delta((4,2,48,51))=1$
1635	$\delta((4,1,3,15))=1$	1695	$\delta((4,1,10,12))=1$	1759	$\delta((4,2,48,52))=1$
1636		1696	$\delta((4,1,10,13))=1$	1760	$\delta((4,2,48,53))=1$
1637	$\delta((4,1,4,5))=1$	1697	$\delta((4,1,10,14))=1$	1761	$\delta((4,2,48,54))=1$
1638	$\delta((4,1,4,6))=1$	1698	$\delta((4,1,10,15))=1$	1762	$\delta((4,2,48,55))=1$
1639	$\delta((4,1,4,7))=1$	1699		1763	$\delta((4,2,48,56))=1$
1640	$\delta((4,1,4,8))=1$	1700	$\delta((4,1,11,12))=1$	1764	
1641	$\delta((4,1,4,9))=1$	1701	$\delta((4,1,11,13))=1$	1765	$\delta((4,2,49,50))=1$
1642	$\delta((4,1,4,10))=1$	1702	$\delta((4,1,11,14))=1$	1766	$\delta((4,2,49,51))=1$
1643	$\delta((4,1,4,11))=1$	1703	$\delta((4,1,11,15))=1$	1767	$\delta((4,2,49,52))=1$
1644	$\delta((4,1,4,12))=1$	1704		1768	$\delta((4,2,49,53))=1$
1645	$\delta((4,1,4,12))=1$	1705	$\delta((4,1,12,13))=1$	1769	$\delta((4,2,49,54))=1$
1646	$\delta((4,1,4,13))=1$	1706	$\delta((4,1,12,14))=1$	1770	$\delta((4,2,49,55))=1$
1647	$\delta((4,1,4,15))=1$	1707	$\delta((4,1,12,15))=1$	1771	$\delta((4,2,49,56))=1$
1648		1708		1772	
1649	$\delta((4,1,5,6))=1$	1709	$\delta((4,1,13,14))=1$	1773	$\delta((4,2,50,51))=1$
1650	$\delta((4,1,5,7))=1$	1710	$\delta((4,1,13,15))=1$	1774	$\delta((4,2,50,52))=1$
1651	$\delta((4,1,5,8))=1$	1711		1775	$\delta((4,2,50,53))=1$
1652	$\delta((4,1,5,9))=1$	1712	$\delta((4,1,14,15))=1$	1776	$\delta((4,2,50,54))=1$
1653	$\delta((4,1,5,10))=1$	1713		1777	$\delta((4,2,50,55))=1$
1654	$\delta((4,1,5,11))=1$	1714	$\delta((4,2,15,16))=1$	1778	$\delta((4,2,50,56))=1$
1655	$\delta((4,1,5,12))=1$	1715	$\delta((4,2,15,17))=1$	1779	
1656	$\delta((4,1,5,13))=1$	1716	$\delta((4,2,15,18))=1$	1780	$\delta((4,2,51,52))=1$
1657	$\delta((4,1,5,14))=1$	1717	$\delta((4,2,15,19))=1$	1781	$\delta((4,2,51,53))=1$
1658	$\delta((4,1,5,15))=1$	1718	$\delta((4,2,15,20))=1$	1782	$\delta((4,2,51,54))=1$
1659		1719	$\delta((4,2,15,21))=1$	1783	$\delta((4,2,51,55))=1$
1660	$\delta((4,1,6,7))=1$	1720	$\delta((4,2,15,22))=1$	1784	$\delta((4,2,51,56))=1$
1661	$\delta((4,1,6,8))=1$	1721	$\delta((4,2,15,23))=1$	1785	
1662	$\delta((4,1,6,9))=1$	1722	$\delta((4,2,15,24))=1$	1786	$\delta((4,2,52,53))=1$
1663	$\delta((4,1,6,10))=1$	1723	$\delta((4,2,15,25))=1$	1787	$\delta((4,2,52,54))=1$
1664	$\delta((4,1,6,11))=1$	1724	$\delta((4,2,15,26))=1$	1788	$\delta((4,2,52,55))=1$
1665	$\delta((4,1,6,12))=1$	1725		1789	$\delta((4,2,52,56))=1$
1666	$\delta((4,1,6,13))=1$	1726	$\delta((4,2,16,17))=1$	1790	
1667	$\delta((4,1,6,14))=1$	1727	$\delta((4,2,16,18))=1$	1791	$\delta((4,2,53,54))=1$
1668	$\delta((4,1,6,15))=1$	1728	$\delta((4,2,16,19))=1$	1792	$\delta((4,2,53,55))=1$
1669		1729	$\delta((4,2,16,20))=1$	1793	$\delta((4,2,53,56))=1$
1670	$\delta((4,1,7,6))=1$	1730	$\delta((4,2,16,21))=1$	1794	
1671	$\delta((4,1,7,9))=1$	1731	$\delta((4,2,16,22))=1$	1795	$\delta((4,2,54,55))=1$
1672	$\delta((4,1,7,10))=1$	1732	$\delta((4,2,16,23))=1$	1796	$\delta((4,2,54,56))=1$
1673	$\delta((4,1,7,11))=1$	1733	$\delta((4,2,16,24))=1$	1797	
1674	$\delta((4,1,7,12))=1$	1734	$\delta((4,2,16,25))=1$	1798	$\delta((4,2,55,56))=1$
1675	$\delta((4,1,7,12))=1$	1735	$\delta((4,2,16,26))=1$	1799	
1676	$\delta((4,1,7,14))=1$	1736		1800	$\delta((4,2,56,1))=1$
1677	$\delta((4,1,7,15))=1$	1737	$\delta((4,2,17,48))=1$	1801	
1678		1738	$\delta((4,2,17,49))=1$	1802	##### Line 5
1679	$\delta((4,1,8,5))=1$	1739	$\delta((4,2,17,50))=1$	1803	
1680	$\delta((4,1,8,10))=1$	1740	$\delta((4,2,17,51))=1$	1804	$\delta((5,3,71,72))=1$
1681	$\delta((4,1,8,11))=1$	1741	$\delta((4,2,17,52))=1$	1805	$\delta((5,3,71,73))=1$
1682	$\delta((4,1,8,12))=1$	1742	$\delta((4,2,17,53))=1$	1806	$\delta((5,3,71,74))=1$
1683	$\delta((4,1,8,13))=1$	1743	$\delta((4,2,17,54))=1$	1807	$\delta((5,3,71,75))=1$
1684	$\delta((5,3,71,72))=1$	1804	$\delta((5,3,74,84))=1$	1808	$\delta((5,3,79,15))=1$
1685	$\delta((5,3,71,73))=1$	1805	$\delta((5,3,74,85))=1$	1809	$\delta((5,3,79,16))=1$
1686	$\delta((5,3,71,74))=1$	1806	$\delta((5,3,74,86))=1$	1810	$\delta((5,3,80,81))=1$
1687	$\delta((5,3,71,75))=1$	1807	$\delta((5,3,74,87))=1$	1811	$\delta((5,3,80,82))=1$
1688	$\delta((5,3,71,76))=1$	1808	$\delta((5,3,74,15))=1$	1812	$\delta((5,3,80,83))=1$
1689	$\delta((5,3,71,77))=1$	1809		1813	$\delta((5,3,80,84))=1$
1690	$\delta((5,3,71,78))=1$	1810	$\delta((5,3,75,76))=1$	1814	$\delta((5,3,80,85))=1$
1691	$\delta((5,3,71,79))=1$	1811	$\delta((5,3,75,77))=1$	1815	$\delta((5,3,80,86))=1$
1692	$\delta((5,3,71,80))=1$	1812	$\delta((5,3,75,78))=1$	1816	$\delta((5,3,80,87))=1$
1693	$\delta((5,3,71,81))=1$	1813	$\delta((5,3,75,79))=1$	1817	$\delta((5,3,80,15))=1$
1694	$\delta((5,3,71,82))=1$	1814	$\delta((5,3,75,80))=1$	1818	
1695	$\delta((5,3,71,83))=1$	1815	$\delta((5,3,75,81))=1$	1819	$\delta((5,3,81,82))=1$
1696	$\delta((5,3,71,84))=1$	1816	$\delta((5,3,75,82))=1$	1820	$\delta((5,3,81,83))=1$
1697	$\delta((5,3,71,85))=1$	1817	$\delta((5,3,75,83))=1$	1821	$\delta((5,3,81,84))=1$
1698	$\delta((5,3,71,86))=1$	1818	$\delta((5,3,75,84))=1$	1822	$\delta((5,3,81,85))=1$
1699	$\delta((5,3,71,87))=1$	1819	$\delta((5,3,75,85))=1$	1823	$\delta((5,3,81,86))=1$
1700	$\delta((5,3,71,15))=1$	1820	$\delta((5,3,75,86))=1$	1824	$\delta((5,3,81,87))=1$
1701		1821	$\delta((5,3,75,87))=1$	1825	$\delta((5,3,81,15))=1$
1702	$\delta((5,3,72,73))=1$	1822	$\delta((5,3,75,15))=1$	1826	
1703	$\delta((5,3,72,74))=1$	1823		1827	$\delta((5,3,82,83))=1$
1704	$\delta((5,3,72,75))=1$	1824	$\delta((5,3,76,77))=1$	1828	$\delta((5,3,82,84))=1$
1705	$\delta((5,3,72,76))=1$	1825	$\delta((5,3,76,78))=1$	1829	$\delta((5,3,82,85))=1$
1706	$\delta((5,3,72,77))=1$	1826	$\delta((5,3,76,79))=1$	1830	$\delta((5,3,82,86))=1$
1707	$\delta((5,3,72,78))=1$	1827	$\delta((5,3,76,80))=1$	1831	$\delta((5,3,82,87))=1$
1708	$\delta((5,3,72,79))=1$	1828	$\delta((5,3,76,81))=1$	1832	$\delta((5,3,82,15))=1$
1709	$\delta((5,3,72,80))=1$	1829	$\delta((5,3,76,82))=1$	1833	
1710	$\delta((5,3,72,81))=1$	1830	$\delta((5,3,76,83))=1$	1834	$\delta((5,3,83,84))=1$
1711	$\delta((5,3,72,82))=1$	1831	$\delta((5,3,76,84))=1$	1835	$\delta((5,3,83,85))=1$
1712	$\delta((5,3,72,83))=1$	1832	$\delta((5,3,76,85))=1$	1836	$\delta((5,3,83,86))=1$
1713	$\delta((5,3,72,84))=1$	1833	$\delta((5,3,76,86))=1$	1837	$\delta((5,3,83,87))=1$
1714	$\delta((5,3,72,85))=1$	1834	$\delta((5,3,76,87))=1$	1838	$\delta((5,3,83,15))=1$
1715	$\delta((5,3,72,86))=1$	1835	$\delta((5,3,76,15))=1$	1839	
1716	$\delta((5,3,72,87))=1$	1836		1840	$\delta((5,3,84,85))=1$
1717	$\delta((5,3,72,15))=1$	1837	$\delta((5,3,77,78))=1$	1841	$\delta((5,3,84,86))=1$
1718		1838	$\delta((5,3,77,79))=1$	1842	$\delta((5,3,84,87))=1$
1719	$\delta((5,3,73,74))=1$	1839	$\delta((5,3,77,80))=1$	1843	$\delta((5,3,84,15))=1$
1720	$\delta((5,3,73,75))=1$	1840	$\delta((5,3,77,81))=1$	1844	
1721	$\delta((5,3,73,76))=1$	1841	$\delta((5,3,77,82))=1$	1845	$\delta((5,3,85,88))=1$
1722	$\delta((5,3,73,77))=1$	1842	$\delta((5,3,77,83))=1$	1846	$\delta((5,3,85,89))=1$
1723	$\delta((5,3,73,78))=1$	1843	$\delta((5,3,77,84))=1$	1847	$\delta((5,3,85,90))=1$
1724	$\delta((5,3,73,79))=1$	1844	$\delta((5,3,77,85))=1$	1848	$\delta((5,3,85,15))=1$
1725	$\delta((5,3,73,80))=1$	1845	$\delta((5,3,77,86))=1$	1849	
1726	$\delta((5,3,73,81))=1$	1846	$\delta((5,3,77,87))=1$	1850	$\delta((5,3,86,15))=1$
1727	$\delta((5,3,73,82))=1$	1847	$\delta((5,3,77,15))=1$	1851	
1728	$\delta((5,3,73,83))=1$	1848		1852	$\delta((5,3,87,15))=1$
1729	$\delta((5,3,73,84))=1$	1849	$\delta((5,3,76,79))=1$	1853	
1730	$\delta((5,3,73,85))=1$	1850	$\delta((5,3,76,80))=1$	1854	$\delta((5,2,15,16))=1$
1731	$\delta((5,3,73,86))=1$	1851	$\delta((5,3,76,81))=1$	1855	$\delta((5,2,15,17))=1$
1732	$\delta((5,3,73,87))=1$	1852	$\delta((5,3,76,82))=1$	1856	$\delta((5,2,15,18))=1$
1733	$\delta((5,3,73,15))=1$	1853	$\delta((5,3,76,83))=1$	1857	$\delta((5,2,15,19))=1$
1734		1854	$\delta((5,3,76,84))=1$	1858	$\delta((5,2,15,20))=1$
1735	$\delta((5,3,74,75))=1$	1855	$\delta((5,3,76,85))=1$	1859	$\delta((5,2,15,21))=1$
1736	$\delta((5,3,74,76))=1$	1856	$\delta((5,3,76,86))=1$	1860	$\delta((5,2,15,22))=1$
1737	$\delta((5,3,74,77))=1$	1857	$\delta((5,3,76,87))=1$	1861	$\delta((5,2,15,23))=1$
1738	$\delta((5,3,74,78))=1$	1858	$\delta((5,3,76,15))=1$	1862	$\delta((5,2,15,24))=1$
1739	$\delta((5,3,74,79))=1$	1859		1863	$\delta((5,2,15,25))=1$
1740	$\delta((5,3,74,80))=1$	1860	$\delta((5,3,75,88))=1$	1864	$\delta((5,2,15,26))=1$
1741	$\delta((5,3,74,81))=1$	1861	$\delta((5,3,75,89))=1$	1865	
1742	$\delta((5,3,74,82))=1$	1862	$\delta((5,3,75,90))=1$	1866	$\delta((5,2,16,17))=1$
1743	$\delta((5,3,74,83))=1$	1863	$\delta((5,3,75,91))=1$	1867	$\delta((5,2,16,18))=1$
1744	$\delta((5,3,74,84))=1$	1864	$\delta((5,3,75,92))=1$	1868	$\delta((5,2,16,19))=1$
1745	$\delta((5,3,74,85))=1$	1865	$\delta((5,3,75,93))=1$	1869	$\delta((5,2,16,20))=1$
1746	$\delta((5,3,74,86))=1$	1866	$\delta((5,3,75,94))=1$	1870	$\delta((5,2,16,21))=1$
1747	$\delta((5,3,74,87))=1$	1867	$\delta((5,3,75,95))=1$	1871	$\delta((5,2,16,22))=1$
1748	$\delta((5,3,74,15))=1$	1868		1872	$\delta((5,2,16,23))=1$
1749		1869	$\delta((5,3,76,87))=1$	1873	$\delta((5,2,16,24))=1$
1750		1870	$\delta((5,3,76,88))=1$	1874	$\delta((5,2,16,25))=1$
1751		1871			

1989	$\delta[(5,2,16,50)]=1$		
1990	$\delta[(5,2,16,51)]=1$		
1991	$\delta[(5,2,16,52)]=1$		
1992	$\delta[(5,2,16,53)]=1$		
1993	$\delta[(5,2,16,54)]=1$		
1994	$\delta[(5,2,16,55)]=1$		
1995	$\delta[(5,2,16,56)]=1$		
1996			
1997	$\delta[(5,2,17,48)]=1$		
1998	$\delta[(5,2,17,49)]=1$		
1999	$\delta[(5,2,17,50)]=1$		
2000	$\delta[(5,2,17,51)]=1$		
2001	$\delta[(5,2,17,52)]=1$		
2002	$\delta[(5,2,17,53)]=1$		
2003	$\delta[(5,2,17,54)]=1$		
2004	$\delta[(5,2,17,55)]=1$		
2005	$\delta[(5,2,17,56)]=1$		
2006			
2007	$\delta[(5,2,48,49)]=1$		
2008	$\delta[(5,2,48,50)]=1$		
2009	$\delta[(5,2,48,51)]=1$		
2010	$\delta[(5,2,48,52)]=1$		
2011	$\delta[(5,2,48,53)]=1$		
2012	$\delta[(5,2,48,54)]=1$		
2013	$\delta[(5,2,48,55)]=1$		
2014	$\delta[(5,2,48,56)]=1$		
2015			
2016	$\delta[(5,2,48,49)]=1$		
2017	$\delta[(5,2,48,50)]=1$		
2018	$\delta[(5,2,48,51)]=1$		
2019	$\delta[(5,2,48,52)]=1$		
2020	$\delta[(5,2,48,53)]=1$		
2021	$\delta[(5,2,48,54)]=1$		
2022	$\delta[(5,2,48,55)]=1$		
2023	$\delta[(5,2,48,56)]=1$		
2024			
2025	$\delta[(5,2,49,50)]=1$		
2026	$\delta[(5,2,49,51)]=1$		
2027	$\delta[(5,2,49,52)]=1$		
2028	$\delta[(5,2,49,53)]=1$		
2029	$\delta[(5,2,49,54)]=1$		
2030	$\delta[(5,2,49,55)]=1$		
2031	$\delta[(5,2,49,56)]=1$		
2032			
2033	$\delta[(5,2,50,51)]=1$		
2034	$\delta[(5,2,50,52)]=1$		
2035	$\delta[(5,2,50,53)]=1$		
2036	$\delta[(5,2,50,54)]=1$		
2037	$\delta[(5,2,50,55)]=1$		
2038	$\delta[(5,2,50,56)]=1$		
2039			
2040	$\delta[(5,2,51,52)]=1$		
2041	$\delta[(5,2,51,53)]=1$		
2042	$\delta[(5,2,51,54)]=1$		
2043	$\delta[(5,2,51,55)]=1$		
2044	$\delta[(5,2,51,56)]=1$		
2045			
2046	$\delta[(5,2,52,53)]=1$		
2047	$\delta[(5,2,52,54)]=1$		
2048	$\delta[(5,2,52,55)]=1$		
2049	$\delta[(5,2,52,56)]=1$		
2050			
2051	$\delta[(5,2,53,54)]=1$	2051	$\delta[(5,2,53,54)]=1$
2052	$\delta[(5,2,53,55)]=1$	2052	$\delta[(5,2,53,55)]=1$
		2053	$\delta[(5,2,53,56)]=1$
		2054	
		2055	$\delta[(5,2,54,55)]=1$
		2056	$\delta[(5,2,54,56)]=1$
		2057	
		2058	$\delta[(5,2,55,56)]=1$
		2059	
		2060	$\delta[(5,2,56,98)]=1$
		2061	
		2062	$\delta[(5,3,98,99)]=1$
		2063	$\delta[(5,3,98,100)]=1$
		2064	$\delta[(5,3,98,101)]=1$
		2065	$\delta[(5,3,98,102)]=1$
		2066	$\delta[(5,3,98,103)]=1$
		2067	$\delta[(5,3,98,104)]=1$
		2068	$\delta[(5,3,98,71)]=1$
		2069	
		2070	$\delta[(5,3,99,100)]=1$
		2071	$\delta[(5,3,99,101)]=1$
		2072	$\delta[(5,3,99,102)]=1$
		2073	$\delta[(5,3,99,103)]=1$
		2074	$\delta[(5,3,99,104)]=1$
		2075	$\delta[(5,3,99,71)]=1$
		2076	
		2077	$\delta[(5,3,100,101)]=1$
		2078	$\delta[(5,3,100,102)]=1$
		2079	$\delta[(5,3,100,103)]=1$
		2080	$\delta[(5,3,100,104)]=1$
		2081	$\delta[(5,3,100,71)]=1$
		2082	
		2083	$\delta[(5,3,101,102)]=1$
		2084	$\delta[(5,3,101,103)]=1$
		2085	$\delta[(5,3,101,104)]=1$
		2086	$\delta[(5,3,101,71)]=1$
		2087	
		2088	$\delta[(5,3,102,103)]=1$
		2089	$\delta[(5,3,102,104)]=1$
		2090	$\delta[(5,3,102,71)]=1$
		2091	
		2092	$\delta[(5,3,103,104)]=1$
		2093	$\delta[(5,3,103,71)]=1$
		2094	
		2095	$\delta[(5,3,104,71)]=1$
		2096	

```

2097 r = {1:0.66, 2:1.00, 3:0.81, 4:0.62, 5:0.94} # total round trip of line l for l in L in hours
2098
2099 τ = 1 # planning period in hours (constant)
2100
2101 ψ = 0.6 #percentage denoting the lowest bound for the number of buses that should be allocated to the original planned lines
2102
2103 γ = 20 # total number of available buses
2104
2105 heta = 2 # total number of virtual lines that can be operational (at least 1 bus)
2106
2107 θ = 1 # upper bound θ to ensure appropriate operational service for passengers
2108
2109 # Weight factors
2110 β1 = 1 # passenger related waiting time cost
2111 β2 = 200 # total vehicle running time for serving all lines
2112 β3 = 1000 # depreciation cost of using an extra bus
2113
2114 zzzz = 0
2115 for lo in Lo:
2116     for i in S:
2117         for j in S:
2118             zzzz = zzzz + b[lo,i,j]
2119 zzz = 1 / zzzz
2120
2121 # #### VARIABLES
2122
2123 n = model.addVars(L, vtype=gp.GRB.INTEGER, lb=0, name='n') # number of buses required for operating bus line l in L
2124 h = model.addVars(L, vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, name='h') # headway of bus line l
2125 e = model.addVars(L, vtype=gp.GRB.BINARY, name='e') # 1 if at least 1 bus has been assigned to line l for l in L
2126 z = model.addVars(L, F, vtype=gp.GRB.BINARY, name='z')
2127
2128 # #### CONSTRAINTS
2129
2130 model.addConstr(sum(n[l] for l in L) <= γ) #1 checked
2131 model.addConstr(ψ*γ - sum(n[l] for l in Lo) <= 0) #2 checked
2132 model.addConstr(sum(sum(b[lo,i,j]*0.5)*(sum(δ[l,lo,i,j]*h[l] for l in L)) for j in S) for i in S) for lo in Lo)*(zzz) <= 0) #3 checked
2133 model.addConstr(heta >= sum(e[l] for l in L if l not in Lo)) #4 checked
2134 model.addConstrs(e[l]*100000 >= n[l] for l in L if l not in Lo)
2135 model.addConstrs(e[l]<=n[l] for l in L if l not in Lo)
2136 model.addConstrs(n[l] <= 8 for l in Lo) #5 checked
2137 model.addConstrs(n[l] >= 1 for l in Lo) #6 checked
2138 model.addConstrs(n[l] <= 5 for l in L if l not in Lo) #7 checked
2139 model.addConstrs(sum(z[l,fk]*fk for fk in F)*r[l] >= (n[l]-0.8) for l in L) #8 checked
2140 model.addConstrs(sum(z[l,fk]*fk for fk in F)*r[l] <= (n[l]) for l in L) #8 checked
2141 #model.addConstrs(h[l]==(1/f[l]) for l in L) #9
2142 model.addConstrs(h[l] == sum(z[l,fk]/fk for fk in F if fk != 0) for l in L) #9 checked
2143 model.addConstrs((sum(z[l,fk] for fk in F) == 1 for l in L)) #10 checked
2144
2145 ##### OBJECTIVE FUNCTION
2146
2147 obj = -β1*sum(sum(sum(b[lo,i,j]*0.5)*(sum(δ[l,lo,i,j]*(n[l]/r[l]) for l in L)) for i in S) for j in S) for lo in Lo) + β2*sum(n[l]*r[l]*(math.floor(τ/r[l]))) for l in L) + β3*sum(n[l] for l in L)
2148
2149 model.setObjective(obj,GRB.MINIMIZE)
2150
2151 model.optimize()
2152
2153 if model.status == GRB.OPTIMAL:
2154     print("Optimal solution found!")
2155
2156     # Print objective value
2157     print("Objective value:", model.objVal)
2158
2159     # Print decision variable values that are non-zero
2160     for v in model.getVars():
2161         print(v.varName, "=", v.x)
2162
2163 else:
2164     print("Optimal solution not found.")
2165
2166 ) for l in L)) for i in S) for j in S) for lo in Lo) + β2*sum(n[l]*r[l]*(math.floor(τ/r[l]))) for l in L) + β3*sum(n[l] for l in L)

```